上越数学教育研究, 第 15 号, 上越教育大学数学教室, 2000 年,pp.121-132.

Cabriを使う個人に焦点をあてた活動分析の方向性と意義

上越教育大学大学院修士課程１年
福　沢　俊　之

1. はじめに

多くの生徒が図形の学習は難しいと感じ、論証指導が質的にも量的にも重要視されている中学校２年生、３年生はその傾向がさらに強くなっているといわれる。清水(1996)は、今の幾何教育における証明指導の問題点として、成り立つことを先に与えてしまうこと、作図の有効性を認めたとしても生徒にとって負担になっていることを挙げている。そこで清水は証明の１つの役割として、自分で見つけたこと、正しいと確認したことを「集団の中で伝える」ことを挙げ、「先に『自分で見つける』ことが大切な活動」であると述べている。そしてコンピュータの導入によって、作図の負担をなくし、効率的にさまざまな仮説を導くことや新しい発見をすることが可能になるとしている。また Balacheff(1996)は、コンピュータは直接的な経験を生徒に可能にし、認識論的な水準で学習者の数学的経験を変えることができるとしている。さらに飯島(1998)も数学的な概念に対する直接的な操作が可能になることを指摘している。すなわちコンピュータの導入によって、図形が直接操作でき、結果として生徒自身の探求活動も促進されること、試行錯誤を繰り返しながらの実験や観察を行い、図形の性質を発見する授業が容易になることが考えられる。

このような図形指導を実現するために、動的な図形ソフト「Cabri-Geometry」が有効である。しかし Cabri を使うことがどのように証明をする生徒の助けになったり、図形の理解を深めることになるのかについては、より詳細に調べていく必要性が言われている(例えば Goldenberg & Cuoco, 1998)。そこで本稿では、Cabri を使う学習者に焦点を当てて分析していく方向性について論ずる。

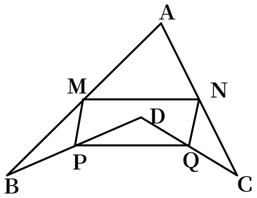
2. Cabriに関わる先行研究

清水(1999)は「中等教育における図形指導において一番実現して欲しいこと」として、「観察や実験を通して、図形の性質を理解したり、定理の意味を理解したりすること、さらには生徒自らが図形の性質を発見したり、定理を発見したりするような図形の学習が、動的図形ソフトを利用することで、数多くの生徒に可能になる」ことをあげている(p.127)。さらに 2002 年からの指導要領における論理的な思考力の育成についてふれ､「観察・実験から始まる図形学習」「証明と観察・実験が一対となった図形学習」が目指されているものであるとしている。そして Cabri が、そうした活動を支援する有効な手段になることが期待されている。

2.1. 垣花 ·清水らの研究

垣花ら(垣花,　清水,1994,1995;　垣花ほか,1993)は Cabri を証明問題に使用した場合の生徒の活動、特に「測定値」と「動的な扱い」を利用する意義を明らかにすることを目的として研究を行っている。使用した課題例は次の通りである(垣花, 清水,1995)。

問題：右の図で、線分 AB、AC、DB、DC の中点を、それぞれ M、N、P、Q とすると四角形 MNPQ(ﾏﾏ)はどんな四角形になっているでしょう。（ファイルの「開く」で MONDAI1 を呼び出して調べてください）



この問題を Cabri を使って解かせた。その結果、生徒は測定機能を用いて次のような証明を書き、平行四辺形と答えている。

生徒の証明

MP=NQ=3.2、MN=PQ=2.0

測定した値から二組の対辺がそれぞれ等しい

このとき生徒は与えられた凹の四角形だけでなく凸の四角形、点 D が辺 BC 上にある場合についても測定し、変形している。さらに垣花・清水らは「日頃『証明しなさい』という問題に手をつけない生徒が、平行四辺形をいうために『測定値から』と理由をつけて、納得している。」と述べ、同時に中学校教師には受け入れられない結果であることも報告している。この実験は生徒が図形を直接扱い、観察・実験を通して論証・証明へとつながるプロセスを示しているが、今後の課題として「『測定値』を利用した活動（帰納的な活動）を演繹的な活動へどのように進めるべきか」「中学生の多くが図形の証明に困難を感じていることを考慮すると、演繹的な証明のみが中学生に指導されるべきなのだろうか」という点を挙げている。

また垣花・清水は(1997)は、同様の課題を短大生に実施している。

問題：四角形 ABCD を作図し、それぞれの中点を結んでできる四角形 PQRS はどんな四角形になるか予想しなさい。なぜそうなるのか説明しなさい。さらに、証明を形式的に書いてください。

その結果、「実験・観察を通して、探求活動し、自分で気がついたことについてその理由を説明することを目的とした証明活動が非常に活発に行われる」(p.384)ことを報告している。

2.2. 原田の研究

原田(1997)は「幾何の証明問題の図形を Cabri によって作図する活動が、推論的活動を精密にし証明問題の解決を援助するという仮説の実証」をねらい、その準備として「証明問題の図形の Cabri による作図活動について、生徒の推論的活動の特徴を調査によって明らかにすること」を目指している。

問題：△ ABC で、点 M は辺 BC の中点、点 P は AM 上の点である。点 P を通り AB に平行な直線が BC と交わる点を S とする。また、点 P を通り AC に平行な直線が BC と交わる点を R とする。これをカブリによって作図して、点 S と点 R がどのような関係にあるかを予想して、答えなさい。

