一次関数における学習過程に関する考察

－事象からモデルを構成する活動を重視した教授実験を通して－

林　　　弘
上越教育大学大学院修士課程２年

1　はじめに

中学生にとって，関数は最も苦手な単元の一つである。これは，関数が数や量，図形と異なり，目に見えない２つの数量の間の関係を扱っていることに起因しているのではないかと考えられている。そのため，具体的な場面を想定し，その中の伴って変わる数を表や式，グラフで表現する活動を取り入れた実践が多くなされている。しかし，このような実践は，一次関数の定義をするまでは，具体的な場面を想定しているが，関数の特徴や表現，処理のしかたを学習するとき，具体的な場面から離れ，数値の上だけで指導していることが多い。このような指導は，現実場面を考察する機会が少なく，事象から離れたところで関数の特徴や表現，処理のしかたを指導している。そのため，子どもたちは，関数の有用性を感じることができず，関数に苦手意識を持ち，数学嫌いになっていると考えられる。このような実態を考慮すると，中学校の関数指導において，もっと現実場面と関わりを持ち，事象を考察するために，事象から変数を取り出し，それを関係づけていく活動を豊かにする必要があるのではないかと考える。

子どもたちが，特に苦手としているのは，事象から２つの変数を取り出して対応させてみることや，２つの変数の関係を式に表現することである。これまでの実践，研究では，事象から２つの変数を取り出して，その変化を表に書き，表を横に見れば，変化の様子をつかむことができ，縦に見れば，対応関係をつかむことができると言われてきた。しかし，子どもたちは，２つの変数が伴って変わっていくことや，x の値が１増えるとき，y の値が一定の割合で増えていくことには気づくが，表から式を立てることはなかなかできない。

本稿では，中島の「関数の考え」[1)]を実現する指導過程において，子どもたちがどのようにして事象にアプローチし，状況に依存したモデル[2)]を作っていくのか，そのプロセスを明らかにし，中学校における関数指導への示唆を得ることを目的とする。

2　教授実験の構想

子どもたちが，どのようにして事象からモデルを構成していくのか，そのプロセスを明らかにするために，教授実験を実施した。

教授実験を構成するために，筆者は，現実場面の状況からインフォーマルな知識を引き出す理論である，Gravemeijer の「モデルの自己発展」と Treffers の「学習原則」に着目し，それを概観した。また，関数におけるインフォーマルな知識に着目するために，桐山の「変数の関係を構成する水準」を概観した。そして，これらの理論から，子どもたち自身が，文脈のある状況からモデルを導き出し，そのモデルを発展させていく教授実験の構想を立てた。

教授実験は，平成 12 年 6 月から岐阜県内公立中学校 2 年生で実施し，事前調査，授業，

事後調査で構成した。

事前調査は，この教授実験で焦点を当てる生徒を抽出するために，図１のようにおはじきを並べたとき，その総数を求める問題で実施した。その結果，独立変数に着目できなかった生徒，田中の活動を分析し，その進展を考察することにした。

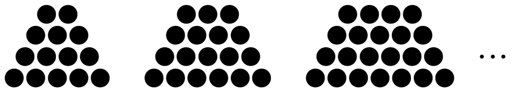


図１　事前調査の問題の図

授業の第１時では，Greeno の一次関数装置（図 2）を，一方のブロック（ウサギ）が 0 目盛りから出発して 1 回転で 2 目盛りずつ進み，もう一方のブロック（カメ）が 15 目盛りから出発して 1 回転で 1 目盛りずつ進むように設定して，「トンネルから先に出てくるのはウサギとカメのどちらでしょう。」「ウサギが 100 目盛りのとき，カメは何目盛りのところでしょう。」という問題を準備した。このとき，装置は，各班に１台ずつ用意した。これは，子どもたちが必要に応じて装置を動かし，装置に戻って考えることができるように配慮したからである。第２時では，ウサギが 0 目盛りから出発して 1 回転で 2.5 目盛りずつ進み，カメが 10 目盛りから出発して 1 回転で 2 目盛りずつ進むように，装置の設定を変更し，「ウサギがカメに追いつくのはどこでしょう。」という問題を準備した。この問題は，解答が装置の範囲を超えてしまうものであり，装置は，提示用のものだけを用意した。第３時では，1 分間で 7mm 燃える黄色の線香と 1 分間で 4mm 燃える茶色の線香を子どもたちに提示し，「21cm の線香（黄色）と 14cm の線香（茶色）があります。座禅を組むとき，自分で線香を選ぶとしたらどちらを選びますか。」という問題を準備した。この問題は，装置の問題よりも，事象との関わりを少なくして，事象の動きを直接見ることができるが，必要に応じて事象に戻ることができない問題である。そのため，事象の動きを別の形で再現する必要がある。この３時間のために準備した問題は，すべて追いつき追い越すイメージが持てる文脈であり，その配列は，事象との関わりがだんだん少なくなるようにした。これは，子どもたちが事象の中から変数を見出し，それを関係づけていく活動は，事象の中にある２つの動きを比較することから，生み出されると考えたからであり，この活動で見出した関係を関数の形式的な表現や処理に接続することを考慮したからである。このように，一次関数の単元の導入時に，状況に依存したモデルを作る活動を３時間設定した。この後，教科書の教材を使って，一次関数の特徴や表現，処理について学習をした。そして，事後調査では，装置や線香の問題と同じ文脈であるが，事象の動きを直接見ることができない，インターネットの料金や携帯電話の料金の問題，積み木の問題，すれ違う列車の問題を準備した。

