数学の授業におけるコミュニケーションに関する研究
－中学３年「平方根」の授業を例にして－

鈴 木　則 夫
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

筆者は、生徒たちが自分の知識や考えをもとに問題を解決したり、解決したことをお互いに出し合いながら、新しく学習している内容を理解していくような授業にしたいと考えている。また、拙い考えや、間違った答えを出した考えも大切にされるような教室文化を創造したいと考えている。しかし、その一方で、筆者自身、各生徒によって習熟の差が大きいと感じながらも、すべての生徒が「できた」という実感をもって授業を終えられるようにしたいとも考えていた。

筆者には､このような思いが常にあったが､まず、すべての生徒が「できる」という実感をもたせたいという思いの方が強く、その結果、生徒がつまずかないように問題を細かく設定した授業を行っていた。しかし、結果として､ひとりひとりの考え方を犠牲にしたり､他の人から教えてもらった解き方を覚え、練習問題を多く解けばいいといった受け身的な姿や、数学は難しいといった感情を抱く生徒が目立つようになったと思われる｡そのため､授業における権威を教師ではなく、生徒の社会的な活動に求めている Lampert,M(1990) や Yackel,E ＆ Cobb,P(1989 他）の研究、教室文化に深く関わっているとされるコミュニケーションに注目してきた(鈴木,2000)。

そこで､本論文は実際に中学３年｢平方根｣の授業を実施し、分析することを通して、具体的に生徒たちの考えが大切にされる授業の創造への示唆を得ることを目的とする。

２．研究の背景

数学教育の研究において、学級の教室文化に目を向けることの大切さを示唆する研究が見られる。例えば、関口（1997)は教室の中で行っている教師や生徒間のやりとりのパタン、授業の中のお互いに暗黙裡に守ろうとするルールや価値意識といったものがその教室独自の｢文化｣を生み出しているとした上で、子どもたちが数学に有用性や創造性を認める信念を抱くような教室を創造することの大切さを指摘している。また、金本（1998)は｢子ども自ら考えたことが、それが拙くても他者に受け止めてもらえれば､やはり『うれしい』のである」と述べて、学級の中において他者との関わりに目を向けること、数学の授業の中で生徒同士のコミュニケーション活動を充実させることの大切さを指摘している。更に Yackel,E ＆ Cobb,P(1989 他)は、教師と生徒のコミュニケーションを通して社会的規範が発展していく様子を報告している。

Lampert,M(1990)は、本来「数学する」とは命題を推測することに始まって反証や反駁を通して仮定の検証へと進む“ジグザグ”な道をたどるものであるが、一般の人は「数学する」ことを、既にできあがっているものを正しいルールに当てはめて、正しい答えを得ることと考えているとしている。そして、このような考え方は学校経験によって形作ら

れるとしている。その上で、Lampert,M は教師が知識を伝える数学ではなく、数学者が行っている数学と同じように“ジグザグな道”を進む議論を通して数学の知識を学んでいく授業を実践している。彼女の実践の中で生徒たちは、教師から答えを鵜呑みにするのではなく、数学の知識を自分達の考えで構成している様子が報告されている。また、間違った答えを導いた考えでも、根拠が明確である考えに対して、決して権威で否定することなく、議論をし続けた生徒たちの姿や、そのような間違った考えでも、新しい知識を学ぶ際に役立っている様子が報告されている。このように、Lampert,M の実践において生徒たちは、数学の知識と共に学び方や授業の参加の仕方についても学んでいる。

これらの先行研究は、コミュニケーションのあり方と教室文化の形成とが密接に関係していることを示唆している。しかしながら、一方で、Lampert,M がいう“ジグザグな議論”をどうすれば実現できるかという疑問が生まれる。江森(1991)は生徒同士のコミュニケーションによって新しい知識を学ぶためには生徒同士の考えに「ずれ」が必要だと述べている。では、どうすればその「ずれ」を意図的に生じさせることができるかという問題が次の問題として残っているように思われる。

そこで、生徒同士が“ジグザグな議論”といった論理的な議論を伴うコミュニケーションよって、数学の知識を学んでいくような授業を具体的な実践を通して考えていく。

３．研究の方法

3.1 実験授業の構想

具体的な授業を通して、生徒同士の論理的な議論によって、数学の知識を学んでいくような授業の創造への示唆を得るために、教材の側面から考察を行う。ここでは、中学３年で学習する「平方根」の単元における、無理数の導入場面を例として取り上げる。

中学３年で扱う単元「平方根」は、生徒がもっている数の概念を、数学的には有理数から無理数へ拡張する場面である。一方、数学史的に見れば、無理数はそれ自体異常なものとして発見された経緯があり、分数で表しきれない数が存在することは、生徒にとって驚きであるはずである。それだけに無理数の学習は、生徒たちの数の世界についての見方を広げ得る魅力がある教材となりうる（岩崎,1998)。

