上越教育大学研究紀要　第33巻　平成26年３月
Bull. Joetsu Univ. Educ., Vol. 33, Mar. 2014

中学校数学における関数の対象としての構成
－教科書の考察を中心に－

布　川　和　彦*

（平成25年９月25日受付；平成25年11月５日受理）

要　　旨

関数の学習では関数を表現したり，探求したりするが，生徒の関数の学習における困難についての報告を見ると，生徒が関数をそうした活動の対象として捉えているかを問う必要性がうかがえる。そこで本稿では，生徒が関数を対象として捉えることに影響を与えると考えられる教科書の記述を，そのように捉えることがしやすい語り方になっているかの観点から考察する。

最初に上述の問題を考える必要性を示したのち，教科書の関数の定義，および関数の式やグラフに関わる活動において，関数がどのように語られているかの考察を行った。その結果，定義に関わる語り方の特徴，および定義の語り方とその後の活動での語り方の整合性に，生徒が関数を対象としてとらえにくくする語り方のあることが示された。そうした考察に基づき，教科書の語り方を改善する方向性も示した。

KEY WORDS
Functions　関数　　mathematical objects　数学的対象
learning processes　学習過程　　textbooks　教科書

1　問題の所在

ある中学校の教科書に「一次関数をグラフに表し，その特徴を調べましょう」という表現が出てくる。また，中学校教師を主な読者とする雑誌で「表・式・グラフに表現できる力を育てる」という特集が組まれた際[1)]には，全体を統一するために各記事のタイトルの前につけられた見出しにおいて「１次関数を『表』に表現する」「１次関数を『グラフ』に表現する」「関数$y=ax^2$を『式』に表現する」といった表現が用いられた。中学校学習指導要領解説数学編（文部科学省，2008）では「伴って変わる二つの数量の変化や対応を，表，式，グラフによって表現する」（p.45）となっているが，実際には「関数を表すのに文字を用いた式が使われる」（p.47）という言い方も他所ではなされていることがわかる。さらに「比例，反比例，一次関数，関数$y=ax^2$を文字を用いた式によって表し」（p.45）と書かれている箇所もあり，関数を表，式，グラフにより表すと考えることは広く行われていると言えよう。

関数の学習では翻訳過程（Janvier, 1987）に代表されるように，これら３つの表現が互いに関連し合うことが求められる。例えば，田村・日野（2010）は高校の数学の授業において，予想する活動を取り入れる中で式，表，グラフの結びつきを意識させることを試みている。熊倉（2003）は関数の意義として「変化する２つの量の関係を調べて，未知の部分を予測する」ことを設定し実践を行っているが，表からグラフを作り，式表現をし，そこから予測につなげる活動が重要であると指摘している。こうした考察ができるように，「表，式，グラフを互いに関連づけることで関数の変化の様子と対応の仕方の特徴を見出す力を育成することをねらう」授業も提唱されてきている（作元ほか，2012）。

「表す」「表現する」というときには，表現する対象があるという印象を受ける。例えば，中学校１年「空間図形」の単元で学習する投影図については，「立体を投影図で表す」ことが考えられている。ここでは，立体が表現の対象として位置づけられている。また文字式や方程式については，「文字を用いて数量の関係や法則などを式に表現」（文部科学省，2008，p.37）と言われるように，数量の関係や法則が表現の対象となっている。数量の関係や法則は図形のような視覚的な対応物を持たないが，少なくとも教科書や日常で出会う範囲においては，感覚的に捉えられる現象についての特徴と言えるものが多く，何を表現しているかが生徒にも理解可能と考えられる。数学の学習以外の場面では，感情や意図，考えなどを「表す」「表現する」機会も多いが，ここでの表現の対象である感情や意図，

*学校教育学系

考えについては，生徒自身も“持っている”ものであり，それを表すことは生徒にも受け入れやすいと考えられる。

「関数を表現する」ことを行うならば，関数が表現する対象として生徒に受容されている必要がある。また「関数について学びましょう」という教科書の記述や，「表，式，グラフによって表現することによって関数の特徴を能率的に調べる」（文部科学省，2008，p.45）という記述では，関数は探究の対象としても位置づけられている。だとすれば，関数は探究し学習する対象として生徒に受容されている，あるいは学習のある段階では対象として成立している必要がある。

ところで，関数についての中学生の理解には課題があると指摘されることが多い。例えば，国立教育政策研究所（2012）は「２つの数量の関係が比例・反比例・一次関数の関係になることを理解すること」を課題の１つとしてあげるとともに，数量関係領域における多くの問題，関数領域の問題全般に課題があるとしている（p.27，p.45）。こうした関数領域における生徒の理解の不十分さに対して，表，式，グラフという３つの表現の間の翻訳が適切にできるような指導を考案したり（Schwarz et al., 1990），現実場面と関数とのつながりを重視する指導を行うといったことも多く提唱されてきた（布川，2010）。しかし，それ以前に，関数が生徒にとって表，式，グラフを用いて表現する対象として成立しているのか，学習をするために考察をする対象として成立しているのかについて問うこともできる。板垣（2000）は「実体のない『関数』を，われわれの教材観のなかで仮想現実化し，式，表，グラフを『関数』の表し方と呼んで，式や表やグラフを関数に従属する３点セットに観る『まとめ方』を流行らせた」（p.2）と指摘し，関数自体を教えることをやめて関数的な考え方に焦点を絞ることを提唱する。本稿では，関数が表現する対象となっているかという問題意識は共有しながらも，他方で，関数の式やグラフについての学習が現在の中学校で大きな比重を占めることも考慮し，むしろ，「表・式・グラフが共通に表しているもの」が関数であると捉え（辻，2007），関数という対象に関わる“仮想現実化”を教師と生徒で共有することで，中学校数学における関数に関わるディスコース[2]を成立しやすくすることを考える。そこで，このディスコースの成立に大きく影響すると考えられる教科書を取り上げ，関数単元において，関数という対象がどのように語られているのかを考察する。比喩的に述べるならば，投影図で立体を表現するように，グラフや式，表が関数という対象の正面図，平面図，側面図のように捉えられる学習になっているのかの問題とも言えよう。