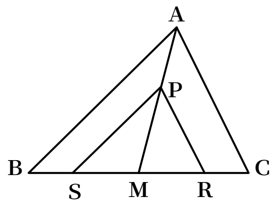


図 1

原田はこのような課題を提示し、生徒の作図活動やそのプロセスを細かく記述しながら、いくつかの推論的活動とその分析を記述している。例えば「作図の妥当性の確認」における推論的活動の特徴として、「図形の頂点」を引っぱることによる作図の妥当性の確認と「図形上の点」を引っぱることによる作図の妥当性の確認を挙げている。この２つの特徴について、図１をもとに説明する。

「図形の頂点」による作図の妥当性の確認とは、三角形の頂点を引っぱる場合に当たる。このとき図形の変形に対して、AB と PS、AC と PR の平行性を保存するという認識をもって実行されることになる。「図形上の点」による作図の妥当性の確認とは、点 P を引っぱる場合に当たる。点 P は線分 PM 上の任意の点であることとその点に基づいて平行線が作図されているという認識をもって実行されることになる。こうした認識を画面上で確認することが、作図の妥当性の確認になる。この２つの推論的活動の特徴について原田は、後者よりも前者の方が生徒にとって容易であ

ったことを述べている。このようにその中で働いている推論的活動の特徴を分類し、これらをふまえた証明活動を支援するような作図の指導法の開発を今後の課題としている。

2.3. 川上の研究

川上(1999)は図形学習の困難さを「与えられた命題を証明することに重点が置かれ過ぎていること」を原因の一つとした上で、探求活動を通して課題への興味関心を高めることにより、論理的な推論への意欲を高めることができるとしている。探求活動を支援するものとして Cabri を用いて、次のような実験授業を報告している。

問題：カブリを使って、外接円・内接円を作図しよう。

この課題を Cabri を用いて作図させ、完成した図から性質や関係を見つける実践である。生徒の反応例として、

ｱ　外心の位置を三角形（鋭角、鈍角、直角）によって分類した。その際に測定値が機能した。

ｲ　内心と外心を１つの三角形に作図し、２点が一致する点を探し、その三角形が正三角形であることに気づいた。

ｳ　内接円の性質を既知として、測定機能を使いながら円周角の定理を発見したグループがあった。

この実験授業からの成果として「図形を動かしていく過程で、今まで気づかなかった新たな発見ができる」「試行錯誤を通して、数学的な見方や考え方ができるようになる」(p.115)ことが挙げられている。また課題として川上は「作図ツールを幅広く数学教育に導入するためには、作図ツールを用いて図形を動的にとらえる能力が、コンピュータを使わない場面にも転移し得るのか否かを検証する必要がある」(p.116)としている。

3. 個人とコンピュータとのつながり

Cabri をはじめとするコンピュータを用いた数学教育の研究が進み、前節で見たように一定の成果をあげている中で、個人とコンピュータのつながりにも注目すべきとの指摘も見られる。

3.1. personal view

Norman(1996)は、道具（artifact）を使って課題（task）に取り組んでいる人間の捉え方には２つの見方、system view と personal view があるとしている。system view とは、認知的な能力に関して人間＋道具の組み合わせというシステムが人間単独の場合に比べてどれほどすぐれているかという見方であり、システムとしての能力は拡張されることになる。また personal view とは、道具が個人にどのような影響を与えるかという見方であり、道具が個人の能力を向上させるわけではなく、課題を変えるとしている。清水(1993)はコンピュータが人間と数学の問題の間に入って果たす役割を分析する中で、この視点をもとに「シュミレーションや問題解決型のソフト、そしてコンピュータ教育環境等の効果が論じられる場合、多くは system view に立って人間の認知の能力の補助・増進が指摘されたきている。もしくは二つが混同して述べられてきている。しかし、個人にとって何が本当に伸びたのか、獲得されたのかを論じる場合には、personal view に立った分析が必要であると思われる。」(p.247)と述べている。つまり個人の目から見て、何が変わったのかが重視されているといえよう。

3.2. Balacheffらの指摘すること

Balacheff ら(1996)は、マイクロワールドの本質的な特徴を成すものとして、対象と行為を画面での現象に関係付ける現象学の分野を挙げ、その現象学の分野は「使う人の行為や決定の結果としてマイクロワールドが構成する、フィードバックの型を決定する」(p.471)としている。そして学習者がどんな数学を構成するかは、学習者自身が彼ら自身の活動を理解すること、そのときに現象学の分野やそれが与えるフィードバックの記述が必要にな

るとしている。具体的には、スクリーン上で見えるものは単なる知覚でなく解釈であるとして、目に見えることと解釈には差異があることを指摘している。そして「生徒を間違った方向に導いてしまうかもしれないようなスクリーン上の現象を注意深く調べることが［教師や研究者にとって］必要である。」(p.475)と述べている。

ここでさらに「現象学の分野」と「フィードバック」について Balacheff らの記述を紹介する。

Balacheff らはコンピュータを用いている生徒の知識は、知覚と解釈の相互作用的な関係から発生するものであり、教授学的な制約によって変換されるのと同様にコンピュータの制約によって変換させられるとしている。すなわち生徒が画面上にあるものをどのように捉えているかはテクノロジーの教育的な可能性をも決めるものであるとしている。例えば生徒が数学学習には関係のない画面上で起こっていることに焦点を当てる可能性もあるわけであるが、そのような困難に打ち勝つための答えの１つとして Balacheff らは起こりうる学習とその文脈との関係への理解を指摘している。