岩崎(1992,1998)は、「ピタゴラス学派の人々の考えは非常に素朴であり、無理数を初めて学習する生徒の心境に相通ずるものを持っている」と指摘した上で、無理数の学習の陶冶的価値について指摘している。しかしその一方で、教科書では「ａを負でない数とするとき、２乗してａになる数をａの平方根といいます」というように既に数が存在するものとして提示されていることを指摘して、何の不思議さも驚きも感じないままに学習が進んでしまうと述べている。その上で岩崎は、ピタゴラス学派が音程から非通約性概念を発見した過程をもとにした、教材構成への視座を示している。

> 「つまり、ピタゴラス学派は、全ての音程は数（整数の比）で表現できると考えていたが、音程を２等分する問題にぶつかって（ａ.)、数で表現できないような音程が幾何平均によって理論上考えられることがわかった（ｂ., ｃ.)。そして、『全ての音程は数で表現できる』を保持しようとすれば、そのような音程（音）はないとすればよかったが、そのような長さ（幾何平均）を幾何的に作図する方法を知っており（ｅ.)、しかも長さが音程に対応していることを知っていたので（ｄ.)、そうすることもできなかった。
>
> 　したがって、ａ．～ｅ．は、全く新しく非通約性の概念が生じうるためには、どのような前提や矛盾（例えば、ｃ．と

ｅ．は矛盾する）がなければならなかったかを示している。」（岩崎,1992）

無理数は、現在に至っては既にその存在は知られている。しかし、岩崎が指摘しているように、単に既知の事実として生徒に示すのではなく、無理数が発見された歴史的な流れをもとに授業を構想することによって、生徒の数概念のよりよい理解につながるのではないかと筆者は考えた。

岩崎の指摘を具体化するためには、平方根を導入する場面で、次のような授業の流れが考えられるのではないかと筆者は考えた。

① 例えば、２乗して２になる量の存在を数（有理数）をもとに考えようとする場面……（岩崎のａ．に相当）

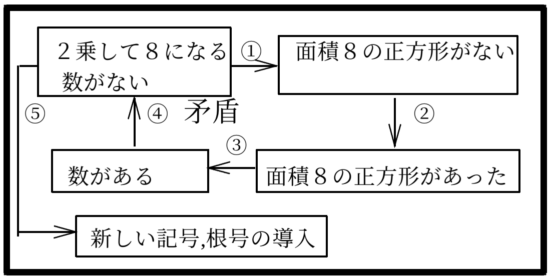
②数がないから、量が決まらない（存在しない）と考える場面……（岩崎のｂ．に相当）

③量が決まる（量が存在する）ことを知る場面……（岩崎のｃ．に相当）

④量が決まることと数がないことに対して矛盾を感じる場面……（岩崎のｅ．に相当）

より具体的な授業構想として、筆者は、「面積８の正方形を作図する」問題を解決することから授業をはじめようと計画した。生徒たちは、面積８の正方形の作図を考えるにあたって、まず、１辺の値を求めるだろうと予想した。しかし、１辺の値は決まらないので正方形が描けない、あるいは存在しないという結論に達すると考えた。このような問題設定を行うことで、岩崎が指摘するような非通約量の発見の歴史的な流れに沿うような授業が行えるのではないかと考えた。

図１は、この授業構想を図式化して示したものである。このような授業の流れを想定したとき、①から④の間には矛盾が起きる。例えば、①と③、②と④の関係は、数の存在と量の存在を同一に考えている場合矛盾する結果である。この矛盾を解消する過程のおいて、仮説を立てその検証を行ったり、矛盾する考えが、生徒同士の考えのずれを生じさせるのではないかと考えた。つまり、Lampert,M のいう“ジグザグな議論”や江森のいう“ずれ”が生じるのではないかと考えた。



（図１：筆者が期待した生徒の思考の流れ）

3.2 分析の視点

授業で行われたコミュニケーションを分析するための視点として、Fonzi,J（1998）の研究を取り上げる。Fonzi,J は、授業で行われたコミュニケーションを内容、形態、様式の３つの要素から特徴づけており、教師の教授行為も１つのコミュニケーションとみなしている。例えば、教師が読み物教材を生徒に読ませる行為も、教師から生徒へ（形態）、読み物を読ませること（様式）を通して、本に書かれてあること（内容）を伝えたコミュニケーションであるとしている。その中でも様式について Fonzi,J は、コミュニケーションする際に用いる様式は情報の送り手の意図と密接に関わっていると指摘している。例えば今の例では、生徒同士のコミュニケーションを起こしたいという教師の意図があり、それを実現すべく、意識的に読み物を読ませるという様式をその教師が選択したと述べている。筆者はこの点に注目した。なぜなら、Fonzi,J のように教師の教授行為すべてを教師から生徒へのコミュニケーションとみなし、その際の様式を意図的に選択することによって、教師がねらいとする生徒同士のコミュニケーションを意識的に起こすことができるのではないかと考えたからである。そこで、