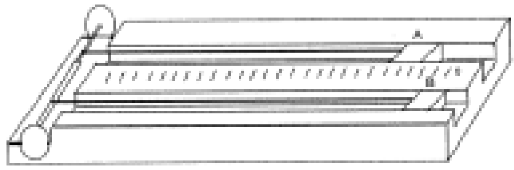


図２　Greeno の一次関数装置

3　教授実験における田中の活動

教授実験において，田中は，事象の中にある知りたいものを捉えるために，どのようにして事象から変数を取り出し，その間にある関係を見出し，状況に依存したモデルを作ったのだろう。ここでは，そのプロセスを分析する。

3.1　状況をそのまま記述する

第１時の Greeno の一次関数装置の問題において，田中は，一方のブロックが追いつき追い越すイメージを持って，２つのブロックの動きを比較し，ブロックの動きをそのまま記述した。

田中は，装置を動かしたとき，まず，左側のブロックが，だんだん追いつき追い越していくことに着目することができた。しかし，田中は，一方のブロックが１進むとき，もう一方のブロックが２進むことに着目することができず，２つのブロックの動きを同時に捉えることはできなかった。その後，田中は，クラス全体の話し合いで，２つのブロックの動きを比較することを知り，さらに，「トンネルから先に出てくるのはウサギとカメのどちらでしょう。」の問題を解くために，ブロックの動きを表に書き出す示唆を受け，カメが 1 でウサギが 2，カメが 2 でウサギが 4，カメが 3 でウサギが 6，というように，カメの動きとウサギの動きを対にして，図３の表を書いた。

図３　状況をそのまま記述した表

3.2　変化のきまりを使ってグラフをかく

第２時[3]の「ウサギが 100 目盛りのとき，カメは何目盛りのところでしょう。」の問題を考えるとき，田中は，２つのブロックの位置を比較する必要に迫られた。ここで田中は，ブロックの位置と回転数の間に何か関係があるのではないかと考え，変化のきまりを使って，累加で座標を求め，回転数とブロックの位置のグラフをかいた。

田中は，縦軸と横軸の目盛りをとり，鉛筆で横軸の 10 を押さえ，そのまま縦線に沿って鉛筆を動かして(10,20)に点を打ち，原点に点を打った。

T:((10,20)を指し)この点はウサギの位置？
田中:うん。
T:(原点を指し)ここは？
田中:最初の位置
T:20回の時はどうなるの？
田中:40。((20,40)に点を打つ。)
T:じゃあ，30回のときは？
(30,60)に点を打ち，(40,80)，(50,100)にも点を打つ。次に，縦軸を1,2,3,･･･と数え15目盛りのところに点を打つ。しばらくグラフ用紙を見つめ，うなづきながら目盛りを数えて(10,25)に点を打ち，同じように目盛りを数えて(20,35)に点を打つ。
T:((0,15)を指し)これは？
田中:これは，カメが最初にいた位置で，10回まわすと25のところに行って，35のところに行って，45のところに行って，というふうになる。
T:あっ，そっか，そっか。できそう？
田中:うん。
(30,45)，(40,55)，(50,65)に点を打ち，･･･
(以下省略)

