上越数学教育研究, 第 15 号, 上越教育大学数学教室,2000 年, pp. 141-148.

生徒の考えや表現を起点とした概念形成に関する考察
― 一次方程式を例として ―

上越教育大学大学院修士課程１年
三　木　俊　幸

１．　はじめに

国立教育研究所(1996)の第３回国際数学・理科教育調査国内中間報告書では、次のようなデータが示されている。問題「３（ｘ＋５）＝ 30 のとき、ｘの値は、次のどれですか。」という問題に対しての正答率は、中学１年生で 84.6 ％、中学校２年生で 92.8 ％である。一方、問題「２つの箱に合計 54 キログラムのリンゴが入っています。２つめの箱に入っているリンゴは、最初の箱よりも 12 キログラム多いです。箱にはそれぞれ、リンゴが何キログラム入っていますか。その答えと求め方を説明しなさい。」という問題に対しての正答率は、中学校１年生で 40.5 ％、中学校２年生で 53.1 ％である。このような結果は、筆者が現場の授業において問題点として感じていた、「方程式の学習場面で、式が与えられれば、解法の手順を適切に実行し解を求めることができるのに、文章題などの問題解決においては、方程式を利用できない。」という生徒の姿と一致する。

一次方程式の応用の指導場面において、教科書(藤田他.1998.p84)では、「方程式を使って問題を解くには、次のようにすればよい」などという記述から、文章題から一次方程式を使って問題を解決するための解く手順が、図１のように示されている。

$\boxed{1}$ 問題の意味をよく考え、何をｘで表すかを決める。
$\boxed{2}$ 問題に含まれている数量を、ｘを使って表す。
$\boxed{3}$ それらの数量の間の関係をみつけて、方程式をつくる。
$\boxed{4}$ つくった方程式を解く。
$\boxed{5}$ 方程式の解が問題に適していることを確かめ答とする。

図１.方程式を使って問題を解く手順.

筆者自身の授業では、例えば、「1000 円持って買い物に行き、鉛筆６本と 150 円のノートを３冊買ったら、370 円残った。鉛筆１本の値段はいくらか。」という問題を示し、この問題を上記の解き方にあてはめると、次のように問題解決ができることを生徒に示していた。

$\boxed{1}$ この問題では、求めたいものが、鉛筆１本の値段だから、鉛筆１本をｘ円とする。
$\boxed{2}$ 鉛筆をｘ円とすると、買い物をした代金は、鉛筆６本と 150 円のノート３冊だから、ｘ×６＋ 150 ×３＝６ｘ＋ 450 と表せる。
$\boxed{3}$ 問題の中に「1000 円持って行って、おつりが 370 円という関係がある」から、1000 －(代金)＝ 370 という関係があり、$\boxed{2}$ で表した６ｘ＋ 450 を使うと、この関係から、1000 －(６ｘ＋ 450)＝ 370 という方程式がつくられる。
$\boxed{4}$ この方程式 1000 －(６ｘ＋ 450)＝ 370 をそれまでの解き方を使って解けば、ｘ＝ 30 となり、鉛筆の値段が 30 円であることが求められる。

5 求めた 30 という値を使うと、1000 −(6 × 30 ＋ 450)＝ 370 となり、問題の状況と合っているから、鉛筆の値段が 30 円であることを確かめる。

そして、この問題に続けて、「A 君がノートを４冊と 60 円の消しゴムを２個買ったら、代金の合計が 760 円でした。ノート１冊の値段はいくらでしょう。」という問題を提示することで、筆者は、上記で示したような方程式の解き方を使った活動が行われるのではないかと期待していた。しかし、実際には方程式を立式して、問題を解決できる生徒は少なく、生徒からは「(760 − 120）÷４＝ 160 として、ノートの値段は 160 円と求められるのに、なぜ、方程式を使わなければならないのか？」などという疑問の声も聞かれた。