本文では送り手の意図を明確にするために、Fonzi,J が用いた３つの要素に、この意図を加え、４つの視点からコミュニケーションを分析することにする。

3.3 授業

筆者は、3.1 で示したような授業を計画し、平成 12 年５月に栃木県の公立中学校の複数の学級（A，B組）でそれぞれ４時間授業を行った。授業の様子は、ビデオカメラ１台と、カセットレコーダ１台によって記録した。なお、１クラスの生徒 38 人のうち約４分の１の生徒は、中学１年生のときに筆者の授業を受けたことがある生徒である。

授業は、いずれのクラスもまず教師から①面積 16 の正方形を作図する、②面積４の正方形を作図する、③面積８の正方形を作図する問題がそれぞれ出された。A，B組とも、面積８の正方形の作図に対して多くの生徒たちは、区間縮小法の考えを使って小数で１辺の長さを求めようとしていた。そして、全体での話し合いの中で、「２乗して８になる数がないから、面積８の正方形は描けない」という結論に達した。このように、授業の流れはほとんど一緒であった。しかし、その結論を導く過程において、論理的な議論によって導くことができたクラスと、そのような議論が行われなかったクラスがあった。また、その後の議論も若干異なっていた。そこで、この２つのクラスのコミュニケーションの違いについて Fonzi,J の観点から理解することを試みる。なお、以下生徒の名前はすべて仮名である。

４．授業の分析と考察

4.1 ２乗して８になる数の近似値の求め方を話し合う場面における様式の違い

(1)言葉を様式に用いたA組の授業

授業はまず、教師が面積 16 と４の正方形を作図する問題を出した。生徒たちは、１辺の長さをもとめ作図した。次に教師は面積８の正方形を作図するように求めた。

個別解決の場面で、多くの生徒が２乗して８になる数を小数で求めていたが、若村をはじめとする数人の生徒は、「２乗して８になる数がないから面積８の正方形はない」とする結論を出していた。

全体での話し合いの場面で教師は、個別解決で取り組んだことを発表するように求め、挙手した秋本を指名した。秋本は「２乗して８になる数がないので、１辺×１辺をして８に近づけるようにした」と自分の考えを発表した。それに対して若村は、すかさず「１辺×１辺を８に近づけるようにしたって、ピッタリじゃないとダメじゃないか」と反論した。教師は、若村の反論を一時棚上げし、秋本に対して「この後具体的にどうやったの」と質問した。秋本は「2.5 × 2.5 からはじめた」と述べた。さらに花村が「2.828 × 2.828=7.9999」と発言し秋本の考えに補足をした。このように、２乗して８になる数が 2.828 位になることが示されたのを受けて大場が「2.828 × 2.828 ＝ 7.9999 だったら８になるじゃん」と述べ、上村も「四捨五入すれば８になるじゃん」と続いた。それに対して、２乗して８になる数はないと考えている若村は「そしたら面積“約”になっちゃうじゃん」と述べて、その考えを否定した。

ここまでの秋本から他の生徒へのコミュニケーションは以下のように特徴づけられる。

（A-1)形態：秋本から他の生徒、教師へ
　内容：秋本がどのように考えたか
　　１辺の長さはいくつか
　様式：１辺の長さの計算の仕方および結果を示すこと、議論
　意図：１辺の長さを小数で表現できれば、正方形が作図できると考えている

また、若村から他の生徒へのコミュニケーションについては、以下のように特徴づける

ことができる。
(A-2)形態：若村から他の生徒、教師へ
内容：２乗して８になる数がないから正方形は描けない
様式：発言
意図：１辺の長さを小数で表現できるかどうかで、正方形が作図できるかどうか考えている

若村の発言の内容は秋本のコミュニケーションとは異なるが、１辺の長さを数で表すことができるかどうかで、正方形が描けるかどうか考えているという点で一致している。

生徒たちは､小数で求めた式を述べること、議論することを様式として、面積８の正方形が描けるかどうかについてコミュニケーションしている。そして、生徒たちは数を求めることをもとに、正方形の作図を考えようとしている。

一方、この場面での教師のコミュニケーションについて取り上げる。教師は、面積８の正方形の問題を出す前に、１辺が整数値で求められる正方形を作図する問題を出した。また､区間縮小法で２乗して８になる数を求め、面積８の正方形の１辺を求めようとしていた秋本を指名し、自分の考えを発表するよう指示した。その秋本が「１辺×１辺をなるべく８に近づけるようにした」と発言した際､「秋本君、この後具体的にどうやったの」と聞き直した。また、花村という生徒が「2.828 × 2.828 ＝ 7.9999」と発言した際、「2.828 ってどっからでてきたの」と述べて、更に詳しい説明を求めた。また、生徒の発言を板書し、図２のように記していた。