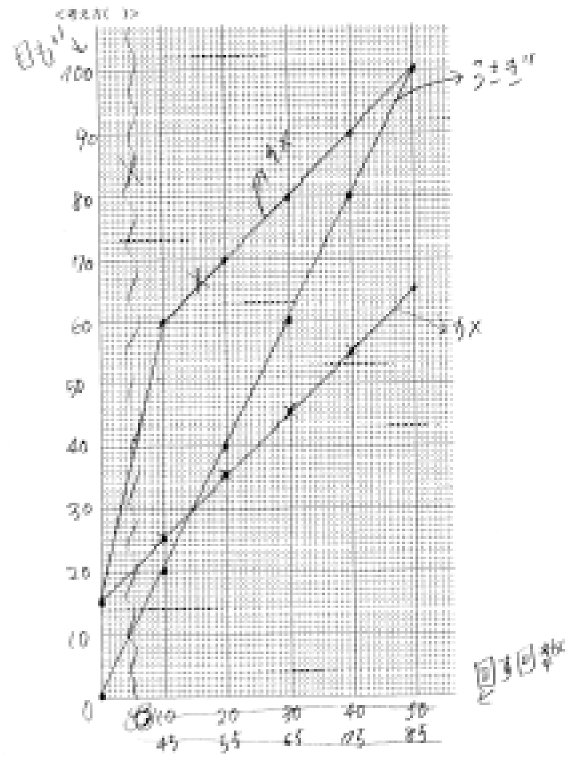


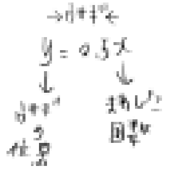
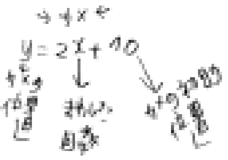
図４　田中が第２時にかいたグラフ

田中は，教師の指導のもとで，1 回転で 2 ずつ進むウサギの動きを，10 回転で 20 ずつ

進む，とまとまりで捉え，累加で *y* 座標を求めて座標軸にプロットし，回転数とウサギの位置のグラフをかいた。そして，回転数とカメの位置のグラフも同様の手続きでかいた。

3.3　回転数と位置の対応関係を捉えてグラフをかく

第２時のグラフをかくとき，田中は，まだ，回転数と位置の対応関係を明確に捉えていないと考えられる。しかし，田中は，第３時の「ウサギがカメに追いつくのはどこでしょう。」の問題を考えるとき，回転数と位置の対応関係を明確に捉え，位置を変化のきまりと回転数の積で求めた。そして，回転数と位置の関係のグラフを *x* 座標を意識してかいた。

> 筆算で2.5×5=12.5と計算して(5,12.5)に点を打ち，原点に点を打った。次に，横軸に書いた10を鉛筆で押さえて(10,25)に点を打ち，筆算で2.5×15=37.5と計算して，横軸の15を鉛筆で押さえて(15,37.5)，横軸の20を鉛筆で押さえて(20,50)に点を打つ。次に，(0,10)に点を打ち，横軸の5を鉛筆で押さえて(5,20)，横軸の10を鉛筆で押さえて(10,30)，横軸の15を鉛筆で押さえて(15,40)，横軸の20を鉛筆で押さえて(20,50)に点を打ち，定規で点と点を直線で結ぶ。それぞれの直線にウサギ，カメと書く。
>
> T:できた？
>
> 畊:50と50。
>
> T:グラフでできた？式つくれる？
>
> 畊:えっ。
>
> T:いっぺん考えてみてよ。
>
> まず，*y*=15+*x* と *y*=5*x* と書き，グラフの横軸の5と(5,12.5)，10と(10,25)を鉛筆でくり返し押さえてしばらく考え，*y*=15+*x* と *y*=5を横線で消し，もう一度，10と(10,25)，5と(5,12.5)，20と(20,50)を鉛筆で押さえて，
>
> 
>
> と書く。
>
> (5,20)と5，(10,30)と10を鉛筆で押さえて，
>
> 
>
> と書く。

田中は，前時に変化のきまりを使って，累加で座標を求め，グラフをかいたことを反省して，ウサギの位置が回転数と１回転で進む量の積で求められることに気づき，計算によって *y* 座標を求めた。そして，*x* 座標を意識して座標をとり，回転数とウサギの位置のグラフをかいた。また，同様の手続きで回転数とカメの位置のグラフをかいた。その後，田中は，このグラフをかいた過程を反省することで，ウサギの位置と回転数，カメの位置と回転数の関係を式に表すことができた。

3.4　共通の単位で事象の動きを捉える

速く燃える長い線香とゆっくり燃える短い線香のどちらが速く燃えつきるのかを調べる問題において，田中は，実験値を記した表をもとにして思考を進めた。このとき，田中は，２つの線香の燃える動きを捉えるために，共通の単位「はかった回数」を導入し，はかった回数と燃えた線香の長さの関係を捉えて，グラフにかき，その過程を反省して立式することができた。