改めて筆者自身の授業を振り返ってみると、問題場面に対して教師が求めている解き方を生徒に最初に提示し、その適用の仕方を学習させようという、授業におけるこのような行為が、生徒から考える機会を奪っていたのではないかと反省させられる。そのため、生徒の中に「未知の問題解決の場面に出会ったときには、教師から正しい解答が示されることを待つ態度」や「数学の学習内容は、形の決まった問題に対して、決まった解き方が存在し、それを覚えることが、数学の学習であるとの意識」を育てていたのではないかとも考えられる。

そこで、筆者自身の授業に対する捉え方を反省し、数学の授業を「数学の学習内容を決まりきった解法手順の集まりのようなものとして伝達するのではなく、問題解決の場面において、生徒自身が自然に用いる考えや表現を使って、問題解決をしながら、より洗練された形で問題解決をするための手立てとして数学を創り上げていくような授業」にしていきたいと考えている。

そこで、本稿では、一次方程式の問題解決の場面で､生徒が自然に用いる考えや表現は､どのようなものが考えられるかを小学校の学習内容の考察を通して想定する。そして、その想定された考えや表現が系列的な問題解決の中で、どのように生徒に使われていく可能性があるかを考察する。

2　生徒の自然に用いる考えや表現を発展させようとする先行研究

2．1　問題解決の文脈に沿った長除法の発達

Gravemeijer(1997)は、問題解決の文脈に沿って、子どもが自然に用いる考えやその表現から出発し、それを発達させ、よりフォーマルな数学的知識を構成する過程を長除法を例として次のように示している。

①「今夜、81 組の保護者が、我々の学校を訪問する。６組の保護者が各テーブルにつくことができる。どのくらいのテーブルが必要か？」という問題に対して、教師が下の図２

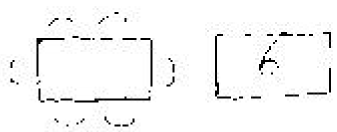

図２教師の示した図.

のような、2,3 のテーブルの絵を示すことにより、生徒が、次のような解き方を作り出したことが示されている。

・反復的な加法を使った解き方：６＋６＋････、もしくは加法に基づいた段階的乗法１×６，２×６････、そして、段階的乗法を使った中の数人が、その結果生じる６，12，18････という系列を書きとめた。
・乗法または反復的な加法によって生み出される 10 ×６を使った解き方。
・何人かの生徒は、６×６＝ 36 を知り、更に、それは 12 ×６＝ 72 を得るために２倍され、１組の６を加え、更に最後にもう一

組の６を加えた解き方。
この問題場面から、生徒が用いた考えや表現は、生徒が経験として獲得している、配ったり分けたりという操作から作られてきたものであることが考えられると指摘している。
②「１つのポットから７杯のコーヒーがいれられる、各保護者に１個のコーヒーカップを配る。どのくらいのコーヒーポットが 81 組の保護者のために必要か？」
この問題に対して、教師が 10 倍を使うことを明確に示さなくても、たくさんの生徒が 10 倍を使うであろうと予想され､実際には 13 人の子どもが、10 倍を使ったことが示されている。
ここでは、①での活動から、10 倍するという考えや表現がモデルとして抽出され、②の問題を解くための考えとして、働いたのであろうと考えられている。
③「1296 人のサポーターがサッカーの試合を応援するために、バスでスタジアムまで出かけます。会計係は１台のバスで 38 人のサポーターを運ぶことができるということ、そして、10 台のバス毎に割引が与えられることを知っている。バスは何台必要でしょう｡」
この問題では、割引に関する情報が、割引を算定するための暗示として機能し、生徒の注意を一層、10 倍するということに向けさせることができるであろうと指摘され、②の問題で解き方のモデルとして意識化された、10 倍するという考えや表現は、このような問題の中で、100 倍することや、38 人ずつ取り去るというアイディアへと発展していくであろうと指摘されている。
④最終的に、これらの問題解決の過程で得られた「10 倍、100 倍････する」､「除数の分だけ取り去っていく」という考えや表現は、状況から切り離され、その考えや表現自体が考察の対象となり､「できる限り密接に被除数にアプローチしようとする」標準的な筆算アルゴリズムへと発展する考えや表現であることが指摘されている。