８の２乗がないから, １辺×１辺をなるべく８に近づけるようにした。

はじめに２と３の間だなと思った。
2.5 からはじめた。
2.5 × 2.5 ＝ 6.…　でダメ
どんどん大きくしていった
2.82 × 2.82 ＝ 7.9999

（図２：A組、授業終了時の板書）

このように、ここでの教師は生徒に質問しながら、区間縮小法で２乗して８になる数の近似値の求め方を生徒に発表させようとしている。つまり、問題設定や質問を様式として、１辺の長さをもとに面積８の正方形の作図を考えさせようとしている意図があることがわかる。これは、無理数の発見に関わる歴史的な流れに近づけるような授業構想を、問題設定や生徒とのコミュニケーションを通して実現しようとしたためである。よって、ここでの教師のコミュニケーションを次のように特徴づけることができる。
(A-3) 形態：教師から生徒へ
内容：面積８の正方形の１辺の長さをどのように求めるのか
様式：面積 16、４、８の問題を出す、面積８の正方形の１辺の求め方を聞く、生徒の発言を板書する
意図：面積８の正方形の作図を、１辺の長さをもとに考えさせようとしている
また区間縮小法で近似値の求め方を理解させたいと考えている

(A-1)から(A-3)までの生徒、教師のコミュニケーションを見ると、用いている様式は言葉によるものが主であった。

(2)黒板に書く様式を用いたＢ組の授業

一方、Ｂ組でも教師はＡ組と同様に面積 16 の正方形、面積４の正方形を作図する問題を出した。Ａ組と同様に、生徒たちは１辺の長さをそれぞれ４ cm、２ cm と求め、１辺の長さをもとに正方形を作図した。続いて教師は､面積８の正方形を作図する問題を出した。個別解決の場面において、やはりＡ組と同様に、１辺の長さを小数で求めることで、面積８の正方形を作図しようと考えている生徒が多くいた。全体で、面積８の正方形の作図を

話し合う場面で、田代が図３のように板書し、１辺の近似値とその求め方を発表した。

2.82 × 2.82 ＝ 7.9524
2.824 × 2.824 ＝ 7.974976
2.827 × 2.827 ＝ 7.991929
2.829 × 2.829 ＝ 8.003241
2.828 × 2.828 ＝ 7.997584
2.8284 × 2.8284 ＝ 7.99984656
2.8285 × 2.8285 ＝ 8.00041225
.82842 × 2.82842 ＝ 7.999959696
2.828427 × 2.828427 ＝ 7.999999294
2.8284271 × 2.8284271 ＝ 7.99999986

（図３：田代の板書）

田代	まず、2.82 × 2.82 をやってみたら 7.9524 になって、徐々に増やしていったら 2.827 のときにかなり近づいて、思い切って 0.002 増やしたら８を超えてしまって、だから 0.001 減らして 2.828 にしたら、８を下回ったので、今度はその真ん中くらいの 2.824 位でやってみた。（略）８にすごく近づいたけど、８にはなっていない。

ここでの田代のコミュニケーションを特徴づけると次のようになる。

（B-1） 形態：田代から他の生徒、教師へ
内容：２乗して８になる数の近似値の求め方
様式：黒板に書く、自分が考えたことを説明する
意図：２乗して８になる数を求めることで、面積８の正方形の作図を考えようとしている

ところで、この場面は田代が２乗して８になる数の近似値を発表しているものの、教師が田代のノートを見て田代に発表するように求めたり、田代が説明している際に田代が黒板に書いたものに田代の発言の内容を書き加えていた。このことは教師から生徒へ、２乗して８になる数の近似値の求め方を田代の発表を様式として用いたコミュニケーションと見ることができる。よってここでの教師の教授行為を、以下のようにコミュニケーションとして特徴づけることができる。

（B-2） 形態：教師から生徒へ
内容：田代がどのように考えたか
区間縮小法による、２乗して８になる数の近似値の求め方
様式：田代の発表、黒板に書く
意図：２乗して８になる数の近似値の求め方を理解させたい

この場面で、２乗して８になる数の求め方を話し合うことは、Ａ組でも行っていた。しかし、Ａ組では、教師が「2.828 ってどっからでたの」と質問し、生徒が「２と３の間だと思った」「2.5 からはじめた」と答えることによって、２乗して８になる数の求め方をコミュニケーションしている。つまり、用いている様式は言葉である。一方、Ｂ組では田代が黒板に書くという様式を用いている。このように、２つのクラスでは同じ内容をコミュニケーションしようとしているが、用いている様式が異なっている。