第４時において，「21cm の線香(黄色)と14cm の線香(茶色)の線香があります。座禅を組むとき，自分で線香を選ぶとしたら，どちらを選びますか。」という問題を与えたとき，子どもたちは，口々にどちらを選ぶのか発話した。そして，速く燃える線香を選ぶことで意見がまとまった。次に，何を調べれば速く燃える線香を選ぶことができるのか議論した。その結果，1 分間に燃える線香の長さを調べる，一方の線香が 1cm 燃えるときもう一方の線香が何 cm 燃えるのか調べる，1cm 燃えるときにかかる時間を調べるという

３通りの方法が出された。田中の班は，一方の線香が 1cm 燃えるとき，もう一方の線香が何 cm 燃えるのか調べるために，茶色の線香と黄色の線香に 1cm 刻みの目盛りを書き，実験を行った。図５の表はその実験値である。

茶	1	2	3	4	5	・・・
黄	1	2.8	4.3	5.8		

+1.5　+1.5

図５　実験値をまとめた表

この後，田中は，この実験値をもとにして，どちらの線香が速く燃えつきるのか調べるため，はかった回数とそれぞれの線香の燃えた長さの関係を捉え，グラフをかいた。

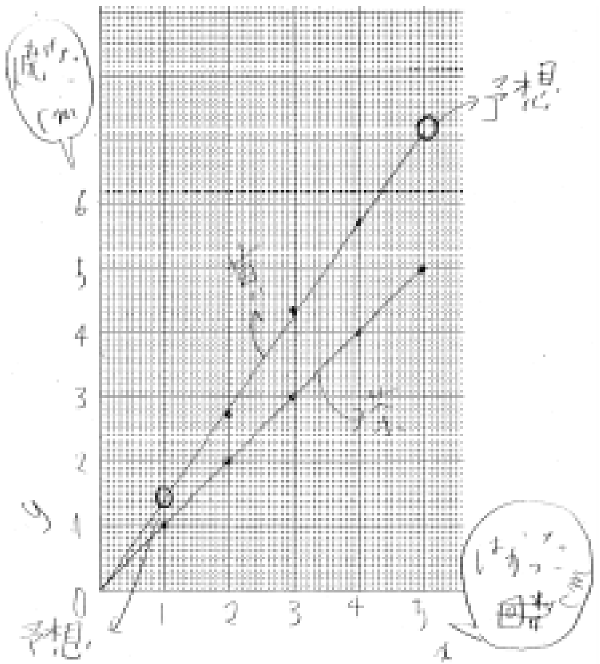


図６　第４時に田中がかいたグラフ

グラフ用紙を取り出し，名前を書く。先に書いた表を見ながら，横10目盛り縦10目盛りの点，横20目盛り縦20目盛りの点，横30目盛り縦30目盛りの点，横40目盛り縦40目盛りの点，横50目盛り縦50目盛りの点，を押さえる。そして，押さえたところに順に点を打つ。次に，横20目盛り縦28目盛り，横30目盛り縦43目盛り，横40目盛り縦58目盛りに点を打ち，点を結んで2本の直線を書き，それぞれに茶，黄と書く。次に，横軸に0,1,2,･･･5と書き，次に，縦軸に1,2,3,･･･6と書く。しばらく考えて，縦軸に焼けたcmと書く。
（中略）
横軸に，はかった回数と書く。

田中は，２つの線香の燃える長さを比較し，どちらが速く燃えつきるのか調べるために，表には書き記していない共通の単位「はかった回数」を導入した。そして，はかった回数と茶色の線香の燃えた長さの関係，はかった回数と黄色の線香の燃えた長さの関係をグラフにかいた。この後，第３時の装置の問題において，回転数と位置の対応関係を意識してグラフをかき，立式したプロセスを反省して，立式しようとした。

ワークシートに式と書き，グラフの縦軸に y，横軸に x と書く。横軸の1と(1,1)を押さえ，式を書こうとするが鉛筆を置き，考え始める。茶色の直線上にある点(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)を順に押さえ，茶→ $y=x$ と書く。次に，横軸の2を押さえて(2,2.8)を押さえ，横軸の3を押さえて(3,4.3)を押さえ，横軸の4を押さえて(4,5.8)を押さえた後しばらく考える。(2,2.8)を押さえた後(3,2.8)を押さえ，そこから縦線に沿って順に1,2,3･･･と数えて考える。