２．２　モデルの自己発展と学習レベル

Gravemeijer(1997)は、２．１で示したように、問題解決の中で、生徒が自然に使うであろう考えや表現を起点として、よりフォーマルな数学的な知識を構成する過程において、問題解決の中で生徒の用いる考えや表現をモデルとしてとらえ、そのモデルが子供たちにとって、どのようなものとして考察されているかという視点から、モデルの自己発展の過程を示している(図３)。また、それぞれのモデルの働きに対応した４つの学習レベルが設定されている(図４)。

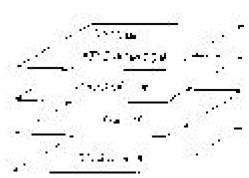

図３.モデルの発展.

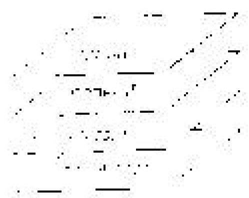

図４ .学習レベル.

最初のレベルは、状況的レベル(situational level)であり、この段階では、生徒の活動が、紙と鉛筆を使っての活動ではなく、生徒たちの間で、何かを配ったり、分けたりする活動と結合されている段階である。この段階で生徒によって使われているモデルは、生徒のそれまでの経験から獲得された状況的な知識（situations）である。
次のレベルは、参照的レベル(referential level)であり、例えば、除法の問題が、書かれた問題において提示される段階である。この段階で生徒によって使われるモデルは、例えば除法の問題においては、提示された問題に応じて工夫された分け方であり、それぞれの問題を解くためのモデルである（model-of situation)。
第３のレベルは、一般的レベル(general level)であり、このレベルは、生徒の思考の

対象が問題の状況から離れ、参照的レベルで形成された様々な model-of 自体が考察の対象となる段階である。除法の例では、参照的レベルでの反復的減法を使った考えが、「10 倍・100 倍・・・・する」、「除数の分だけ取り去る」という考えや表現に見直され、さらには、「できる限り密接に被除数にアプローチしよう」とする考えとなっていく。この段階では、参照的レベルで形成されたモデル自体が考察の対象となり、これらのモデルが「できる限り密接に被除数にアプローチしよう」という考えを生み出す、数学的な推論を行うためのモデル（modle-for mathematical reasoning）となる。

第４のレベルは、形式的レベル(formal level)であり、標準的な数学の手続きや表記法を使って、活動するレベルである。この段階で、標準的な数学的な知識や表記法が、モデル（formal knowledge）として使われていくことになる。

Gravemeijer(1997)の示す、生徒たちの自然に用いる考えや表現を起点として、よりフォーマルな数学的な知識を構成していく長除法の例では、問題解決の場面において、生徒が自然に用いる「配ったり、分けたり」する経験をもとに生み出された考えや表現が、系列的な問題解決活動の中で、「10 倍する」「100 倍する」「被除数の分だけ取り去る」等の考えや表現へと発展し、よりフォーマルな数学的な考えや表現である「できるだけ密接に被除数の分だけ取り去る」という考えや表現になりうる可能性が指摘されている。

３．　一次方程式の学習場面において生徒が自然に用いる考えや表現の想定

Gravemeijer(1997)が長除法の場面を例として示しているように、問題解決の場面において、生徒が自然に用いる考えや表現は、系列的な問題解決活動の中で発展し、よりフォーマルな数学的な考えや表現になりうる可能性を持っている。

そこで、ここでは、一次方程式の問題解決の場面で、生徒が自然に用いる考えや表現は、どのようなものが考えられるかを小学校の学習内容の考察を通して想定する。そして、その想定された考えや表現が系列的な問題解決の中でどのように生徒に使われていく可能性があるかを考察する。