また Balacheff らは、機械が教授することを考えたとき「適切なフィードバックを生むために、インターフェイスで実行された生徒の行為を解釈しなければならない」(p.484)と述べている。しかし生徒の行為は必ずしも教師や研究者らの期待したものとは限らない。そこで期待された行為と実際の行為のギャップが重要なものであるかどうかを決定しなければならないが、そのときに必要なのがその生徒の行為を解釈することであるとしている。このギャップは生徒の学習環境への理解に関係したエラーであるかもしれないし、幾何学的な概念に関わるエラーかもしれない。Balacheff はこの困難な問題を生徒のモデリングとして紹介している。そして生徒のモデリングを作り適切なフィードバックを提供する研究での失敗は、生徒の理解の状態や捉え方に関する研究者の知識の欠乏の結果であると述べていることは興味深いことである。すなわち我々はシステムとしてのコンピュータにだけでなく、それを使う個人の活動にももっと注目すべきであるといえよう。

4. Cabriを使う個人に焦点を当てた最近の研究

4.1. Goldenberg&Cuocoの研究

Goldenberg ら(1999)はドラッグによって引き起こされた学習上の問題やその直接的な結果に焦点を当て、動的幾何学によって引き起こされる問題点を挙げている。

4.1.1. 生徒は動く表示をどのように知覚するのか。

画面に表示されたドラッグによる動きがどのように知覚されるかは、それがおかれている文脈に依存するとしている。例えば彼らの内省的な分析のみを基準としているが、線分 AB の端点 A をドラッグした場合、この点の変換のように見えるかもしれない。しかし点 B を通る垂線を作図した場合は、同じように点 A をドラッグしても回転運動のように見える。さらに線分 AB 上に点 C がある場合、拡大・縮小の変換が組み合わさったもののように感じるかもしれない。Goldenberg らは「実験や探求を重視したカリキュラムを計画することにおいて、我々は、生徒が実験から収集したことや生徒がその実験のどのような特徴に注意を向けるのかを、理解しなければならない」(p.352)と指摘している。

4.1.2. 生徒は自分の見ていることをどのように解釈するか

例えば△ ABC の辺 AB 上に点 D をとる。点 D を通り、辺 AC に平行な直線を引き、辺 BC との交点を E とする。ここで点 D を動しても、BD/BE は変わらない。このことが他の三角形でも成り立つのかどうかを調べるために、点 A を動かす。このときソフト

ウェアによっては BD/BA も変わらないのである。したがって生徒は後者の不変性も幾何学的事実として受け止めかねないことを彼らは指摘し、ソフトウェアのこうした振る舞いも意識しておく必要があること、さらに生徒は自分が見たものをどのように解釈するのかも明らかにしておく必要があることも指摘している。

4.1.3. 画面上の画像とは何か

例えば、たいていの人は三角形の図を三角形と考えて、多角形とは考えないであろう。しかし１ヶ所がくぼんだ不等辺の七角形の場合、七角形よりもむしろ任意の多角形と考える。しかし曲線とは考えない。これらは抽象化の水準の問題である。コンピュータで作図をするとき、点を取ることや線分、平行線、垂線を引くことをコマンドを通して明細に述べる。そして描かれた図はどのように動かしてもその対象物を保存しなければならない。我々は生徒の描いた図とそれを表示したもの、そしてそれを描くのに用いたコマンドとのつながりを、生徒がどのように捉えるのかを知らなければならないとしている。

4.1.4. 定義の再吟味 :四角形とは何か

四角形 ABCD の４辺の中点が順に結ばれている図を､生徒が調べている場面を考える。例えば点 D を辺 AB に向かって徐々に動かしたとき四角形 ABCD の形が変わるのだが、その途中には凹型の四角形や三角形、自ら交わる図形をも造り出す。しかし中点を結んでできる四角形は常に平行四辺形である。このような効果を生徒はどのように解釈をするのか。例えば三角形や自ら交わる図形も四角形として見るのだろうか。このように動的幾何学は生徒の持っている暗黙のカテゴリーの境界を、自分の意図とは無関係に破ることができる。Goldenberg らは、そのような機会を最大限利用し、しかも混乱の危険性を最小限にするためには、生徒がどのようにしてこのような矛盾を解決するのかを理解する必要があると述べている。また生徒が定義を洗練したり、その実際の性質についてより深く考える助けになる可能性もあるとしている。

Goldenberg らが上記の諸点を動的幾何学の背景にある考え方の分析の第一歩と述べているように、今後我々が動的幾何学の学習環境を幾何の学習に活用する際にはこれらの問題点を考えていく必要性があると思われる。

4.2. Mariotti&Bussiの研究

Mariotti ら(1998)は、作図の正当性を示そうとするときのチェックの仕方が、描かれた図そのものへのチェックから手続きのチェックに変化していく様子を分析している。報告されている実験は、Cabri 環境下にある教室［一斉授業］の中で次のような課題を用いたものである。