4.2 面積８の正方形が描けるかどうかを議論する場面

(1)曖昧なまま議論が終始したＡ組の授業

Ａ組の授業では秋本の発表の後、教師は若村の「２乗して８に近づけるようにしたって、ピッタリじゃないとダメじゃないですか」という発言を取り上げ議論するように促した。

392 T	若村君だったっけ、ぴったりじゃないとダメっていってくれたんだよね。これに対してはどうですか？
393 秋本	描けない。
394 松田	描けない。
395 T	描けない？正方形描けないですか。
396 花村	すごく細かい数にしたら描けるかもしれない。
398 秋本	細かく数を出せれば描けるかもしれないけれど、現実的には無理。
405 若村	先生、あってても描けないよ。定規がない。

（不明）		目盛りがない。
411	T	…目盛りがないから描けないと言っていたんだけど。正方形描けない？

ここでの生徒同士、あるいは生徒から教師へのコミュニケーションを特徴づけると次のようになる。

(A-4)形態：生徒同士、生徒から教師へ
　　内容：面積８の正方形が描けるかどうか（面積８の正方形は描けない）
　　様式：言葉を中心とした議論
　　意図：１辺の長さを小数で表せるかどうかで正方形が描けるかを考えている

(A-1)から(A-4)まで生徒のコミュニケーションについては、様式と意図が首尾一貫している。一方、内容については、１辺の長さはいくつかではなく、面積８の正方形が描けるかどうかに焦点が絞られた。特に花村以外の生徒は、「面積８の正方形は描けない」と発言している。

しかし、小数を細かく求めれば描けるかもしれないという花村の意見に対して、秋本や若村は「細かく数を出せれば描けるかもしれないけど現実的には無理」「あっても描けない。定規がない」とも述べている。つまり、２乗して８になる数がないと考えている生徒も確証があるわけではない。特に若村は、教師が面積８の正方形を作図する問題を出題してすぐ、「描けるわけないじゃん。８は何の２乗でもない」と発言していた。その際教師は「本当にないのか」「証明して」と述べて、なぜ２乗して８になる数がないと言えるのかその理由を考えるように求めた。しかし、教師は理由を考えるように求めたものの具体的に考えるための道具を示すことはしなかった。その後の全体での話し合いの場面でも、若村はなぜ２乗して８になる数が小数では表せないのかを説明していない。このことから、若村は証明する道具を持ち合わせていなかったことがわかる。その結果、Ａ組では２乗して８になる数がないと考えていた生徒も確証があるわけではなく、曖昧のまま議論が終始していた。

(2) ２乗して８になる数がないことの説明が行われたＢ組の授業

一方、Ｂ組では教師は、田代の発表をもとに、クラス全体に「８に近づいているけど、１辺出せそうじゃないですか」と質問した。多くの生徒が、わからない、おそらく１辺の長さは求められないだろうという考えを発表する中、しばらくして小久保は、図４のような事例を挙げ、次のように発言した。

　　2.828 …… 4 ←１～９
× 　2.828 …… 4
　　　　　　　6 ←０にならないから
　　　　　　　　　　整数にならない

（図４：小久保の発表）

小久保	小数で、もしこの後、きっちり表せるとしても、最後の数は１から９までのうちのどれかでしょ。そしたら２乗するんだから、１×１＝１だし、２×２＝４だし、ずっとやっていって９×９までどれも１の位が０にならないから、２乗しても 8.0000 というふうにはならないので、これ以上細かくしても、２乗して８になる数はない。

この小久保の考えは、小数が無限に続くことは示しているものの、２乗士手８になる数が循環するかどうか確かめていないため、数学的には不十分なところもないわけではない。しかし、学級では小久保の考えが受け入れられ、２乗して８になる数が存在しないから、面積８の正方形は描けないという結論に達した。

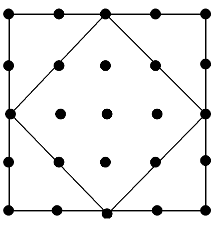
Ａ組とＢ組では、共に２乗して８になる数がないから面積８の正方形が描けないという結論に達している。しかし、１辺の近似値を話し合う場面で使っていた様式が言葉を中心

としているＡ組と、田代が黒板に書いて示したＢ組とでは違いがある。例えば、教師の発言にしても、Ｂ組では、田代の発表のあと、教師が田代が書いた計算式を指しながら「８に近づいているけど、１辺出せそうじゃないですか」と述べており、１辺の長さが出せるかどうか聞いている。一方、Ａ組の教師の発言「ピッタリじゃないとダメだって言っていたけど、これについてどうですか」は、Ｂ組のときより具体的ではない。