３．１　生徒が用いる考えや表現

生徒の自然に用いる考えや表現を起点として、問題を解決しながら、より洗練された形で問題を解決するための手立てとして数学を創り上げていくような活動を設定しようと考えた場合、問題場面において生徒が用いるであろう考えや表現を十分に分析する必要がある。そこで、本稿では、小学校において未知数を求めるという問題場面で、教科書に示されている考えや表現の分析を通して、中学校の方程式の学習場面で、生徒が未知数を求めるときに自然に用いるのではないかと思われる考えや表現を想定する。

生徒は、小学校で、問題場面から未知数を求める次のような経験をしている。

小学校３年生では「□を使った式」という学習場面で、例えば、「重さが 180g の入れものに、くりを入れ、全体の重さをはかったら 800 ｇでした。くりの重さを□ｇとしてたし算の式を表しましょう。」という場面から、立式された 180 ＋□＝ 800 という式の□にあてはまる数を求める求め方として、教科書(広中,杉山他.1998a.p11)に図５のような記述が見られる。

この場面の「見当をつけてから□に数をあてはめてみました。」で示されている解法では、生徒が未知数を求めるために、問題状況から立式された式に表された、数量の関係から、□にあてはまる数のある程度の見通しをつけ、立式された式の計算を具体的にしてみ

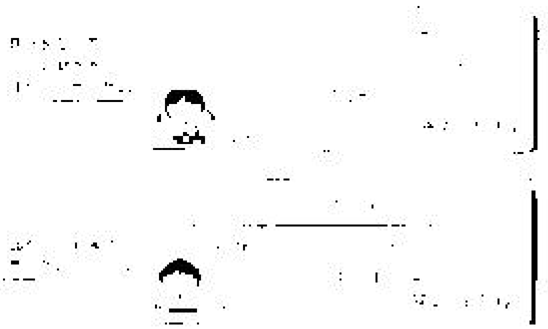

図５教科書に見られる記述.

た結果と、問題で示された数値とを比較することにより、未知数を求めようとしている。

従って、このような解法を経験している生徒が、未知数を求めるために用いるであろうと考えられる考えや表現の一つは、「求めたい数量を仮にある数量と決めて、その数量を使って求めた数量と問題で示された全体の数量を比較することにより、未知数を求めよう」とする考え方であると想定できる。

一方、この場面の「図をかいて考えました。」で示される解法では、場面の状況を表すための図が、問題の中の三つの数量の関係を 180＋□＝800 という式に表すためのモデルとして使われており、この問題を解決するための具体的な計算が、逆算の考えから導かれる計算であることを示していると思われる。

従って、このような解法を経験している生徒が、未知数を求めるために、用いるであろう考えや表現の一つは、「問題の中にある関係に目をつけて、逆算の考えを使うことにより、未知数を求めよう」とする考えや表現であると想定できる。

生徒は、小学校５年生の「文字と式」の学習で、次のような問題を解く経験をしている。「広さんは同じねだんのケーキを５こ買って、50 円の箱につめてもらいました。代金は 1300 円でした。ケーキ１このねだんはいくらですか。」（広中杉山他.1998b.p77）。この問題に対して、次のような解答が示されている。

「ケーキ１このねだんをｘ円として、全体の代金が 1300 円であることを式に表しましょう。」「ｘにあてはまる数を求めましょう。」という記述に続いて、次のような解き方が示されている。

$$
\begin{aligned}
x \times 5 + 50 &= 1300 \\
x \times 5 &= 1300 - 50 \\
x \times 5 &= 1250 \\
x &= 1250 \div 5 \\
x &= 250
\end{aligned}
$$