なお，ここまでの議論でわかるように，本稿は数学的対象の存在論（斉藤，2001）について論ずるものではなく，また数学的対象に関わる数学観と学習やカリキュラムのあり方との関係を考える（湊・浜田，1994）ものでもない。あくまでも，初学者が学習する対象，表現する対象についての捉えやすさを論ずるものであり，いわば学習過程臨床的な視点（布川，2005）から，学習者が直面する可能性のある困難を検討しようとする試みである。あるいは，数学の教科書に代表される数学学習のディスコースをその外部者（Sfard, 2008, p.278）の視点から吟味する試みとも言えよう。

2　生徒の関数の理解に対する視点

生徒が関数をどう捉えているかについては，これまでの研究において取り上げられてきたが，そこでは大きくは２つの視点が見られた。１つは，生徒の関数の捉え方が十分に一般的か，それとも特定の関数に依存した一般性を欠くものか，という視点である。もう１つは，中等教育後期から始まる微積分の学習を念頭に，微分や積分といった数学的操作を施す対象として関数が捉えられるようなレベルに生徒の理解が発達しているか，という視点である。

第１の視点に関わっては，関数の定義に基づき一意対応全般を関数として捉える理解と，比例や１次関数といった慣れ親しんだ関数に影響された理解を区別するものである。Vinner（1983）は概念についての教科書の定義と，生徒が当該の概念について持つ視覚的表現や一連の諸性質の理解をあわせた概念イメージとを区別し，この２つの要素を含む生徒の思考のモデルを提案している。それを用いて，10～11年生に対して行った調査の結果を分析し，生徒の考える定義が概念イメージにより歪められていることや，誤った概念イメージが構成されてしまうことを示している。生徒の持つ概念イメージとして「関数は単一の規則で与えられる」や「グラフはきちんとしたものであるべき」といったことが取り上げられており，生徒が定義とは異なる属性を関数に持たせていることが指摘されている。Vinner（1983）はこうしたイメージが，学習で目にした事例などの学習中の経験により構成されるとしているが，Dogan-Dunlap（2007）はインタビュー調査により，「走る」「流れる」といった日常的な現象に基づく比喩的な理解によっても構成されると指摘している。Vinner（1983）と類似の結果は，わが国の中学生においても見ることができる。井上（1995）は中学校３年生にグラフ，表，式を提示し，それぞれが関数であるかを尋ねる調査をし，その判断の際に，関数の定義に照らして判断するよりも，自分の知っているグラフの形状や式の形と似ている／似ていないこ

とを理由として判断する傾向を見出している。Zandieh & Knapp（2006）は高校生の導関数の理解についてインタビュー調査を行った結果を通して，導関数のある側面に焦点を当てた理解が有効に働く場合もあれば問題ある仕方で働く場合もあることを示しているが，関数についても，概念イメージのような定義とは異なる理解が一概に不適切とは言えない。しかし，こうした研究では，定義からすれば関数と言えるものを生徒が関数として認識できないということを示し，生徒の関数の理解が教科書の定義よりも狭いものに留まっている点を指摘することが多い[3)]。

なお前節で引用した板垣（2000）は，一般的な関数の概念を指導することが「はたして，比例関数の理解といわずとも，一次関数，二次関数の学習に役立つであろうか」（p.2）と疑問を呈している。そして「名詞の『関数』は，値がxから加減乗除で計算される，すなわち代数式で書かれる関数のみを対象にしているときは無用」（p.4）であり，「関数値でなく関数は，すなわち$f(x)$のfは，いろいろな関数を表す$f(x)$が微分の対象とされたとき，言い換えると，微分演算の性質に注目点が行ったときに学習の対象になる」（p.4）べきだとしている。Vinner（1983）が調査で提示したグラフ（p.298）を見るとき，それほどの一般的な関数の概念が必要かについて議論の余地は確かにあろう。他方で，現行の教科書では例えば１次関数をある種の関数として定義し，その上で１次関数の様々な表現や性質を学習することを考えるならば，関数が表現や探究の対象として学習者に感じられているかを問うことは必要とも考えられる。

第２の視点としては，関数についての数学的知識の二重性（duality）がある。式やアルゴリズムをもとに変数の値ごとに計算をするという関数の捉え方は操作的であり，他方，関数自体をモノのように捉えることは構造的な捉え方であり，関数を順序対の集合とする捉え方はその典型的な例とされる（Sfard, 1992, p.68）。操作やプロセスをモノ化することはより効果的なコミュニケーションを可能にするとともに，関数自身が微積分など別の操作の対象となったり微分方程式などの方程式の解となったりするので，新たなディスコースを可能とする（Sfard, 2008）。こうした枠組みの中で，生徒の理解が操作的な理解に留まり，構造的な理解に至っていないとの指摘がなされてきた（例えばSfard, 1992）。また，構造的な理解を促す指導のあり方についても論じられてきており，Slavit（1994，1997）は関数の諸性質を認識することが，性質のもとにあるはずの数学的な実体として関数の構造的な捉え方を促すと述べるとともに，グラフ電卓の利用がそうした認識を促すとしている。さらにこの視点から授業の分析も行われている。日野（2008）は中学校２年生の１次関数の授業を分析し，操作的な捉え方が生徒の考え方の手がかりになっていること，教師は操作と構造のつながりを考える機会を作り出していたことを示している。Viirman（2013）は大学の講義における教師の説明の仕方を分析する際の１つの視点として，関数の捉え方の二重性を用いている。

中学校での学習に限定した場合には，微積分といった数学的な操作を関数に対して施すことはない。さらに，関数どうしの加減乗除や，Freudenthal（1983）が関数の重要な側面と見なす合成や逆を考えることもない[4)]ことからすると，それらの操作の対象となるように関数の構造的な捉え方を要求する必要はない。もちろん表現するとか探究するという操作の対象となることはあるが，これらの操作が日常的な場面で行われる場合を想起すると，必ずしも構造的な捉え方は必要とされない。Sfard（1992）が構造的な捉え方の成立に必要とする操作や過程の圧縮化，そしてモノ化（reify）がされていなくても，日常で生じる出来事や現象を記述したり探究することも可能である。そのように考えると，少なくとも関数を本稿で考えているような対象と捉えることは，二重性の議論における構造的な捉え方を必ずしも要求しない。何かを表そうとしている，何かを探究しているという感覚を学習者が持っていれば十分である。Sfard（1992）は同義語して使われることもあるobjectとentityとを区別し，entityは「統合された全体」として情報を扱う方法であり，objectは存在論的なメッセージを含むとしている。この区別を借りるならば，まず生徒にとって関数がentityとして成立しているのかを問うことができ，したがって二重性の議論とは異なる問い方が可能であろう。