このようにして，田中は，はかった回数と茶色の線香の燃えた長さの関係を立式した。しかし，実験値が適当でなかったため，田中は，はかった回数と黄色の線香の燃えた長さの関係を，自分の持っている方法で立式することができなかった。しかし，教師が，1 回測るごとに燃えた量はどれだけ増えたのか，という示唆を与えると，すぐに $y = 1.5x$ と発話し，立式することができた。

T:////，1回2回3回4回5回やろ。そのもとにしたのは？
艸:茶色の1cm,2cm,3cm,4cm,5cm。
T:茶色の1cm,2cm,3cm,4cm,5cmなの。

回数を横線で消し，cmと書く。

T：（しばらく考えて）ちょっとごめんよ。やり直し，茶色はこの式なんやろ。これはOK？

田中:うん。

T:じゃあ，黄色を回数で見たら，どうなるか。

田中:えっ。

T:(表を指して)これ，どんだけずつ増えとる。

田中:えっと，1.5ずつ。

T:1.5ずつ増えとるっていうことは･･･。

田中:かける1.5のこと？

T:じゃあ，黄色の場合，長さを y にして，回数を x にすると･･･。

田中:1.5ければいい。

黄→ y=1.5x と書く。

T:じゃあ，ここまできたら，こっちの問題どうなる？どっちが早いと思う？

田中:黄色。

T:じゃあ，その理由をここに書いてみてよ。

田中は，しばらく，グラフと表を見比べた後，表に矢印と+1.5 を書き込んだ。そして，もう一度，グラフと表を見比べて，その理由を，次のように書いた。

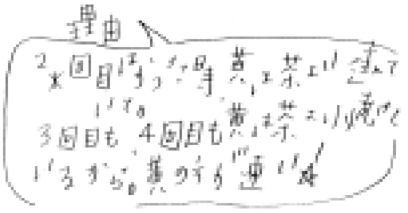


図 7　田中の記述した理由

このように，田中は，はかった回数と黄色の線香の燃えた長さの関係を，自分の持っている方法で式に表すことができなかったが，一定の割合で増える変化量と比例定数が一致することを使って，立式したと考えられる。

3.5　動きの見えない事象から状況に依存したモデルを作る

装置の問題，線香の問題において，田中は，事象の中にある何か知りたいものを捉えるために，事象から変数を取り出し，その間にある関係をグラフに表し，その過程を反省して立式することができるようになった。また，比例の場合，一定の割合で増える変化量を使って立式することもできるようになった。それでは，動きの見えない事象において，田中は，どのようにして事象にアプローチし，状況に依存したモデルを作ったのだろう。

事後調査の「1 分につき 20 円の通話料がかかるノーマルコースと最初の 60 分間は無料だけど，60 分を越してからは 1 分につき 30 円の通話料がかかるキャンペーンコースのどちらがお得か。」を調べる携帯電話の料金の問題において，田中は，まず，料金の変化の様子を表に記述した。そして，その値をもとにグラフをかき，立式することができた。

表の枠を書き始める。枠の左端に，ノーマル，キャンペーンと書き，問題を鉛筆でなぞりながら読む。鉛筆で問題の数字のところを2回コツコツとたたいて，20,0，40,0と書き，上段と下段に････を書く。

田中:60分でいくらになる？

しばらく考えて，

田中:60分以上って，どういうことや？

しばらく考えて，上段に1200と書く。

田中:先生，これ，60分･･･60分以上って，どういうこと？

T:60分までは･･･，例えば，（表を指し）ここに0と書いているじゃない？この0というのは，何分まで？

田中:60分まで。

T:でしょう。この20の0，40の0はどういうこと。

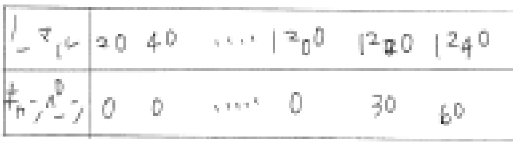
田中:1分間で20円で，こっち（キャンペーンを指し）が0。こっち（ノーマルを指し）は40でこっち（キャンペーンを指し）は0。