答え　250 円

式の変形としては、中学校で学習する等式の変形を利用した式変形であるように見えるが、等式の性質を学習していない生徒が「ｘ×５＋ 50 ＝ 1300」から「ｘ×５＝ 1250」へ至る式の変形の過程で使う考え方は、「代金の 1300 円から箱の 50 円を引くと 1250 円だから、ケーキ５こ分は、1250 円」という考え方であると思われる。

従って、この場面からも、未知数を求めるために、用いるであろう考えや表現は「問題の中にある関係に目をつけて、逆算の考えを使うことにより、未知数を求めよう」とする考えであると思われる。

以上、未知数を求めるという問題場面において、教科書で示されている考えや表現を分析すると、ここで用いられている考えは、主に、次の２つにまとめることができる。

(1)「求めたい数量を仮にある数量と決めて、その数量を使って求めた数量と問題で示された全体の数量を比較することにより、未知数を求めよう」とする考え。

(2)「問題の中にある関係に目をつけて、逆算の考えを使うことにより、未知数を求めよう」とする考え。

３．２　想定される考えや表現の発展の可能性

ここでは、前節の(1)及び(2)の考えを、未知数を求めるために、生徒が自然に用いるであろうと想定し、これらの考えや表現が発展する可能性について考察する。

具体的には､中学校の方程式の学習場面で、問題場面から方程式に表すと、ax ＋ b ＝ c、 ax ＋ b ＝ cx ＋ d となる二つの問題場面の中で、生徒の用いるであろうと想定される考えや表現がどのように発展するかを考察していく。

３．２．１　ax＋b＝ｃの形の問題場面

この場面は、未知数を求めるために、自然に用いるであろうと想定される、考えや表現が、model-of としてつくられる場面である。そこで、下記の問題①を使って、生徒がどのような考えや表現を用いるかを考察する。

問題①

「A君が、ノートを４冊と 60 円の消しゴムを２個買ったら､合計の代金が 760 円でした。ノート１冊の値段はいくらでしょう。」

中学校の方程式の学習場面で、未知数を求める問題場面を解決するために、生徒の自然に用いる考えや表現を３．１で想定した(1)(2)の２つの考えや表現ではないかと考えると､この場面で､生徒が用いる考えや表現は､次のようなものではないかと考えられる。

(ｉ)(1)の考えを使って想定される解き方

・ノートの値段を 120 円と見当つけると、
　$\boxed{120}$ ×４＋ 60 ×２＝ 600
・ノートの値段を 130 円とすると
　$\boxed{130}$ ×４＋ 60 ×２＝ 640
　：
・ノートの値段を 160 円とすると
　$\boxed{160}$ ×４＋ 60 ×２＝ 760

(ii)(2)の考えを使って想定される解き方

「合計の代金が 760 円で、消しゴムの代金が 60 ×２＝ 120 円だから、ノート４冊の代金は、760 － 120 ＝ 640 円。ノート４冊が 640 円だから、□×４＝ 640 円。４倍して 640 円だから、ノート１冊の値段は、640 ÷４＝ 160 円。」

３．２．２　ax＋b＝cx＋dの形の問題場面

この場面では、ax ＋ b ＝ c の形の問題場面で使われた考えや表現が､ax ＋ b ＝ cx ＋ d の場面でどのように用いられる可能性があるかを考察する。

問題②

「A 君は、１束何冊かのノートの束を３つとばらになったノートを２冊、B 君は同じノートの束を１つとばらになったノートを 12 冊持っています。今、二人のノートの冊数の合計は同じでした。束になっているノートの冊数は１束何冊でしょう。」

この問題に対しては、ax ＋ b ＝ c の問題場面で使われるであろうと考察した、２つの考えや表現のうち、(ｉ)で使われた、「求めたい数量を仮にある数量と決めて、その数量を使って求めた数量と問題で示された全体の数量を比較することにより、未知数を求めよう」とする考えを使って、問題を解決した解き方の中から、「見当をつけて数をあてはめてみよう」というアイディアを取り出すことにより、次のような解き方を生み出す可能性を持っているのではないかと考えられる。