以上のように，関数が表現や探究の対象として成立しているかという問いは，関数についての生徒の理解に関わる先行研究における問題意識とは異なる問いである。他方で，例えば山岸（2009）が中学校２年生６名に行ったインタビュー調査の結果は，本稿の問いの必要性を示唆するものとなっている。この調査では質問の１つにおいて中学生が「『関数』をどのように捉えているか」を調べたが，これに対し，１名だけが「２つの変数のxとyがともなって変わる，２つの間の関係の数のこと」と答えたものの，残りの５名は「関数がどういうものかは『わからない』と回答」したと報告している。またこれまでどういうものを関数と呼んでいたか尋ねると，５名全員が式をもとに答えたとしている。上田（2009）は自身の中学校教師としての経験から「生徒は関数の学習に対して『訳が分からない』『何をしているのか，何のためにしているのか分からない』『得体のしれないもの』などの感覚を持っていることが少なくない」（p.41）と述べている。こうした中学生の様子を見ると，関数の学習のどこでつまずいているかを問う以前に，関数が取り組むべき対象として生徒に捉えられているかを問う必要があると考えられる。

こうした問いは，中学校の他の学習内容である文字式や幾何学的図形に比べ，関数が独自の難しさを持つことを示

唆する。それへの対応の１つとして，ブラックボックス（遠山，1972）あるいは関数マシン（Freudenthal, 1983; Tall et al., 2000）という図式の利用がある。Tall et al.（2000）は，ブラックボックスのような表現が，関数の対象物的な身分とプロセス的側面の両方を具体化しているとし，糸井と小林（1996）は，ブラックボックスにより，「関数という目に見えない対象」について生徒が「正確にその本質を捉えること」ができると指摘している（p.121)。こうしたブラックボックスによる表現は，いわゆる現代化の時期には，教科書でも採り入れられていた。

しかし関数のような数学的対象が抽象的でディスコース的な対象（Sfard, 2008）であり[5)]，数学的対象の意味は，その対象が一定の役割を演じるような実践のシステムの点から思い描かれる（Godino et al., 2011）とするならば，学習場面において関数についてどのような語り方がされ，どのような役割が与えられるかにより，生徒の関数の捉え方は影響を受けると考えられる。そこで次節では，中学校で用いられる教科書において，関数についてどのような語り方がなされているかを，関数が表現や探究の対象として成立しやすいかという点から検討を行う。

3　教科書における「関数」に関わる語り方

前節で引用した山岸（2009）は，前述の結果が生じた原因として，（平成10年告示の学習指導要領に基づく教科書についてではあるが）教科書の構成をあげている。関数の定義を１次関数の導入で行った後は，「式，表，グラフの扱いについての内容が多く，生徒が関数の定義を意識する場面はほとんどない」ため，「生徒に一次関数の表現・処理の能力は身につくが，関数がどういうものであるかということを意識しないまま学習が進行する」（p.42）と指摘している。教科書の構成だけでなく，教科書が関数をどのようなものとして記述しているか，いわば関数についての教科書の語り方が影響するとの考え方もある。Fontら（2010）は，数学の授業で教師や教科書によって対象のメタファーが用いられること，すなわち数学的存在物（mathematical entities）を物理的な対象のように考える語り方がされることに着目している。そして，「関数 $f(x)=1/x$ が与えられたとき…」のように数学的対象をある表現と同一視することがある一方で，関数が式や表，グラフで表現できると説明するときのように，対象と表現を区別することもあると指摘する。そして，後者のようなディスコースが数学的対象の存在をその表現とは独立な何かとして考えることにつながると述べている。本節では，Fontら（2010）の指摘や前節最後で触れた「関数」がどのような役割を与えられているかを視点として，教科書の語り方を分析し，生徒が関数を対象として捉えることにつながりやすいかを考察する。

3.1 「関数」の定義に関わる語り方

中学校の教科書における関数の定義の仕方は，時代によって変化している（中西，2000)。現行の学習指導要領（平成20年告示）に基づく教科書では，中学校１年生で関数の定義を扱い，中学校２年生，３年生ではそれを用いて１次関数，２乗に比例する関数を定義している。そこでまず，１年生で関数がどのように定義されているのかを検討する。なお以下の議論では，３社の教科書（以下Ａ社，Ｂ社，Ｃ社と記述する[6)]）を中心に分析を行う。

3.1.1 「関数」の定義の仕方

Ａ社の場合，中学校１年生の「比例と反比例」という単元の第１節が「関数」であり，そこで次のように関数が定義されている：「ともなって変わる２つの変数x，yがあって，xの値を決めると，それに対応するyの値がただ１つ決まるとき，yはxの関数であるという」。Ｃ社では最初の部分が「ある量とそれにともなって変化する他の量があり，それぞれを変数x，yで表す。」となっているが，定義後半はＡ社と同様である。Ｂ社は章の題名が「変化と対応」であるが，定義の仕方はＡ社と同様である。この定義においては「yはxの関数である」と表現され，yが関数である，あるいはyが関数という属性を持つとして語られている。林（2010）は，ライプニッツの使用したfunctioという用語に対して「関連量」という訳を与え，その理由として，曲線の接線・法線によって生じる切片といった「曲線とパッケージにして現れる数学的量」を示すのに用いられていたからだと説明している。もちろん上述の教科書の定義においてはそうした切片ではなく，変化する水の深さなどを表す変数を扱っているが，他方でyという一方の変数を関数と呼んでいるという意味では，xに対応した関連量を関数としていると捉えることができよう。つまり，前節まで議論してきた意味での関数領域における学習の対象は，関連量である変数yと考えられる。

しかし，こうした対象の設定の仕方が唯一のものではない。実際，いわゆる数学教育の現代化がわが国でも行われていた時期には，上述のものとは異なる関数の定義が用いられていた。例えばＡ社の当時の教科書では次のように関数を定義していた：「２つの集合Ａ，Ｂがあって，Ａのどの要素xに対しても，Ｂの要素yをただ１つだけ対応させることができるとき，この対応のきまりをＡからＢへの関数という」（１年p.107)。Ｂ社は「この対応を，集合Ｘか