問題：画面上に線分を作図せよ。その線分を辺の１つとするような正方形を作図せよ。

この課題をあるグループは、４つの線分をつなげ、視覚的に整えて正方形にした。教師は描かれた正方形から一般の正方形へ生徒の焦点を向けることをねらう。まず生徒の注意は正方形の幾何学的特質、すなわち角度や辺を測定することに向けられる。しかし正方形の１つの頂点をドラッグすることによって、その形が崩れてしまった（図２）ことをきっかけとして生徒の視点を作図の手続きへと移していくことになる。

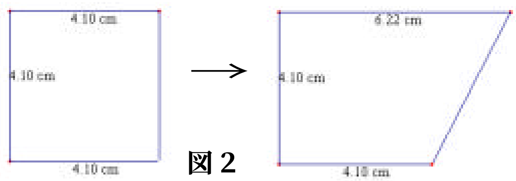


図２

教師は別なグループの解決法を、Cabri の履歴コマンドを用いながら生徒に提示する。右図３は途中の図である。ここで生徒になぜこのような作図をしたのかを問う。すなわち手続きそのものよりもその正当性や動機づけに注目させようとしている。さらに次には何をするのか、なぜそうすると考えるのかを

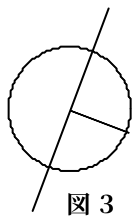


図３

問うていく。そのことによって生徒は最終的な産物が正方形であることや幾何学的性質を用いて保証していく過程を自ら経験し、理解していくことになるのである。Mariotti らは幾何学的な作図とはドラッグしても形が崩れない図形になるまでの手続きであることを、Cabri の特性によって理解できること、そしてなぜ崩れないかを説明することもできるようになると述べている。つまり辻(1997)が「作図の手順に注目することによって図形の概念の適切な属性が明確になり、作図活動が図の視覚的な影響を減少させる可能性を持つ」と述べているように、Cabri でコマンドを用いながら作図をすることは作図の手順を明確にし、結果として命題の条件がかなり意識されることになるのである。また先に記した正方形の作図の事例ように定義や別な性質に戻ることによって作図をしなければならないことも考えられるので、暗黙的に隠された条件も出てくる可能性もあろう。さらにバラシェフ(1997)が指摘するように、平行線が点対称というコマンドによっても作図することができ、それによって対称についての新しい意味や条件が構成されることも考えられる。これらの Cabri による作図の特徴を細かく見ていくことで証明問題の解決への援助の可能性を探ることができよう。

4.3. Oliveroらの研究

Olivero ら(1998)は、幾何学的な問題は画面上の図形の知覚的なレベルを保つだけでは解決されることができず、概念的な制御や知識が必要になるとしている。そこで彼らは Cabri 環境におけるドラッグが視覚的な知覚やマウスの動きをともなった複雑なフィードバックを持っていることから、次のような実験の分析を行っている。この実験は推測から証明への移行過程において、ドラッグがどのような取り次ぎの役目を果たしているか、またその結果生徒の思考の流れにどのような変化が見られたのかを細かく分析したものである。彼らが用いたドラッグの様相は次の３つである。

ｉ)wandering dragging
…ある規則性や興味深い配列を見つけるために手当たり次第にドラッグすること

ii)lieu muet dragging
…図形のある規則を保護するような方法で、ある軌跡がドラッグ可能な点 P をドラッグすることによって、経験的に作り上げられることを意味する。

iii)dragging test
…作図の結果をドラッグによって検証すること

実験は次の課題を用いて１５才の生徒に対して行われたものである。

問題：ＡＢＣＤを四角形とせよ。内角の２等分線を引き、２組ずつ順にそれらの交点をＨ、Ｋ、Ｌ、Ｍとせよ。ＡＢＣＤをドラッグし、あらゆる異なった形を考えよ。四角形ＨＫＬＭに何が起こるか。それはどんな種類の図形になるか。

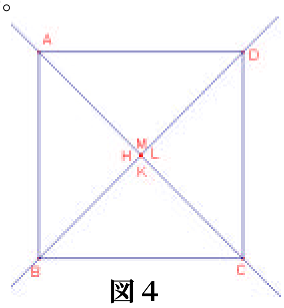


図４

生徒は外側の四角形と内側の四角形の関係を wandering dragging によって一通り調べた後、外側の四角形が正方形の時、４つの角の二等分線が１点で交わることに興味を持つ（図４）。彼らは１点で交わることを保ちながら、正方形 ABCD を lieu muet dragging によってドラッグする（図５）。

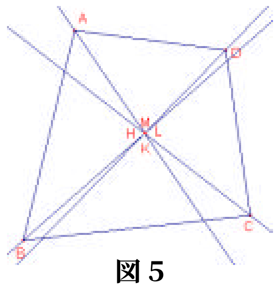


図５

そこで彼らはドラッグをやめて Cabri の画面の図を見る。この場面を「視覚的分野の内面化」、「探求の過程からの分離」として Olivero らは特徴付けている。このとき具体的には「４つの角の二等分線が１点で交わるのは何の特別な場合か」を思考していることをさして、Olivero らは abduction

と呼んでいる。結果として生徒は、測定値から２つの対辺の和が他の２つの和に等しくなることに気づき、以前に学習したことから円に外接した四角形を特徴付けることを思い出す［以上を Olivero らは ascending contorol stream として記している］。そして彼らは実際に四角形に内接する円を描き（図６）、dragging test によって彼らの abduction の過程をチェックし、「外側の四角形が円に外接するならば４つの内角の二等分線は１点で出会う。」と記述している。このことは先述の abductive に対して deductive となる。このエピソードについて Olivero らは「abductive から演繹的な様相までの切り換えをはっきり示している」と述べている。さらにこの生徒は円に外接する四角形から作図を始め（図７）、４つの角の二等分線が１点で交わることを dragging test によって確かめ、「全ての四角形の内角の二等分線が同じ点で出会うならば、その四角形は円に外接する」と記述している（以上までを Olivero らは descending contorol stream と記している）。このことによって彼らは命題を証明するのに必要とする全ての要素を得たことになる。