(iii)(ｉ)の考えを使って想定される解き方

・１束のノートの数を例えば２冊とすると
　A 君の持っているノートの数は、
　　$\boxed{2}$×３＋２＝８冊
　B 君の持っているノートの数は、
　　$\boxed{2}$×１＋ 12 ＝ 14 冊
・１束のノートの数を３冊とすると
　A 君の持っているノートの数は、

$\boxed{3}$×３＋２＝ 11 冊
B 君の持っているノートの数は、
$\boxed{3}$×１＋ 12 ＝ 15 冊
⋮
・１束のノートの数を５冊とすると
A 君の持っているノートの数は、
$\boxed{5}$×３＋２＝ 17 冊
B 君の持っているノートの数は、
$\boxed{5}$×１＋ 12 ＝ 17 冊

(ⅰ)(ⅲ)のような、「求めたい数量を仮にある数量と決めて、その数量を使って求めた数量と問題で示された全体の数量を比較することにより、未知数を求めよう」という考えや表現は、「最初に仮定する数を幾つにするかという設定の仕方の難しさ」や、「繰り返して、計算をしなければならないという煩雑さ」を含んでいる。

しかし、この「最初に仮定する数を幾つにするか」という設定の難しさや、「繰り返して、計算しなければならない」という煩雑さを解消するために、「求めたい数量を仮にある数量と決めて」という解決のための考えから、「求めたい数量を仮に□として、問題の中の関係を式として表してみよう」とする考えや表現、さらには、そこから、「求めたい数量をｘとして、問題の中の関係を式として表してみよう」とする考えや表現へと発展し、「未知数として、文字を使用する」というアイディアを生み出す可能性があるのではないかと考えられる。そして、このような生徒の考えや表現の発展を促していくような系列的な問題設定が必要になろう。

一方、(ⅱ)で使われた、「問題の中にある関係に目をつけて、逆算の考えを使うことにより、未知数を求めよう」という考えや解き方を発展させて、問題②を解決しようと考えた場合、問題②の問題状況を式に表すと、ax ＋ b ＝ cx ＋ d という形の逆算では解けない形となる状況であることから、「問題の中にある関係に目をつけて、逆算の考えを使うことにより、未知数を求めよう」という考えや解き方を発展させることができないのではないかと考えられる。

また、生徒にとっては、問題①では、「合計の代金が 760 円でした。」というように、逆算の考えを使うためのもととなる数量が示されているのに対して、問題②では、逆算の考えを使うための、もととなる数量が示されていないため、「問題の中にある関係に目をつけて、逆算の考えを使うことにより、未知数を求めよう」という考えや解き方を使った活動を始めるきっかけの持てない場面となるのではないだろうか。

しかし、「問題の中にある関係に目をつけて、逆算の考えを使うことにより、未知数を求めよう」とする考えの中の「問題の中の関係を操作しようとする」アイディアが、ax ＋ b ＝ cx ＋ d の場面において、「問題の中にある関係に目をつけて、未知数を求めよう」とする新たな考えを生み出す可能性を持っているように思われる。

正田(1999)は、小学校４年生に対して、行われたインタビューの中の、□×５＋２＝□×３＋６の□にあてはまる数を求める活動から、小学４年生でも ax ＋ b ＝ cx ＋ d という逆算不能な方程式の解き方を作り出せる可能性があることを指摘している。

このインタビューの中で、子どもが、式として提示された□×５＋２＝□×３＋６の□にあてはまる数は求められなかったものの、式に合う場面が「太郎君と花子さんがゲームをしました。勝つとアメの入った袋をもらえ、引き分けだとアメが１つもらえます。太郎君は袋５つとアメ２個、花子さんは袋３つとアメ６個をもらいました。ところが２人のアメの数は一緒でした。袋のなかのアメは何個入っているでしょう。」として、操作できる具体的なモデルとともに示されると、「中身は２つ。」と袋のなかのアメの数を求め、その理由を「まず、これとこれと同じだから引い