T:そう，だから，1分でも，2分でも，20分でも，30分でもタダということ。だから，このとき（1200を指して）は？

田中:0（1200の下に0と書く）。

T:そういうこと。

上段の1200の後に，1200を書き，その下に30を書く。1200を1220と訂正して，1220の隣に，1240，その下に60と書く。



ノーマル	20	40	……	1200	1220	1240
キャンペーン	0	0	……	0	30	60

図８　携帯電話の問題で田中が書いた表

このとき田中は，ノーマルコースとキャンペーンコースの料金を比較して，その状況をそのまま記述した。しかし，教師が 20 と 0，40 と 0 の意味を問うと，田中は，１分通話したとき，２分通話したときの料金であると答え，60 分通話したとき，61 分通話したとき，62 分通話したときの料金を表に書いた。そして，この表の値をもとにして，通話時間と料金の対応関係を捉えてグラフをかき，ノーマルコースの式を立てた。しかし，キャンペーンコースの式は，切片が負の値になるため，田中は，誤った式を立てた。これを教師に指摘されると，田中は，もう一度グラフに戻って考え始めた。

田中:あっ，ちがうわ。

右側のグラフの x 軸上の60から下方に直線を延長して，＋60を×で消す。しばらく考えて，グラフ上の点を原点から順に押さえて，(120,180)を押さえて横軸の目盛りの1200の下に1800を書く。そして，1800＝30×120＋ b と書き，その横で120×30＝1800と書く。そして，1800＝3600＋ b ，1800－3600＝ b と書き，3600－1800＝1800と筆算で計算する。そして，-1800＝ b と書き，キャンペーンの式に－1800を書き込む。次に， y ＝20x の式を押さえ，左側のグラフの横軸の60と(60,1200)を押さえて，しばらく考え，1200＝20×60と書き，花丸で囲む。さらに，右側のグラフの120と(120,1800)を押さえて，1800＝30×120－1800と書く。そして，しばらく考え，30×1200の下に2400と書き，花丸で囲む。

田中:できた。

田中は，教師に式の誤りを指摘された後，式 $y = 30x + 60$ の x と y に，時間 120 分のときの料金 1800 円を代入して b の値を求めた。このとき，田中は，今までの方法で立式できないため，一次関数の特徴からグラフを捉え直し，一次関数の一般式 $y = ax + b$ に適当な値を代入して b の値を求め，立式した。

4　田中の活動についての考察

教授実験において，田中は，事象の状況をそのまま記述する，変化のきまりを使って，累加で座標を求めてグラフをかく，対応関係を明確に捉えてグラフをかく，事象の動きを捉える共通の単位を見出し，その間にある関係をグラフにかく，動きの見えない事象から状況に依存したモデルを作る，というように活動を進展させてきた。ここでは，そのプロセスをモデルの構成と発展を視点にして考察する。

4.1　対応モデルの構成と発展

装置の問題において，田中は，２つのブロックの動きを比較する，無意識のうちに回転数を使って動きを捉える，ブロックの位置を捉えるために回転数を見出し，回転数と位置の対応関係を明確に捉える，というように，事象から対応関係を捉えるモデル（対応モデル）を構成し，それを発展させて，状況に依存したモデルを作ることができた。

装置の問題を考えるとき，田中は，まず，ブロックの動きをそのまま記述した。このとき，田中は，1 と 2，2 と 4，3 と 6，とカメの動きとウサギの動きを対にして書き出した。次に，田中は，変化のきまりを使って累加で座標を求め，回転数とウサギの位置，回転数とカメの位置のグラフをかいた。このとき，田中は，まだ，回転数とブロックの位置の対応関係を明確に捉えてはいないと考えられる。田中が，回転数とブロックの位置の対応関係

を明確に捉えたのは，変化のきまりを使ってグラフをかいたことを反省して，ウサギの位置が回転数と１回転で進む量の積で求めることができることに気づき，計算によって y 座標を求め，x 軸の値を意識してグラフをかいたときだと考えられる。その後，田中は，回転数と位置の対応関係を明確に捉えて，グラフをかき，その過程を反省して，位置と回転数の関係を立式することができた。

このように，田中は，事象から対応モデルを構成し，それを発展させて，状況に依存したモデルを作ることができたと考えられる。そして，教授実験の進行に伴って，対応モデルをかなり自由に扱うことができるようになってきたと考えられる。

4.2　プロセスモデルを使う

線香の問題や携帯電話の問題において，田中は，装置の問題で，事象から対応モデルを構成し，それを発展させて，状況に依存したモデルを作ったプロセスをモデル（プロセスモデル）にして，状況に依存したモデルを作ったと考えられる。