ら集合Ｙへの関数という」（１年p.109）と定義し，Ｃ社はＢ社と同様に定義した上で，さらに「すなわち，関数とは，集合Ｘから集合Ｙへの一意対応にほかならない」（１年p.118）と補足している。これらの定義では，対応自体あるいは対応のきまりを関数と呼んでおり，学習の対象は対応だということになる。確かにこれらの定義に続いて，「このとき，yはxの関数であるともいう」（Ａ社１年p.107）として，現行の定義と同様の表現も導入している[7]。しかしまずは，対応あるいは対応のきまりを関数として定義をしていた。

こうした定義は，教師向けの解説書にも反映されている。例えば阿部ほか（1978）では，次の３つの定義を提示している：「［定義１］伴って変わる二つの数量xとyとがあって，xの値が変わればそれに対応してyの値が変わるとき，yはxの関数であるという」；「［定義２］二つの変数x，yがあって，xの値をきめると，それに対応してyの値が一つきまるとき，yをxの関数という」；「［定義３］二つの集合Ｘ，Ｙがあって，Ｘのどの要素xに対しても，Ｙの要素yが一つずつ対応するとき，その対応のことを集合Ｘから集合Ｙへの関数という」（p.65）。そして，定義２では値を表す文字yをxの関数と呼ぶのに対し，定義３ではある規則によって得られる対応自体を関数と名付けていると特徴づけ（p.66），２つの理由から定義３の方がよいと述べている（p.67）。竹内（1970）によれば，関数概念には対応としての関数の見方と変数としての関数の見方の両方が含まれているとする見解は，以前からなされていたとされる（p.27）。

現代化期の教科書では，この対応である関数を対象とするための図式化も行われていた。Ａ社では，上述の関数マシンの図が関数を表す図式として提示されている。またＣ社では下図のような図式を用いると関数がわかりやすいとして紹介し，一部の練習問題でも用いている。Ｂ社も，「この関数は，$n \to n-3$で示される」という提示をしている（１年p.110）。これらは関数に当たる対応を箱や矢印として実体化し，対象として捉えやすくする試みと見ることができる。現行の教科書のうちＣ社では図１と同様の図が導入部で１箇所見られるが，他社には見られない。

$$x \xrightarrow{\text{0.2倍して20を加える}} y$$

図１

対応を関数とする定義は，２つの集合をもとに述べられていた。したがって，現代化期には中学校１年で集合の学習を詳しくしていたものが，現行では「整数の集合」といった表現の中で「集合」が出てくるだけなので，上のような定義になったと考えることもできる。しかし，現行の教科書の定義でも「それに対応するyの値」と「対応」という用語が用いられている。また現代化期の他社の教科書では，対応に関わる小単元では集合を用いているものの，関数の定義は次のように集合に触れずに行われている：「２つの変数x，yがあって，xの値が決まればyの値がただ１つに決まるとき，このxとyの対応の規則を関数という」（河口ら，1971，１年p.110）。現代化期のＡ社の教科書でも上述のように，定義の後段部分は「この対応のきまりをＡからＢへの関数という」と「集合」を含む記述にはなっていない。これらを考えると，現行の教科書でも「対応が関数」との記述も可能であろうが，そうはせずに，「yはxの関数である」という定義の仕方を選択しているのだと考えられる。

3.1.2　規定の語り方

２つの定義は，数学的にはどちらも考えられる。Mac Lane（1986）は，正式なものではないとしながらも，次の定義は好ましい一般性を持つとしている[8]：「変数xのそれぞれの値に対して変数yの対応する値を与えるような規則が存在するとき，変数yは変数xの関数である（the variable y is a function of the variable x）」（p.127）。Freudenthal（1983）は，関数は従属と独立が区別された変数間の依存関係という特別な依存関係のことであるとし（p.496），表やグラフは「独立変数と従属変数の間の結びつきを記述する直接的なパターン」あるいは装置（device）とする（p.498）。ただし，「…の関数としての…」という表現も多用しており（p.499），２つの語り方が併存している。

他方で，語り方という点では，２つの定義で違いがある。「この対応のきまりをＡからＢへの関数という」に見られる「～を～という」という語り方は，それまでの算数・数学の学習で定義の際にも用いられている。しかし「～とき，yはxの関数であるという」という語り方，つまり，２変数間に成り立つ条件を挙げた上で，それが成り立つときに「yはxの関数である」と表現すると述べる定義は，学習者には見慣れないものと考えられる。そして，この語り方は，それまでの学習で定義に使われている表現に比べて，学習の対象を特定しづらい表現になっている。

関数の定義以前に学習する内容をＡ社の教科書を例として見てみると，負の数については「０より小さい数を負の数という」，文字式については「文字を使って表した式を文字式という」，方程式については「xの値によって成り立ったり成り立たなかったりする等式を，xについての方程式という」と，「ＡをＢという」という語り方により定義されている。これにより「Ａを」で特定されるＡが新たに導入された学習の対象であり，それを今後はＢと呼ぶことが明確になっている。しかし関数については「～とき，yをxの関数という」という表現にはなっていない。

また，関数の定義では上位概念を用いた語り方になっていない。負の数や文字式の定義では数，式という上位概念を用い，そのうちの一定の特徴を持ったものとして新たな対象を定義している。現代化期の教科書は，対応を上位概念として用いることで，同様の定義を可能にしているが，現行の教科書ではそのような語り方をしていない。確かに，数や式も明確に定義されていない。しかし，数については，小学校１年の最初から数を用いる多様な活動をしてきており，数という「高度な抽象は，徐々にそしてスムーズに行われ，学校教育を通して，ゆるぎない理解に至る」（糸井と小林，1996，p.134）。同様に，式についても定義はされないものの，小学校１年で「しき　３＋２＝５」などとして提示され，小学校３年でことばや□を使った式が，６年では文字の入った式が導入される。その際も式とは何かは説明されないが，式については「しきをかきましょう」という式を対象とした操作が多くの場面で見られる。適当な式を実際に書くという実践を行うことになり，自分が「式」を適切に理解しているのかを検討する機会が得られる。また，「５＋３のしきになるもんだいをつくりましょう」といった実践では，「５＋３」が式の具体的な事例であることが経験され，与えられた場面の様子を式に表すという実践では，場面のある種の情報を表現するために用いるものとして式を経験できる。式は「言葉を，数字，文字，記号を用いて表したもの」（一松，1979）なので，式自体が目に見え，式自体を書いたり表現で用いることが可能である。そのため，上述のような形で式という対象を理解することができるとも言えよう。