Ｂ組では田代の説明が、２乗して８になる数があるかどうかという問題を生み、更に黒板に書かれたものが、小久保にとってその問題を考える具体的な手がかりになったと考えられる。そして、学級全体が確証をもって２乗して８になる数がない、よって面積８の正方形が描けないという結論を得ることができた。このことは、２乗して８になる数がないと考えていながらも根拠を示すことができず、曖昧なまま議論が終始したＡ組とは異なる。

このように、Ａ組とＢ組では、２乗して８になる数の近似値の求め方を話し合う場面で用いた様式の差が、２乗して８になる数が小数では存在しないということを根拠のある説明ができるかどうかという議論の違いとなったと考えられる。

4.3 量が存在することと数がないことの矛盾について議論する場面



（図5：面積8の正方形）

２時間目、Ａ，Ｂクラスとも、教師は格子点のついたプリントを配布し、面積の異なる正方形を描くように求めた。生徒たちは、いろいろな大きさの正方形を作っていくなかで、面積８の正方形の存在を発見していった。３時間目、教師は面積８の正方形を描くことができた生徒を指名し、面積８の正方形が描けることを学級全体に示した。

（１）量と数との間の矛盾に対して仮説を立てて、その矛盾を解消しようとしたＢ組の議論

生徒の発表によって、面積８の正方形が描けることが示されたので、教師は、「小数で２乗して８になる数はないって言ってたよね、でも面積描けたから長さあるんじゃない。」と述べ、２乗して８になる数がないことと、長さがあることの矛盾について議論するよう促した。

148	T	…。みんな昨日、小久保さんが何を言ったか覚えてる？小久保さんが言ったのは、（略）小数でずっと続いても２乗してぴったり８になる数はないって言ったわけ。そうだよね。
150	小久保	はい。
151	T	だけど長さはあるんだよ。どういうことだと思う。小数で表せないんでしょ。
158	田代	絶対表せないんですか？
163	T	小久保さんがこんなこと（図４のようなこと）言っていたじゃん。
164	田代	うん、言っていた。それはわかる。
169	T	だけど表せるかもしれない？
170	田代	うん。
171	T	ほー。っていう田代君の話があります。みんなどう思う？…小久保さんどう？
172	小久保	わからない。うー。
175	江藤	あれ（図５の四角形）、正方形じゃない。
176	T	これ（図５の四角形）正方形じゃない？

この後、学級ではひし形か正方形かという議論がおき、面積８の四角形が正方形であることが説明された。

この場面では、田代は、小久保の考えは理解できるとしつつも、でも「小数で表せるのではないか」と述べている。それに対して、江藤は「（図５は）正方形ではなくてひし形」ではないのかと述べている。また、田代の考えに対して意見を求められた小久保は「わからない。うー」と答えている。このように、３人は、小数がないことと長さがあることとの間に矛盾を感じていることがわかる。Ｂ組

では、面積８の正方形が描けないということが認められていたが、存在性については議論をしていなかった。しかし、少なくともこの３人は、２乗して８になる数がない以上、１辺の長さが決まらない、よって面積８の正方形が存在しないと考えていたと思われる。なぜなら、もし数がないが正方形の存在そのものを認めていたならば、田代の「数で表せるかもしれない」や、江藤の「ひし形」という発言が起きないと考えられるからである。

この量の存在と小数で表すことができないという矛盾に対して、田代は小久保の考えを再考しようとし、また、江藤は教師が示した面積８の正方形の図そのものを疑い、再考する対象にしようとしている。このようにＢ組では、矛盾した２つの結論に対して、再考するための振り返る具体的な対象がありその対象に戻って検証しようとしていた。その際、自分たちが得た結論と、教師から示された結論を同等に扱い、共に再考する対象として扱っている。

(2)再考するための対象がなく、議論が膠着してしまったＡ組の授業

一方、Ａ組でも、生徒が図５のように面積８の正方形を黒板に描き、面積８の正方形が描けることが示されたので、教師は１時間目の若村の意見を取り上げた。

066	Ｔ	はい、じゃ最初の話に戻りますが、(略) 一番最初に面積８の正方形ができないかと聞いたときに、できないってみんな言わなかった？だけどできたじゃん。
071	若村	じゃ先生、１辺出して、かけたら８になるんですか？ちゃんと。
072	Ｔ	１辺出してかけたら８になるんですかって、エヘエヘエへ。どう思う？
073	若村	なんないですよ。
074	Ｔ	なんない？何でなんないの？
075	若村	何となく。
076	Ｔ	いま、若村君が１辺出してかけたら８になるんですかって、で若村君はならないって、言っているけど、どうですか？なりますか？なりませんか？
077	田島	ならない。
078	Ｔ	ならない？何で？
079	田島	…