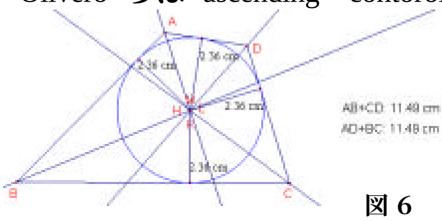


図６

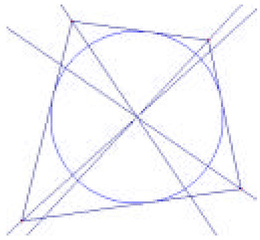


図７

Olivero らは、特に lieu muet dragging に注目している。lieu muet dragging は図形と概念を媒介し、知覚的な水準において、その場に根ざしている方法の中で知識の再編成を援助するとしている。また彼らは「ドラッグの振る舞いは、生徒が Cabri の中でコントロールを発達させる元となる、認識や認知の様相に応じて変化する。だから、ドラッグの様相を見ることは、他の内的変数や理論的変数について、洞察を与えうるのである。」（コントロールの変化の分析については Arzarello,1998 を参照）と述べ、さらに「何人かの生徒、特にオープンな状況を探求しながらよい推測を生み出している生徒は、ドラッグの様相は異なった特性を含んでいる。」(p.33)といういくつかのことを主たる結果としている。すなわちドラッグの様相の変化は生徒の思考の流れであり、我々が生徒の解釈を理解することを援助するものである。また生徒にとってはよい推測を生み出す可能性を暗示するものであること、ドラッグを止めることも概念化への移行を特徴付けることを考えると、ドラッグの様相の変化を見ていくことは我々に重要な情報を提供することになる。

5. Cabriを使う個人に視点をあてた分析

先述した Cabri を使う個人に視点をあてた先行研究から示唆を得て、第２節でとりあげた研究を再検討してみる。

5.1. 垣花・清水らの研究

垣花・清水ら(1994)の測定値を根拠とする証明は、演繹的な証明を生徒に強制してきた、その結果として図形嫌いを生み出してしまった中学校数学を見直す必要性を投げかけているものと受け止められる。しかし課題が提示され、生徒が測定値を根拠とする証明で良しとするまでの間に、細かく見るべき点があるように思われる。まず課題が図と共に与えられ、生徒は wandering dragging によって探求活動を行うと考えられる。その結果指示された四角形 MPQN に注目し、いつでも平行四辺形になるらしいということに気がつくであろう。しかし同時に外側の四角形が与えられた図とは大きく変化することも、生徒は見ることになる。この外側の四角形の変化を生徒はどのように解釈するであろうか。我々教師は、外側がどのような形になろうとも四角形 MPQN が平行四辺形になることに驚き、興

味を強くして欲しいと考える。さらに外側の図形が四角形から三角形や凹型の四角形、クロスした図形への連続的な変化に目を向け、それぞれの場面のつながりを考えることを期待する。このことは清水・垣花(1999)でも「問題のつながりを考える活動」の例として挙げられている。しかし Goldenberg ら(1998)は、ドラッグによって偶然起こるこのような事態は、変質した場合、特異な場合として生徒自身が受け入れないことも考えられると指摘している。そしてそのことをどのように乗り越えて我々が期待する方向へと向かうのかを我々自身が理解しておかなければならないことも述べている。したがって垣花・清水らの研究における実験において、生徒はいろいろに変化する外側の四角形をどのように解釈したのか、その解釈を彼らは見直していったのか、そしてどのような過程を経て外側の四角形の変化を理解し、受け入れていったのかを見ることによって、生徒の一般化への可能性についての情報を得ることができると考える。

また生徒の思考過程を見るときの視点としてドラッグの様相の変化がある。手当たり次第にドラッグする wandering dragging から、四角形の連続的な変化を意識した特定の点の lieu muet dragging への変容は、中点連結定理を想起させる可能性もあると考える。例えば図８は点 D を点 A の方に向かってドラッグしている様子を表したものである。このような lieu muet dragging によって、視覚的分野の内面化や探求の過程からの分離が引き起こされ、概念への移行を特徴付けることもできると考える。