関数の場合，現代化期の教科書を参考にして定義で用いる上位概念を求めるとすれば，対応ということになる[9]。しかし現行の教科書では，Ｃ社が問いの中で対応について触れている以外は，関数の定義の前で対応を学ぶ場面は設定されていない。また，小学校の教科書でも，５～６年生の図形の学習（合同，対称，拡大図と縮図）で対応する要素について触れたり，６年生の比例と反比例の学習で，xの値に対して「それに対応するyの値」という形で現れたりしてはいるものの，数や式とは異なり，対応自体について活動を行うという経験はないため，関数を定義する際に上位概念として用いることは難しいと考えられる。確かに中学校２年，３年では関数を上位概念として１次関数や２乗に比例する関数を定義している。しかし，そこで問われるべきは，定義をする時点で，定義に使える程度まで関数が生徒に受容されているかということである。そして，山岸（2009）が指摘するように「式，表，グラフの扱いについての内容が多く」「関数がどういうものであるかということを意識しないまま学習が進行する」（p.42）とすれば，１年での定義と同じ問題はその後も続く可能性がある。ちなみに，現代化期の教科書の場合，Ｂ社とＣ社では２年生の１次関数の単元冒頭で対応を関数というとする定義を復習し，Ａ社では明確な復習はしないものの，いくつかの具体例を示して「対応のきまりが，関数であると考えられるものはどれか」を考える問いから始めている。

以上のように，関数の定義は，その語り方の特殊性と，定義の中で用いることのできる上位概念の不在によって，中学生にとって新たな対象を把握しにくい語り方になっている可能性があると考えられる。

3.1.3　関数関係と関数

学習指導要領解説（文部科学省，2008）の関数の導入部に関わる記述では「関数関係」について定義されている：「関数関係とは，関係する二つの数量について，一方の値を決めれば他方の値がただ一つ決まるような関係を意味している」（p.73）。その上で，「二つの数量の関係について，『…と…は関数関係にある』，『…は…の関数である』などという表現を用いてとらえ，変化や対応の様子に注目して関数関係についての理解を深める」（p.73）と述べられている。ここでの語り方だけを考えると，日常で接する「～関係」という言い方と，少し異なる特徴を持っている。例えば，「ＡとＢは親子関係にある」というときには，「ＡはＢの親である」「ＢはＡの子である」と言い換えることができ，「関係」の前の２文字はその関係ある２つの要素を表している。これは「師弟関係」「因果関係」などでも同様である。

これに対し，関数関係と関数については，「xとyは関数関係にある」と表現できる一方で，「yはxの関数である」とも表現でき，両者で同じ「関数」という用語が用いられ，日常で接する「～関係」とは異なっている。したがって，上述の関数を対象として捉えにくい語り方の問題は，関数関係という表現の導入だけでは解消しないと考えられる。

3.2　「関数」についての実践に関わる語り方

前節でも述べたように，数学的対象の意味が，その対象が一定の役割を演じるような実践のシステムの点から思い描かれる（Godino et al., 2011）とするならば，関数の学習のディスコースにおける実践，つまり関数に関わる活動も，関数がどのようなものかの理解を深める機会と考えられる。そこで以下では，関数の単元で主として扱われる活動として式で表すこととグラフに表すことを取りあげ，その中での関数に関わる語り方を検討していく。

3.2.1　式が関わる実践

式についてはFontら（2010）が指摘するように，関数を式で表すとする語り方がされる一方で，「関数$y=3x+10$」

のように関数と式を同一視するような語り方もされる。こうした語り方の混在は，式と関数との関係を曖昧にし，関数がどのようなものかを捉えにくくする可能性がある。式についてはさらに，定義との関係で次のような点も見られる。

中学校の関数に関わる学習では，扱われる関数が次のように式で定義されることから，式が関数の基本的な表現として用いられる：「yがxの関数で，$y=3x+10$のように，yがxの１次式で表されるとき，yはxの１次関数であるという」（A社２年）；「yがxの関数で，$y=ax^2$と表されるとき，yはxの２乗に比例するという」（C社３年）。ここでyがxの式で表されることを，その式により対応するyを決めると解釈すれば，上述の関数の定義とのつながりは捉えやすいが，そうでないと，xの値に「対応するyの値がただ１つ決まる」ことは直接は見えにくい。他方，変数の関係として定義をする場合も見られる：「yがxの関数で，その間の関係が　$y=ax$　aは定数　で表されるとき，yはxに比例するといいます」（B社１年）；「yがxの関数で，xとyの間に $y=ax^2$ の関係が成り立つとき，yはxの２乗に比例するという」（A社３年）。また「yがxの式で表される」という語り方をする場面でも，その直前の活動では「yとxの関係は次の式で表すことができる」「yとxの関係は次のように表される」という語り方も見られる。このとき定義とのつながりを考えるには，それぞれのxの値に対応してyの値が決まっていること，またそれらx，yの全てのペアで同じ関係が成り立っていることを補って読む必要がある。つまり，式が関数をどのように表しているのか，あるいは式の中に関数はどのように表されているのかは，直接は見えにくい語り方と言えよう。

このことは，等号の意味にも関わっている。方程式の学習を中心に文字式を等号でつなぐことは行われるが，等号の意味としては，「等号を計算の過程を表す記号としてではなく相等関係を表す記号として用いる」（文部科学省，2008，p.61）ことに注意が向けられる。関数での$y=3x+10$といった式は，２つの変数の間の相等関係ということになる。そこには上でも触れたように，まずは各xに対して対応するyが１つ決まること，そしてその全てのペアに対して式で表される相等関係が成り立つことという意味が含まれている。その意味を，前後の関係から補わないと，等号を含む式についての語り方と，関数の定義とのつながりは見えにくくなる。もちろん，等号を左辺が右辺の式によって決まると解釈することも可能であるが，そうした等号の意味は計算過程でも相等関係でもないので，生徒には理解しにくいことも考えられる。以上の点が不明確なまま「$y=$」の形の式で関数について語ることは，式に関わる実践を通して，関数がどのようなものかを生徒が捉え直し，対象とすることを難しくする可能性があろう。