て,〈バラになっている２個のこと〉それで、半分にして、で２個２個になったから」のように説明していることが示されている。

正田(1999)は、この子どもの思考は「両者の共通でない部分と共通な部分に分け、値が等しいことから共通な部分を無視して、共通でない部分が互いに等しいことを使っている。」(p.171)と分析し、等式の性質がこの解法の一般化によって得られるものであることを指摘している。

筆者は、「A君が、ノートを４冊と 60 円の消しゴムを２個買ったら、合計の代金が 760 円でした。ノート１冊の値段はいくらでしょう。」の問題に対して生徒によって使われるであろうと想定した「合計の代金が 760 円で、消しゴムの代金が 60 ×２＝ 120 円だから、ノート４冊の代金は、760 － 120 ＝ 640 円。ノート４冊が 640 円だから、□×４＝ 640 円。４倍して 640 円だから、ノート１冊の値段は、640 ÷４＝ 160 円。」という解法が、問題の中にある４×□＋ 60 ×２＝ 760 という数量の関係に目を向け、その関係を使って、「合計の 760 円から、消しゴムの 120 円を引いて」、「ノート４冊の代金は 640 円」のように、問題の中にある関係を操作し、新たな関係を生み出していることから、$ax + b = cx + d$ という形の方程式の問題場面において、「問題の中にある等しい関係を見つけて、それを操作することで、未知数を求めよう」とする考え方を生み出す可能性を持っているのではないかと考えている。

４．　まとめと今後の課題

本稿では、問題解決の場面で、生徒が自然に用いるであろう考えや表現を、どのように生かし、それを起点として新たな知識を構成していくための活動を設定するために、特に、一次方程式の問題解決の場面で、生徒の自然に用いる考えや表現は、どのようなものかを未知数を求めるという問題場面において、小学校の教科書で示されている解き方を分析することを通して、その想定を示した。また、それらの生徒が自然に用いる考えや表現が、連続する問題解決の中で、発展する可能性があることを示した。

今後は、「未知数を求める」問題解決の場面で、生徒が用いる考えや表現を実際の活動の考察やインタビュー調査を通して分析していきたい。また、分析を通して得られた結果をもとに、問題解決の場面で、生徒が自然に用いる考えや表現を発展させることを目的とした系列的な問題解決を行ったときに、生徒が用いる考えや表現は、どのように変化していくかを分析・考察することにより、「生徒が自然に用いる考えや表現を起点として、問題解決をしながら、より洗練された形で問題解決をするための手立てとして数学を創り上げていくような授業」を構成するための示唆を得たいと考えている。

〈引用・参考文献〉

Gravemeijer, K. (1997). Mediating Between Concrete and Abstract. T. Nunes & P. Bryant (Eds.). *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (pp.315-345). East Sussex: Psychology Press.

広中平祐, 杉山吉茂他. (1998a). 新編新しい算数３下. 東京書籍.

広中平祐, 杉山吉茂他. (1998b). 新編新しい算数５上. 東京書籍.

藤田宏他. (1998). 新編新しい数学１. 東京書籍.

国立教育研究所(1996). 小・中学生の算数・数学, 理科の成績第３回国際数学・理科教育調査国内中間報告書東洋館出版社.

熊谷光一.(1999). 子どもがリアリティをもって数学をつくる数学教育. 新算数教育研究会編集. 新しい算数教育, *344*, 30-31.

正田良.(1999). 子どものつまずきから学ぶこと－一次方程式と式の計算を中心に－. 杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会（編著）. 新しい算数・数学教育の実践をめざして (pp.163-172). 東洋館出版社.

吉田亨.(1999). 算数授業における子どものリアリティの構成と発展－ Realistic Mathematics Education の理論を手がかりとして－. 上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文（未公刊).