Ａ組のこの場面の議論では、面積８の正方形が描けることが示されたとき、教師が「正方形描けないって言っていたけど､描けたよ」と切り出している。それに対して若村が「１辺出して掛けたら８になるんですか」「ならないよ」と述べたものの、それを確かめる道具を持ち得ておらず、「何で」という教師の質問に対し、「何となく」と述べるに留まっている。また、若村と同じように、「ならない」と発言した田島も、その根拠を述べることができず議論が膠着してしまている。

また、若村のこの発言は、生徒が考えた方法と異なる方法で正方形が描けることを示したため、「認めたくない」とする感情を表したものとも見ることができる。他にも、授業終了後「格子点のついたプリントがあったから面積８の正方形が描けたけど、なかったらそういう発想は思いつかなかった」と発言する生徒がいた。

このように、生徒たちはＢ組と同様に量が存在することと数がないことの矛盾を感じているものの、それを解消するために考える道具や、戻る場面がないことがわかる。また、教師の「面積８の正方形ができないかと聞いたとき、できないってみんな言わなかった？だけどできたじゃん」という発言や、生徒のそれに対する発言のように、感情的な議論が行われたり、正しい答えを得ることができなかったことに後悔をするような発言があった。

Ａ組, Ｂ組とも１時間目の話し合いの中で、２乗して８になる数がないという結論に達していた。そして、２時間目教師が格子点の付いたプリントを用意し、いろいろな大きさの

正方形を描くように求めることで、生徒たちは、面積８の正方形が描けることを発見していった。生徒が面積８の正方形が描けることを発見したり、指名された生徒が黒板に作図しながら面積８の正方形が描けることを発表した。このような面積８の正方形が描けることを学級全体が共有する行為は、生徒によって行われてはいるものの、教師が格子点の付いたプリントを用意したり、生徒に発表するように求めるという様式を用いて、面積８の正方形が描けることを示した、教師から生徒へのコミュニケーションとみることができる。つまり、２つのクラスとも、生徒たちの２乗して８になる数がないから面積８の正方形は描けないという結論に達していたが、それに反する結果を教師が生徒に示した。しかし、その後の議論をみると２つのクラスの間で異なっている。Ｂ組では、教師が示した結果を鵜呑みにせず、生徒たち自らが導いた結論である数がないから面積８の正方形が描けないという結論と、格子点の付いたプリントを使って面積８の正方形が描けたという教師が示した結果を同等に扱い、共に量と数との矛盾を解消するために再考する対象になっていた。一方、Ａ組は具体的に矛盾を解消するために考える道具を持ち得ておらず、議論が膠着してしまった。また、面積８の正方形が学級全体に示された後の教師の発言も、小久保の説明と、面積８の正方形の作図の２つを具体的に指摘しながら、量と数の間の矛盾について検討するよう促しているＢ組での発言と、面積８の正方形が描けるかどうかの議論が曖昧なまま終わってしまったため具体的な指摘をすることができず感情的な発話を行ったＡ組とでは、議論の質という点で明らかに異なっている。

4.4 授業への示唆

筆者は、無理数の発見における歴史的な流れに沿うような授業を計画することで、Lampert,M のいう“ジグザグな議論”ができるのではないかと考えた。しかし、このような授業を構想したものの、論理的な議論を行うことができたクラスがある一方で、感情的な議論が多く行われたクラスが存在した。この２つのクラスの授業の比較の結果、同じ内容についてコミュニケーションしたにもかかわらず、用いた様式が異なったことによって、その後の議論が異なっていったことがわかった。特に、書くという様式を用いたことで、それが考える道具になり、また、２乗して８になる数がないことが根拠をもって示されるきっかけになった。さらに、根拠をもって２乗して８になる数がないことが示され、なおかつ教室全体に受け入れられたことによって、教師から面積８の正方形が描けることを示された、つまり生徒にとっては自分の結論と異なる結果を示された後も、教師から示されたことを鵜呑みにするのではなく、矛盾を解消するために再検討する活動を行うことになった。つまり、どのように考えたかや根拠をはっきりさせる際、用いる様式は、言葉のように流れていくようなものではなくて、書くという様式が大切であった。

ところで、Ａ組とＢ組では、教師は同じ意図のもとで授業を行っていたはずである。ではどうして､様式の違いが起きたのだろうか。

両クラスとも、１時間目に面積 16 の正方形から面積８の正方形の問題まで３つの問題が教師から出題された。問題解決及び、考えを発表する場面で、Ａ組では、教師が「それじゃ誰か黒板にやってくれる人？ハイ、じゃ永山さん黒板にやってください」と発言して、挙手した永山を指した。また、その後の面積８の正方形について話し合う場面でも、教師は挙手した秋本を指名した。更に、秋本が「１辺×１辺が８に近づくようにした」と述べたのに対して若村が「ピッタリじゃないとダメ」と発言するなど、自分の考えを抵抗なく述べることができる生徒がいた。一方、Ｂ組では、