式に関わっては，さらに，他の活動の中で式が用いられる際の次のような語り方も，関数がどのようなものかを捉えにくくする可能性を持つ：「関数$y=2x$では，xの値が１増加すると，yの値はどのように変化しますか」（A社１年）；「一次関数$y=2x+1$で，対応するx，yの値を求めると次の表のようになります」（B社２年）；「１次関数$y=4x+20$で，xの値が２から５まで増加したときのxとyの値の変化を調べてみよう」（C社２年）。格助詞「で」は「動作の行われる所・時・場合を示す」とされるが，だとすると上のような語り方では，それぞれの関数は，変数y自身を指すというよりも，xとyが含まれる場に当たるように読める。つまり，yが関数という定義に見られた語り方とは異なってきている。

3.2.2　グラフが関わる実践

A社は１年の比例のグラフの学習でまず表を提示し，「表の対応するx，yの値」をそれぞれx座標，y座標とする点を図にかき入れさせる。そして，こうした点の集合として得られる「直線が，関数$y=2x$のグラフである」と説明している。反比例でも同様の活動を通して，「この曲線が，関数$y=6/x$のグラフである」としている。２年の１次関数の学習でも，同様にして得られた直線に対して，「この直線が，１次関数$y=2x+3$のグラフである」とし，その後，これが「$y=2x$のグラフをy軸の正の向きに３だけ平行移動した直線である」こと，「１次関数$y=ax+b$のグラフの傾きぐあいは，変化の割合によって決まる」ことを確かめている。３年の関数$y=ax^2$の学習でも同様にして得られる曲線に対して「関数$y=ax^2$のグラフは，次の図のような，なめらかな曲線となる」としている。その後，aの値の正負，あるいはその絶対値の大きさによりグラフがどう変わるかを調べ，曲線$y=ax^2$のグラフの特徴としてまとめている。これらの学習においては，「この直線（曲線）が関数～のグラフである」という語り方がなされるが，グラフがそれぞれの関数をどのように表しているのか，あるいはグラフのどこに関数が現れているのかを話題とするような語り方はされていない。Sfard（2008）は，視覚的媒介物について走査（scan）過程を明確にすることがコミュニケーションを改善することを指摘している（p.154）。上のことは，グラフをどう見ると以前に定義された関数が見えるのかは，グラフの学習ではあまり語られないことを示している。

A社，B社，C社ともに，小学校６年の比例と反比例の学習においては，「２つの量の関係を表すグラフ」，「xとyの関係を表すグラフ」という語り方が見られる。ここでは，グラフがある種の関係を表すものとして語られている。関数の定義をもとに考え，またグラフが関数の１つの表現であるならば，「変数xの値を決めると，それに対応する変数yの値がただ１つ決まる」様子を表したものとしてグラフを語ることもできる。それにより，関数の定義とグラ

フとの関わりが明確となり，グラフが，関数がどのようなものかを理解する手がかりになりやすい。確かに教科書でも，最初に表を作る段階で，各 x に対応する y の値を求める作業が行われるが，グラフの作成においては x と y の値の組を平面上の座標とみなしてプロットするという間接的な過程（Janvier, 1987）が行われるため，グラフ上では y が x に対応して決まるという側面が希薄となる可能性がある。関数を表現する対象として既に捉えている生徒にとっては，関数を表す式から出発してグラフを作成したことで，得られた直線や曲線が関数の表現であると理解することができるかもしれないが，他方で，関数を対象としてまだ捉えられていない生徒が，グラフに関わる実践を通して関数がどのようなものかの理解を深めやすい語り方にはなっていない。グラフを通して理解を深めることは，作図ツールなどのソフトウェアを利用して行うこともできよう（布川，2010）が，上述の語り方の点から検討することも必要であろう。

１次関数のグラフについては，比例のグラフを平行移動したものと考える必要から，次の語り方がされる：「２つの１次関数 $y=2x$ と $y=2x+3$ のグラフを比べてみよう」。関数が対応のさせ方であれば，$y=2x$ と $y=2x+3$ で同じ y を使っていても，対応のさせ方は異なるので問題はない。しかし「y が『x の関数』」という捉え方をすると，１つの問題中に２つの関数が現れるにもかかわらず，y_1 と y_2 のような形で区別されず，２つの関数が同じ文字で表現されていることになる。つまり，「y が『x の関数』」という語り方と，ここでの語り方とで齟齬をきたす可能性がある。これは３年の学習において，１つの課題で２つ以上の関数のグラフを比較するという実践でも同様である。

１次関数の学習では，与えられたグラフから関数の式を求めることも扱われる。このとき提示される図では，傾きが見やすいように，直線に接した直角三角形が描かれることが多い。これは，x 軸方向に増加した量と y 軸方向に増加した量を明示することになるが，他方では変数 x，y を示すであろう x 軸上，y 軸上での変化は直接示されないことになる。いわば，変数 y が x により決まっていく様子は背景に退いている。したがって，関数を十分に対象として捉えていない生徒が，この実践を通して関数がどのようなものかを捉えることは難しいと考えられる。こうした傾向は，グラフの傾きが式 $y=ax+b$ の a に対応することを考える実践，与えられた式からグラフをかく実践においても見られる。

他方で，グラフをもとに x の変域に対応する y の変域を考える実践では，変数 x，y の変化と両者の対応に焦点を当てた図が提示されており，「$-2 \leqq x \leqq 4$ のとき，y の値は０から４まで増加する」として x の変化により y の変化がきまるという語り方がされている。つまり，定義に基づく形で，関数がどのようなものかの理解を深める可能性が，この実践にはあると考えられる。ただし，この場合でも，１次関数 $y=-2x+2$ について「y の変域を求めなさい」となっているが，「y が『x の関数』」であるならば，「関数の変域」を求める実践として語るという選択肢もあると考えられる。

4　語り方の改善

本稿は，どのような定義がよいかを考えるものではなく，定義を含めて，関数についての語り方に整合性を持たせることで，生徒の学習における負担を少なくすることを意図している。そうした方向性に沿うと，２つの改善の可能性が考えられる。