線香の問題において，田中は，実験値を記述した表から，線香の燃えた長さのグラフをかこうとした。このとき，田中は，２つの線香の燃えた長さを「はかった回数」で捉え，はかった回数と線香の燃えた長さの関係をグラフにかき，その過程を反省して，立式することができた。また，事象の動きを直接見ることができない携帯電話の問題において，田中は，まず，料金の変化の様子を表に記述した。そして，表に記された２つのコースの料金の変化を捉えるための変数として，通話時間を見出し，通話時間と料金の関係をグラフにかき，その過程を反省して，立式することができた。

このように，田中は，装置の問題と文脈が同じ問題では，装置の状況に依存したモデルを作るプロセスをモデルとして，新しい事象にアプローチし，状況に依存したモデルを作っていると考えられる。

田中は，教授実験の進行に伴って，第１時の装置の問題で状況に依存したモデルを作った段階を一つ一つ踏まなくても，状況に依存したモデルを作ることができるようになり，一次関数の特徴からグラフを捉え直し，状況に依存したモデルを作ることもできるようになった。つまり，田中は，状況に依存したモデルを作るプロセスをだんだん洗練させてきたと考えられる。

このように，田中は，対応モデルと同様に，プロセスモデルも徐々に発展させてきていると考えられる。

4.3　変化モデルの必要性

田中は，事象から対応モデルを構成し，それをかなり自由に扱って状況に依存したモデルを作ることができるようになった。しかし，状況に依存したモデルを数学的な事象として捉え，そこから別の事象を考察し，操作していくためには，対応モデルだけではなく，変化モデルで事象を捉えていく必要がある。

田中は，装置の問題において，「カメが 1 進むとウサギは 2 進む」という変化のきまりにつながる発話をしている。また，変化のきまりを使って累加で座標を求めたり，グラフをかくとき，ある点から横に１目盛り縦に２目盛りボールペンを動かしてプロットしたりしている。この他にも，線香の問題において実験値から立式できなかったとき，教師から一定の割合で増える変化量に着目する示唆を受けて，立式している。

このように，田中は，無意識のうちに変化モデルを構成していると考えられる。しかし，田中は，変化モデルを明確に意識して，それを扱うことができないため，文脈のない問題において，対応モデルだけを使って立式しようとしたが，式を立てることができなかった。

問題

y は x の１次関数で次の表のような値をとっている。y を x の式で表しなさい。

x	…	-1	0	1	2	…
y	…	-6	-4	-2	0	…

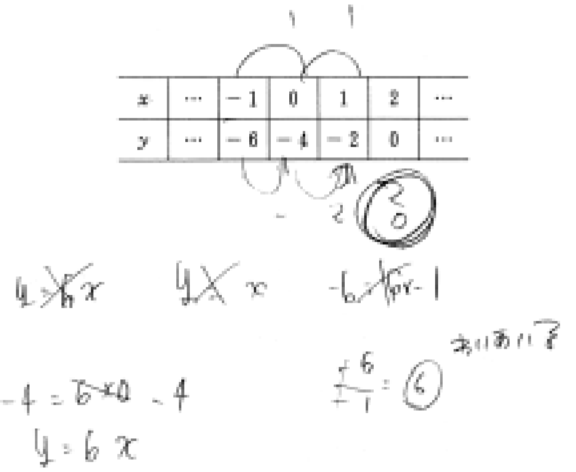


図 10　実力テストの田中の解答

この問題に対して，田中は，線香の問題ではかった回数と黄色の線香の燃えた長さの式を立てたプロセスをモデルにして，対応モデルを使って立式しようとした。線香の問題のように，比例で捉えられる事象の場合，表を縦に見たときの割合が一定であり，その値と変化のきまりが一致している。しかし，この問題は一次関数で捉えられる事象であり，表を縦に見たときの割合が一定ではなく，その値と変化のきまりも一致しない。そのため，対応モデルだけで２つの変数の動きを捉えようとした田中は，この問題で立式することができなかった。ここから，具体的な状況がわからない表から状況に依存したモデルを作る場合，表の値の動きを対応モデルだけで捉えるのではなく，対応モデルと変化モデルの両方で捉える必要があると考えられる。

5　指導への示唆と今後の課題

教授実験において田中が，どのようにして事象にアプローチし，事象の中にある何か知りたいものを捉えるために，事象の中にある変数を取り出し，その間にある関係を見出していったのか，そのプロセスをモデルの構成と発展を視点にして分析し，考察した結果，次のような指導への示唆と今後の課題を得た。