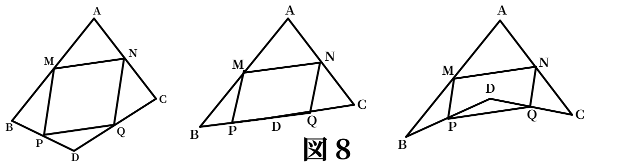


図８

さらに生徒がどのような過程を経て、測定値を使うに至ったのかを詳細に見ていくことも多くの情報を得ることになる。測定値は推測を生み出すきっかけとなることも考えられ、生徒がどこを測定するのか、測定から得られた情報をどのように解釈するのか、その結果どのような推測を生み出したかを細かく見ていくことによって、推測が生み出される過程や可能性を示すことができると考える。この課題では注目すべき四角形が指示されているので、測定する個所は絞られるが、角度を測定するのか、長さを測定するのか、それとも清水・垣花(1999)が指摘するような傾向として、安易に測定してしまっているのかが考えられるであろう。この違いは生徒の持っている知識がどのように活用されるかにも影響すると思われる。平行四辺形になるための条件を知識として投入する生徒は、目的とする部分だけを測定することになるであろう。逆にそうした知識を投入できない生徒は安易に測定してしまうことになることが考えられる。さらに測定値を表示したあとドラッグすることによって多くの情報を得ることになる。ここで知識を投入して目的とする部分の測定を行っている生徒はその情報を活用し推測を生み出すことができよう。しかし知識を投入できず安易に測定してしまった生徒は、画面に多くの情報が表示されても、それを活用することができず、推測を生み出すに至らないことが考えられる。逆に無目的に測定してみた結果、等しい辺や角に気がつき平行四辺形になるための条件を活用できるようになることも考えられるだろう。垣花・清水の実験では、生徒は測定値によって得られた情報を平行四辺形になるための条件に適切に当てはめ、平行四辺形になることを納得している。ここに至るまでの過程を生徒の解釈をもとに分析することによって、推測を生み出すことの可能性を示すことができるのではないだろうか。同時に演繹的証明につながる可能性も示すことになろう。測定値をどのように活用するのかを我々が見ていくことは、生徒の推測を生み出す活動がどのように進むのかを理

解することにつながる。

　また短大生に行った実験の活動結果に「その理由を考えるために画面をじっと見ているグループと無目的に動かしているグループがある。」と報告している。その結果、前者は補助線を引くことを思いつき、後者は補助線を引くことができないで、特殊な場合についての説明を考えていた（図９）。後者のグループはその報告から、wandering dragging からドラッグの様相の変化が見られないことになろう。しかし前者のグループは視覚的分野の内面化や探求の過程からの分離が見られる。この場面以前にどのようなドラッグが見られたのかを分析していくことによって、概念化への移行が特徴付けられる可能性があると思われる。

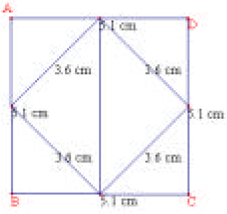


図９

5.2. 原田の研究

　原田は「Cabri による問題の図形の作図によって生徒の認識における誤りを顕在化できる」という自身の研究成果をもとに、「Cabri による作図活動が推論的活動を精密にし、証明問題の解決を援助する手段になる」とする仮説の検証を目指している。Cabri による作図活動は、これまでの紙と鉛筆等による作図活動とは大きく異なることは周知である。それが証明活動にどのように活きるのかは細かく見る必要がある。そのような意味で原田の研究は意義のあるものであるが、個人の活動に焦点を当てると共に、生徒がどのような解釈をしているのかを見ていくことによってより具体的な可能性が見えると考える。原田が推論的特徴を捉える視点として挙げた「作図の妥当性の確認」を中心に分析する。

　原田は作図の妥当性の確認にはそれぞれ「図形の頂点」、「図形上の点」を引っぱることによる確認があると述べている。この問題に関しては大きな差はなかったが、傾向として前者の方が生徒にとって容易であるということ、またどちらの確認もしていない生徒もいたことを報告としている。

　ここで考えたいことの１つは、作図の妥当性を確認することは生徒にとってどのような意味があるかということである。この問題では、三角形の各頂点や点 P をドラッグしたとき、我々は M が中点であることや平行性が保たれていて欲しいと考える。また生徒も自分の行った作図が思った通りに動いたことを確認して、次の活動に進むことができよう。反面、次のようなことは考えられないであろうか。筆者が行った別な作図の調査で、視覚的な判断により完成させた図をドラッグしたところ、その図が崩れてしまったことについて、その生徒は動かしたのだからもとの図が崩れることは予想できたと述べた。この問題でも線分 PS、PR を、コマンドを使わず視覚的な判断によって AB、AC と平行になるように作図し、「図形上の点」による作図の妥当性の確認を行ったとする。すなわち点 P を引っぱることになる。この場合、平行性は保たれないのだが、生徒はこのことを「動かしたのだから当然のこと」と考えるかもしれない。このような生徒と我々との解釈の差異を我々自身が理解しておかなければならない。その上で、原田が、「図形上の点」による妥当性の確認を行う際に必要であるとしている認識、つまり点 P は線分 PM 上の任意の点であることとその点に基づいて平行線が作図されているという認識を生徒はどのように得るのかを詳細に見ていくことが重要である。そのためには生徒の作図活動に我々の視点を移すことが有効であろう。例えば Cabri のコマンドによって、平行線を作図するとき、点 P と辺 AB、AC の指定が必要になる。このことがそうした認識に影響を及ぼすことは当然考えられることであるし、また問題の条件を明確化することも考えられる。Mariotti らは作図の妥当性を dragging test によって確認すること、そして手続きに戻ってなぜその

作図方法なのかを説明することについての詳細な報告をしている。作図の妥当性の確認とは、Cabri による作図が正しく描かれたものかどうかをドラッグによって確認する特徴的な活動であるだけでなく、生徒の意識を作図の手続きに戻すことのできる活動となる。その結果､問題の条件を再認する機会となるが､生徒が作図や作図の妥当性の確認を通して何を得たのかを見ていく必要がある。