第一は，定義から始まり，関数が一定の役割を果たす各種の実践に参加する中で，関数がどのようなものかについての理解を生徒が徐々に深め，表現したり探求したりする対象として感得できるように，全体の記述を改善していくことである。生徒が読んだり聞いたりしたときに，最初の定義での関数の語り方と整合するように，後の実践での語り方をそろえることは，ひとつの改善の仕方と考えられる。東京都中学校数学教育研究会研究部関数委員会（2012）が述べるように，「y は x の関数である」という定義を採用するとしながらも，同時に，関数の理解を深める指導を行うことで，対応に基づく定義が理解できる生徒を育てるという立場を採る（p.17）とすれば，その移行を含めて関数に対する語り方を意図的に計画する必要があろう。

第二は，少なくとも中学校のある時期までは，関数を表したり，探究したりする対象とはしないという形での改善の仕方である。これは，板垣（2000）が指摘するような，関数を解決で用いる考え方として捉えるという立場に近いであろう。すなわち「関数関係は，実世界，あるいは実事象のなかに探されるべきものとしての数理関係」を指し（板垣，2000，p.5），関数の単元ではそうした事象を探究する方法を学習すると考える。この場合には，関数を対象とするような語り方を避け，「関数」という用語は変数 y が別の変数 x により決まるという状態を表すものであり，グラフや式は関数を表すのではなく，そうした状態にある２変数の様子を表すものとして語ることになる。ただし，高校の微分や積分に見られるように，後の学習では，関数を対象とすることが構造的な捉え方まで含めて必要に

なるとすれば，そうした理解へと移行するための学習も意図的に計画する必要はある。

どちらの方向をとるにしろ，重要なのは語り方の一貫性に配慮することで，期待されているディスコースを初学者が捉えやすくし，Sfard（2008）が述べる，「他者のためのディスコース」として儀式的なルーチンに留まるのではなく，「自身のためのディスコース」として探究的なルーチンに移行できるようにすることである。彼女は，教授＝学習過程が効果的なものとなるための前提として，主導的なディスコースや期待されるディスコースの変化がどのようなものかについて，教師と生徒の間で捉え方が一致している必要があるとしている（p.283）が，教科書や教師の関数に関わる語り方に一貫性を持たせることは，何が主導的なディスコースか，どのようなディスコースの変化が期待されているのかに関わるメッセージを明確に出していくことにもなり，生徒がこれらを捉えやすくする一つの手立てと考えられる。

5　おわりに

本稿では関数の学習を支える大前提として，関数が表現したり探究したりする対象として生徒に受け止められているかを取り上げ，現行の中学校の教科書の語り方を，関数を対象として捉えやすくなっているかの観点から検討した。そして，それらの語り方の中に，関数がどのようなものかを生徒が捉えにくくする可能性のある語り方が見られること，つまり関数の学習というディスコースに生徒が参入しにくくなる可能性のあることを指摘した。そうした語り方の改善により，関数とはどのようなものかが生徒に捉えやすくなり，その結果，それぞれの実践が関数とどう関わっているのかが明確となることで，関数を表現したり探究したりすることが生徒にとってより自然な実践となることが期待される。大事なことは，関数の学習がどのようなディスコースなのかが生徒に理解しやすい語り方に，教科書や教師が注意を向けることである。

なお，中学校の関数の単元では，単元の後半で学習した関数を身のまわりの事象に利用するという実践が扱われる。本稿では紙幅の関係から，それに関わる語り方を取りあげることができなかった。その検討については別稿に譲りたい。

謝辞：本研究は科学研究費助成事業・基盤研究(C)（課題番号：25350190）の助成を受けて行われている。

注

1）教科科学・数学教育（明治図書）の2007年10月号。

2）本稿ではディスコースをSfard（2007）に従い次のように考える：「許される行為のレパートリーとそれらの行為に対応する反応の仕方により区別される独自のタイプのコミュニケーション」(p.297)。ディスコースはそれ自身の語彙や視覚的媒介物，ルーチン，認められる語り口（endorsed narrative）を持つとされる。

3）平成25年実施の全国学力・学習状況調査の数学Ａ９は，２量を含む５つの場面が示され，「yがxの関数であるもの」を選ぶ問題であった。そこでは，「整数xの絶対値y」を関数とすることが求められたが，正答率は13.8%であった。

4）後の議論で取りあげるいわゆる現代化の時期の教科書では，中学校３年生において逆関数を取りあげている。

5）数学的対象に関わりSfard（2008）は次のようにも述べている：「数学的対象は，感覚にアクセスするものではないと捉えられているにも関わらず，視覚的実現（realizations）の複雑な組み合わせである。[中略] １つの視覚的媒体ではこのディスコースを全体として実現するのは十分ではない。例えて言うならば，数学は視覚的実現自体の中にあるのではなく，視覚的実現の間の関係の中にある」(p.193)。本稿での問いは，この「間の関係」に何かあると中学生が感じることができるかどうかということである。

6）Ａ社は一松ら（2012），Ｂ社は岡本ら（2012），Ｃ社は藤井ら（2012）である。またこの後で触れる現代化期の教科書としてはＡ社では加藤ら（1976），Ｂ社では正田ら（1974），Ｃ社では彌永ら（1975）を用いた。

7）こうした表現を導入した意図は，Ｂ社の現代化期より前の教科書（正田ら，1968）に現れている。このときは１年生では関数という用語は現れず，２年生の１次関数を学習する直前に，次のような記述が見える：「２つの変数xとyがともなって変わるとき，xとyの間には，関数関係があるといい，その関係をyの値がxの値によってきまるとみたとき，yはxの関数であるという」(２年p.98)。つまりここでは関数関係を基本的に考えた上で，yがxにより決まるという特徴を強調するために「yはxの関数である」という表現を導入している。

8）ただし，Mac Lane（1986）は，対応規則や依存関係に基づく定義が一定の一般性を保証するとしながらも，対応などの用語が定義されていないためフォーマルな定義として受容できず，集合に基づく定義をすべきとしている。

9）大学レベルの学習を考えるならば，上位概念としては写像が選ばれるであろう。

引用文献

阿部浩一・出石隆・大野清四郎・古藤怜・中野昇．(編)．(1978)．新・中学校数学指導講座４：関数．金子書房．

Dogan-Dunlap, H. (2007). Reasoning with metaphors and constructing an understanding of the mathematical function concept. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo. (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 209-216). Seoul: PME.

Font, V., Godino, J. D., Planas, N., & Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and synecdoche in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics, 30* (1), 15-19.