5.1　教授実験から得た知見と指導への示唆

文脈に依存した問題において，状況に依存したモデルを作るとき，子どもたちは，事象の中の２つの変数の動きを比較する，無意識のうちに独立変数を使って動きを捉える，変数の動きを捉えるために，独立変数を見出し，対応関係を明確に捉える，という段階を踏みながら，事象から対応モデルを構成し，それを発展させていることが明らかになった。このとき，子どもたちは，変化モデルも，対応モデルと同様に，事象から構成していることが明らかになった。また，子どもたちは，文脈に依存した問題で状況に依存したモデルを作ったプロセスをモデルとして，未知の問題にアプローチし，事象から対応モデルを構成し，それを発展させて，状況に依存したモデルを作っていることが明らかになった。

このように知見から，次のような指導への示唆を得た。

文脈に依存した問題において，子どもたちが状況に依存したモデルを作るために，段階を踏んで，対応モデルや変化モデルを構成し，発展させていくような指導過程が必要である。例えば，追いつき追い越すイメージを持って，２つのブロックの動きを比較し，２つのブロックの動きを捉えるための独立変数として，回転数を見出し，回転数とブロックの位置の対応関係を明確に捉えていくような指導過程である。このとき，子どもたちが，対応モデルや変化モデルを意識していけるように，表やグラフの見方が進展できるような支援が必要である。また，子どもたちが，必要に応じて，事象と関わりが持てる環境が必要である。しかし，子どもたちが，念頭で事象の動きを捉え，状況に依存したモデルを作っていけるように，問題の配列を考慮する必要がある。例えば，意図的に事象との関わりを少なくし

たり，実際に動きが見えない事象を扱ったりすることである。

5.2　今後の課題

教授実験において，田中は，対応モデルを自由に扱い，状況に依存したモデルを作ることができるようになった。一方で，田中は，変化モデルも事象から構成しているが，変化モデルは，無意識のうちに使われることが多く，変化モデルを顕在化した指導も少なかった。また，状況に依存したモデルを作る活動と関数の特徴や表現，処理の指導を接続しようとしたが，そのプロセスを検討することはできなかった。そこで，変化モデルを顕在化して，状況に依存しなくても扱うことができるような指導を実践すること，状況に依存したモデルを作る活動を，関数の特徴や表現，処理の指導に接続した指導過程を構成し，実践すること，この２点が今後の課題である。

謝辞：本研究にご協力いただいた，当該校長渡辺正紘先生，同校教諭冨田智恵子先生に深く感謝いたします。

註

1)筆者は，中島の「関数の考え」を「新しく調べようとする対象の中で，よくわからないことがらを簡単に捉えるために，よくわかっていることがらや，わかりやすいことがらのどれと関係づければいいのか，そして，それはどんな関係になるのかを考えていくこと」と捉えている。

2)モデルは，一般的に，子どもたちが作り出したもの，表現したものを指すことが多い。筆者は，それに加えて，子どもたち自身が持っている活動の基盤となる考えもモデルの一つであると考えている。
Gravemeijer は，フォーマルな数学的知識を開発するためベースとして，モデルが役立つと述べている。このモデルは，最初は特定の文脈の状況モデルとして構成され，そして，モデルはその状況に関して一般化されると述べている。また，Treffers は，インフォーマルで文脈に依存した算数から，フォーマルで形式的な算数へジャンプするために，モデルが必要であると述べている。そして，このモデルがその橋渡しをするためには，まず，文脈に依存した状況のモデルであり，だんだん範囲が制限されてフォーマルな純粋な算数のモデルとして役立つように発展すると述べている。

3)構想の第１時を２時間に分けて実践した。そのため，第２時は，第１時と同じ設定の装置を，各班に準備し，「ウサギが 100 目盛りのとき，カメは何目盛りのところでしょう。」という問題を考えた。

引用・参考文献

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T.Nunes & P.Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (pp.315−345). East Sussex: Psychology Press.

Greeno, J. G.(1991). A view of mathematiccal problem solving in school. In Smith,M.U. (Ed.), *Toward a Unified Theory of Problem Solving: Views from the Content Domains*(pp. 69-98). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum, Associates, Inc.

林弘. (2001). 中学校における関数指導に関する研究: 事象からモデルを構成する活動を重視して. 上越教育大学学校教育研究科修士論文(未公刊).

桐山眞一. (1999).中学生における関数の理解に関する研究: 一次関数を事例として.上越教育大学学校教育研究科修士論文(未公刊).

中島健三. (1981). 算数・数学教育と数学的な考え方. 金子書房.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L.Streefland(Ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School: On the occasion of the opening of the Freudenthal Institute* (pp.21−56). Culemborg: Technipress.