教師「誰か発表してください」、生徒「…」、教師「どうしようかな、ここは昔のよしみで田代君、頼んでいいでしょうか？」というように、３つの問題全てにおいて、教師が発表を促す発言を行っても生徒から自主的に発言されることがなく、教師が生徒を指名し、指名された生徒が考えを発表している。そして、区間縮小法の考え方を発表させる際にも、田代を直接指名し、ノートに書いてあることをそのまま黒板に写すようにと指示して発表させている。このような学級の様子からＢ組では、黒板に書かせるという様式を教師は選択したと考えられる。一方、Ａ組では、はじめから発言が活発に行われた、つまり言葉を様式に用いたコミュニケーションが行われており、ことによって、区間縮小法での近似値の求め方をコミュニケーションする場面でも、言葉を様式として用いていたと考えられる。しかし、分析でも示したように、区間縮小法で用いた様式の差によって、その後の議論が大きく変化している。更に言えば、面積８の正方形が教師から示された後、Ｂ組では小数で表せるのではないかや、正方形ではなくてひし形ではないかと、生徒達が量と数との間の矛盾を解消するために仮説を立てそれを確かめる議論が行われており、Ａ組よりも議論が活発になっている。

このことはＡ組のように、はじめから活発な発言が見られてもそのままにしておけばいいのではなく、適切に考える道具を与えることではじめてジグザグな道を進む議論のような論理的な議論が期待できることを示しているのではないかと考える。つまり２つのクラスとも Lampert,M の実践を参考にして、教師は生徒に根拠を明確にするように求めていたが、「ただ根拠を出しなさい」と述べるだけでなく、根拠を求めるにも考える道具となり得る情報を教師が生徒へ示すことが大切であると考える。また、逆にＢ組の事例は適切に考える道具が与えられれば、生徒たちは自分たちが抱いた矛盾を解消するために、「２乗して８なる数はないのではないか」や「面積８の正方形とされた四角形はひし形ではないのか」というように、仮説を立てその仮説を検証することができることを示しているし、その中で、活発なコミュニケーションが起きる可能性があることを示していると筆者は考える。

教師から示された結果を鵜呑みするのではなく、生徒たちが自分の考えをもとに、問題に対して仮説を立てその検証を行いながら知識を学んでいくことは、筆者が目指す生徒の考えが大切にされる授業の創造に深く関わるものと考える。

このように、様式を意識して使い分けることによって、教師が意図した論理的な考察を行う生徒同士のコミュニケーションを起こすことができる可能性があることがわかった。

５．今後の課題

今後の課題として以下の二点を挙げる。

第一に、教師の意図をより的確に実現するための、様式の選択を含めた教師のコミュニケーションのあり方について更に考えていくこと。第二に、平方根以外の教材についても、生徒の考えをもとに数学の知識を学んでいくようなコミュニケーションが起きる授業を計画し、実施することである。

６．引用・参考文献

Cobb,P, Yackel,E, and Wood,T.（1989）. Young Children's Emotional Acts While Engaged in Mathematical Problem Solving. D.B.Mcleod & V.M.Adams（Eds.）. *Affect and Mathematical Problem Solving*（pp.117-148）. Springer-Verlag.

江森英世.(1991).数学の学習場面におけるコミュニケーションのずれに関する考察　ー送り手の意図と受け手によるメッセージ

の解釈との差異ー.第 25 回数学教育論文発表会論文集,37-42.日本数学教育学会.

Fonzi,J.(1998) . Communication in a Secondary Mathematics Classroom: Some Images.Heinz Steinbring, Maria G. Bartolini Bussi, Anna Sierpinska (Eds.). *Language and communication in the mathematics classroom* (pp.317-339). NCTM.

岩崎浩.(1992).数学史の教材化における「メタ知識」の役割について　ー非通約性概念を例としてー.数学教育学研究紀要.数学教育学研究紀要第 18 号,29-36.西日本数学教育学会.

岩崎浩.(1998).非通約量（無理数）の発見に対するプラトンの見方.一般教科教育学序説（pp.58-75）.大学教育出版.

金本良通.（1998）. コミュニケーション能力の育成. 明治図書

Lampert,M.(1990).真正な学びを創造する.　佐伯胖、藤田英典、佐藤学　編.１１学びへの誘い(pp.189-233). 東京大学出版会.

関口靖広.(1997). 学校数学と教室文化. 日本数学教育学会編.　学校数学の授業構成を問い直す(pp.19-28).産業図書.

鈴木則夫.(2000).数学の授業におけるコミュニケーションの考察　ーコミュニケーションのモードとその効果に焦点を当ててー.上越数学教育研究 第 15 号,95-104.上越教育大学数学教室.