２点目は作図活動や作図の妥当性の確認の後、どのような探求活動が続くのか、またそれが証明につながるものなのか、ということである。すなわち作図活動や作図の妥当性の確認がその後の探求活動や証明活動とどのように関わり合うのかということを考えたい。作図の妥当性の確認として「図形の頂点」や「図形上の点」の wandering dragging を行うことになるが、その結果 MS=MR であることを推測することが考えられる。ここでは MS=MR であることの理由を考えていく活動を念頭に置く。例えば「図形の頂点」による作図の妥当性の確認として点 C をドラッグした場合について考える。原田によればこのとき生徒は「平行線が図形の変形に対して平行性を保存するという認識」をもって妥当性の確認をすることになる。したがって点 C のドラッグによって、PR と AC、PS と AB の平行を改めて認識する。Goldenberg はソフトウェアの振る舞いであると述べていることだが、点 C をどのようにドラッグしても MR:MC が変わらないことと同時に MP:MA、MS:MB も変わらないことに気付き、３組の線分の比が等しいことを見つけるかもしれない。また MR:MC が変わらないことや平行性を保存するという認識に、三角形と線分の比の知識を加えて MR:MC=MP:MA を見出すかもしれない。さらに MS=MR を説明するためには M が中点であるという認識も必要である。これは Cabri のコマンドによる作図が問題の条件を明確化することに関連づけられる事柄である。この解決過程の中でポイントとして、作図の妥当性の確認から推測を生み出す可能性があること、平行性を保存するという認識がその後の探求活動に活かされる可能性があること、知識の投入によって作図の妥当性の確認によって得られる情報が活かされることが挙げられる。

また「図形上の点」として点 P をドラッグした場合を考えよう。原田によればこのとき生徒は「その点［点 P］に基づいて『平行線』が作図されていることの認識」をもって妥当性の確認をしたことになる。したがって点 S、R は平行性を保存しながら点 P に依存して動くことを認識していることになる。この認識によって MP:MA の比の値が平行線によって移されることが引き出されよう。ただし画面の中にどのような図形を見ているかにも依存しており、我々は生徒が何を見てどう解釈しているかにも注意を払わねばならない。この解決過程でのポイントとして、作図の妥当性の確認で必要とされている認識、つまり点 P に基づいて平行線が作図されているという認識が生徒の持っている知識を導く可能性があるということ、またそれは生徒が画面に表示されているもののどこに注目しているかによる、ということがいえよう。

このように作図活動、作図の妥当性、その後の活動を結びつけながら見ていくことで、証明問題の解決にどのようにつながるのかを明らかにできると考える。

5.3. 川上の研究

川上は作図をさせたあとの探求活動に注目しているが、作図の段階でも見るべきことがあるように思う｡例えば内接円の作図である。角の二等分線の交点であることを知識として持っているとしても、交点を求めたあと内接円をどのように描くかという問題がある。これは筆者自身の失敗でもあるが、交点を中心として三角形に内接するように半径を決定しようとすると、ちょうど三角形の１辺のあた

りで「この線分上」というメッセージが出る。これに従って決定すると完成した図は、内接円が描かれているように見えるが、dragging test では、内接円であることが保たれない。したがって内接円を描く前に接線とその接点を通る半径は垂直であるという知識が必要となるのである。このことは内心から各辺のの接点への半径を意識させ、さらに探求を続けることによって２つの接線の長さが等しいことを発見したり、その根拠を示していく上で役に立つものである。

川上は「試行錯誤を通して、数学的な見方や考え方ができるようになる。」と述べている。すなわち試行錯誤が数学的な見方や考え方を培う大切な生徒の活動となる。したがって Cabri 環境下でどのような試行錯誤が起こるのか、その試行錯誤を生徒はどのように次への探求活動へつなげていくのか、数学的な見方や考え方につなげていくのかを見ていくことが重要になる。最初に課題に取り組むときの試行錯誤はまさに wandering dragging といえよう。それが lieu muet dragging に変化することは試行錯誤が洗練されたといえるであろう。例えば内心と外心を１つの三角形に作図した例がある。最初に行った wandering dragging によって生徒は外心が内心を追いかけるような動きに興味を持ち、２点を一致させようとドラッグを続ける。ここでのドラッグは最初の wandering dragging とは異なっている。lieu muet dragging に移行する途中の段階ともいえよう。そして２点が一致したときの三角形を見て、正三角形であることに気がついたことを川上は報告しているが、ここで２点を一致させたままドラッグするような活動は見られなかったのであろうか。これは lieu muet dragging であるが、このことによって正三角形ならば常に外心と内心が一致することを強く印象づけることができよう。さらに正三角形以外には外心と内心が一致することはないのかといった問題へと進める可能性が生まれ、結果として必要十分条件を満たす命題を得ることもできよう。Olivero(1998)は、「ドラッグしながら、作図をしたり幾何学的な状況を探求する生徒は、しばしば図形から概念まで行き来する。そして長期的には経験的水準から理論的水準までの彼らの姿勢の発達がおそらく起こされ得る。」と述べている。したがってドラッグの様相の変化を見ていくことは、生徒の試行錯誤を通して図形から概念への移行を見ることになるであろう。

6. 結語

Cabri を使う学習者に焦点を当てた分析は、Cabri がどのようにして図形への理解を深めるのか、証明活動に活きるのかをより具体的に特徴付けることができる。その方向性として次のような視点が設定されよう。