Freudenthal, H. (1983). Functions. In H. Freudenthal, *Didactical phenomenology of mathematical structures* (pp. 491-578). Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing.

藤井斉亮ほか．(2012)．新しい数学１～３．東京書籍．

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77,* 247-265.

林　知宏．(2010)．パリ時代（1672-1676）のライプニッツ．数理解析研究所講究録，*1677*，165-176.

日野圭子．(2008)．一次関数の授業でみられた「操作的な考え」について：The Learner's Perspective Study 日本データの分析から．日本数学教育学会第41回数学教育論文発表会論文集，447-452.

一松信．(編著)．(1979)．新数学事典．大阪書籍．

一松信ほか．(2012)．中学校数学１～３．学校図書．

井上敬仁．(1995)．関数概念の形成に関する研究：中学生の関数に対する捉え方の調査を中心に．日本数学教育学会第28回数学教育論文発表会論文集，71-76.

板垣芳雄．(2000)．「関数概念」あるいは「関数の考え方」を教えるということについて：教育課程論・試論．日本数学教育学会第33回数学教育論文発表会論文集，1-6.

糸井尚子・小林順子．(1996)．算数・数学能力を育てる：子どもたちとの対話を通して．サイエンス社．

彌永昌吉ほか．(1975)．新訂新しい数学１年～３年．東京書籍．

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

加藤国雄ほか．(1976)．中学校数学１～３．学校図書．

河口商次ほか．(1971)．新版標準中学数学１．教育出版．

国立教育政策研究所．(2012)．全国学力・学習状況調査の４年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ・中学校編．教育出版．

熊倉啓之．(2003)．学ぶ意義を実感させる関数の指導に関する研究．日本数有学教育学会誌，*85* (11)，40-49.

Mac Lane, S. (1986). Functions, transformations, and groups. In S. Mac Lane, *Mathematics, form and function* (pp. 123-149). New York, NY: Springer.

湊三郎・浜田真．(1994)．プラトン的数学観は子供の主体的学習を保証するか：数学観と数学カリキュラム論との接点との存在．日本数学教育学会誌，*76* (3)，2-8.

文部科学省．(2008)．中学校学習指導要領解説数学編．教育出版．

中西正治．(2000)．学校数学における関数の定義についての史的考察：中学校数学を中心にして．近畿数学教育学会会誌，*13*，34-45.

布川和彦．(2005)．問題解決の研究と学習過程の探求：学習過程臨床という視点に向けて．日本数学教育学会誌，*87* (4)，22-34.

布川和彦．(2010)．数量関係の学習と背後の現象や共変性の意識化．上越数学教育研究，*25*，1-10.

岡本和夫ほか．(2012)．未来へひろがる数学１～３．新興出版社啓林館．

斎藤　憲．(2001)．全体論における数学観：数学的対象の存在とその正当化．哲学（北海道大学哲学会），*37*，21-38.

作元浩二・山本圭介・江口敬文・平岡賢治・宮内香織．(2012)．数学を活用することのよさや楽しさを実感できる授業研究．長崎大学教育実践総合センター紀要，*11*，53-61.

Schwarz, B., Dreyfus, T., & Bruckheimer, M. (1990). A model of the function concept in a three-fold representation. *Computer and Education, 14* (3), 249-262.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59-84). Mathematical Association of America.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* New York, NY:

Cambridge University Press.

正田健次郎ほか.（1968）．再訂中学新数学１～３．新興出版社啓林館.

正田健次郎ほか.（1974）．改訂数学１～３．新興出版社啓林館.

Slavit, D. (1994). *The effect of graphing calculators on students' conception of function.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 259-281.

竹内芳男.（1970）．関数・変数・変量．日本数学教育学会第５回数学教育研究論文発表会要項，25-30.

Tall, D., McGowen, M., & DeMarois, P. (2000). The function machine as a cognitive root for the function concept. In M. L. Fernadez (Ed.), *Proceedings of 22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 255-261). Tucson: Arizona.

田村知子・日野圭子.（2010）．関数における問題解決の授業：２次関数の表，式，グラフの関連付けを促すために．宇都宮大学教育学部教育実践総合センター紀要，*33*，55-62.

東京都中学校数学教育研究会研究部関数委員会.（編）.（2012）．中学校数学科・関数指導を極める．明治図書.

遠山　啓.（1972）．数学の学び方・教え方．岩波書店.

辻　宏子.（2007）．表・式・グラフに表現できる力を育てる指導．教育科学数学教育，*599*，4-7.

上田貴之.（2009）．関数の学習におけるグラフを利用したアプローチについて：中学２年「一次関数」の単元における影響についての一考察．上越数学教育研究，*24*，41-52.

Viirman, O. (2013). *Teaching functions at tertiary level: What is made possible to learn?* Paper presented at 8th Congress of European Research in Mathematics Education, Antalya, Turkey.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image, and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14* (3), 293-305.

山岸卓矢.（2009）．関数指導に関する研究：「二元一次方程式と一次関数」の指導を中心に．数学教育研究（新潟大学教育学部数学教室），*44*（1），34-47.

Zandieh, M. J. & Knapp, J. (2006). Exploring the role of metonymy in mathematical understanding and reasoning: The concept of derivative as an example. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 1-17.

Objectification of the Function Concept in Japanese Lower Secondary Mathematics

－Analysis of the Textbook Series－

Kazuhiko NUNOKAWA*

ABSTRACT

Seeing secondary students' difficulties in learning functions, it is unclear whether students really accept functions as objects to be represented and to be explored. Discourses constructed by textbooks and teachers can be considered one of the factors which influence students' making sense of and acceptance of the concept of functions as objects. The purpose of this paper is to examine some Japanese mathematics textbook series for lower secondary students focusing on such discourses.

After discussing the necessity of the question whether students really accept functions as objects to be represented and/or to be explored, the narratives used in textbooks to define the function concept and to invite students to activities involving algebraic and graphical representations of functions were examined focusing on how they talk about functions. The analysis showed that; (a) some features of the narratives used to define the function concepts can make it difficult for students to understand the meaning of "function"; (b) some inconsistencies between the narratives in definitions and those in invitations to activities can make it difficult for students to construct a consistent image of "functions." The paper also discussed the ways in which the narratives in textbooks can be improved in order to make more explicit for students the leading discourse and the expected discursive change.

* School Education