(ⅰ)Cabriを使う個人に何が見えているか、またそれをどう解釈しているか。

(ⅱ)Cabri環境における作図機能が証明活動にどのように活かされるのか

(iii)Cabriを使っているときのドラッグの様相の変化や測定機能の活用の様子

(ⅳ)個人の持っている数学的な知識がCabriを使った問題解決の上でどのように影響するか。

Cabri 環境と紙と鉛筆の環境との相違はドラッグによる動的な変形にある。したがって Cabri での作図は動かしても崩れないことが求められることになる。そのため視覚的な判断ではなく、コマンドを用いて１つ１つの条件を丹念に述べていかなければならないのである。そのことが証明の中で必要な条件を浮き彫りにすると考えられる。またドラッグは生徒の思考を捉える手段であるだけでなく、それ自体が生徒の理解を深める活動となる。ドラッグから理解の深まりといった循環を大切に扱い、生徒は何を得たのか、それらが生徒の思考にとってどのような意味を持ったのかにも注意を払わねばならない。測定機能についても同様のことがいえよう。Cabri の持

つ機能を活かし、生徒が有効に活用するためにも、以上の４点に基づいて、個人に焦点を当てた活動分析を行うことが必要であると考えられる。

引用・参考文献

Arzarello, F. et al. (1998). A model for analysing the transitiontoformalproofsingeometry. *Proceedings of the 22ndConferenceofthe InternationalGroupforthe Psychology of Mathematics Education*(vol. 2, pp.24-31). Stellenbosch,SouthAfrica.

バラシェフ, N. (1997). **数学的証明の学習の改善: 実践を改善するための理論的枠組み. 日本数学教育学会, 数学教育学論究**, 67, 68, 52-62. **（第２９回数学教育論文発表会講演録）**

Balacheff, N.&Kaput,J. (1996). Computer-based learning environmentsinmathematics. In A.J.Bishop et al.(Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp.469-501). Dordrecht: Kluwer.

Goldenberg, E. P. & Cuoco, A. (1998). What is dynamic geometry?. In R. Lehrer & D. Chazan(Eds.), *Designing learningenvironments for developingunderstandingof geometry andspace* (pp.351-367). Mahwah,NJ: Lawrence ErlbaumAssociates.

原田耕平. (1997). **幾何の証明問題の解決を支援する** Cabri-Geometry **の利用: 作図における推論的活動の分析. 日本数学教育学会, 第３０回数学教育論文発表会論文集**,415-420.

飯島康之. (1998). **作図ツールによる図形・関数領域でのカリキュラム開発. 日本数学教育学会（編）, 日本の算数・数学教育** 1998: **算数・数学カリキュラムの開発へ**(pp.185-200). **産業図書.**

垣花京子, 清水克彦. (1994). **コンピュータ環境での図形の証明問題における測定の役割. 日本数学教育学会, 第２７回数学教育論文発表会論文集**, 499-504.

垣花京子, 清水克彦. (1995). **図形の証明問題での測定値の役割: コンピュータ環境下における生徒の活動分析を通して. 日本数学教育学会誌**, 77(11), 17-22.

垣花京子, 清水克彦. (1997). **コンピュータ環境下での証明の機能の変化に伴う学習活動の具体的な検討: 図形ソフトカブリを利用した実験・観察と証明. 日本数学教育学会, 第３０回数学教育論文発表会論文集**,379-384.

垣花京子, 清水克彦, 能田伸彦, 東原義訓, 中山和彦. (1993). **ジオワールドにおける生徒の活動の分析**(2): **測定値を根拠とする証明は間違いか. 日本数学教育学会, 第２６回数学教育論文発表会論文集**, 357-360.

川上公一. (1999). **生徒の活動を中心にした課題学習. 清水克彦, 垣花京子(編著), コンピュータで支援する生徒の活動: 数学科・図形分野での新しい展開** (pp.100-117). **明治図書.**

Mariotti, M.A.&BartoliniBussi, M. G. (1998). From dragging to construction: Teacher's mediation within the Cabri environment. *Proceedings of the 22nd Conference oftheInternational Group for the Psychology of Mathematics Education*(vol. 3,pp.247-254). Stellenbosch,SouthAfrica.

能田伸彦, 中山和彦. (**編著**). (1996). **自ら学ぶ図形の世界: 先生・生徒・コンピュータが作る新しい授業. 筑波出版会.**

ノーマン, D. A. (1996). **人を賢くする道具: ソフトテクノロジーの心理学(佐伯胖監訳). 新曜社.**

Olivero, F. et al. (1998). Dragging inCabriandmodalities oftransitionfromconjecturesto proofsingeometry. *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.2,pp.32-39). Stellenbosch,SouthAfrica.

清水克彦. (1993). **道具は問題の解決プロセスをどう変えるか: コンピュータ・ソフトを事例としたその分析の観点の提出. 三輪辰郎先生退官記念論文集・編集委員会（編）, 数学教育学の進歩**(pp.242-261). **東洋館出版社.**

清水克彦. (1999). **コンピュータの支援を受けた生徒の活動の実際: ダイナミックな図形ソフトの効果と課題. 清水克彦, 垣花京子(編著), コンピュータで支援する生徒の活動: 数学科・図形分野での新しい展開** (pp.118-127). **明治図書.**

辻　宏子. (1997). **コンピュータ環境での作図活動の効果: 平面図形の学習での図の図形としての認識を促す場の検討. 日本数学教育学会誌**, 79(11), 11-19.