証明問題の解決活動に果たしうるカブリの役割について

福　沢　俊　之
上越教育大学大学院２年

１．はじめに

中学生の多くが苦手意識を持っていたり嫌いと答えている数学の学習に、コンピュータが果たしてきた役割は大きい(Balacheff & Kaput, 1996)。特に図形の学習においては、コンピュータ・ソフトである作図ツールによって数学的な概念に対する直接的な操作が可能になると言われている(飯島, 1998)。こうした作図ツールの１つである「カブリ・ジオメトリー」(以下、カブリとする)を用いた実践的な先行研究も数多く行われ、一定の成果をあげている(例えば、垣花, 清水, 1995; 原田, 1996; 川上, 1997)。

またカブリを使う個人に焦点をあてることによって、そこで引き起こされる問題点を指摘した研究(Goldenberg & Cuoco, 1998)、カブリの特徴的な作図やドラッグの機能に注目しながら生徒の活動を細かく分析し、理解の変容を捉えた研究(Hölzl, 1996; Mariotti & Bussi, 1998; Olivelo et al, 1998)も近年見られる(特に Mariotti ら、Olivero らの研究については福沢(2000a)を参照)。しかしこれらのカブリに関する実践的な研究やカブリを使う個人に焦点をあてた研究では、どのように発見や推測から証明に移行するのかは明らかにされていない。

また論証指導については多くの先行研究で問題点が指摘されているが(例えば、国宗, 1998; 太田, 1998; 相馬, 1998)、特に相馬は「生徒に論証の『必要感』を感じさせないまま、論証の形式的な面だけを覚えさせせがちな指導」(p. 97)があることを挙げている。

そこで本稿では、場面に対する理解を深めながら問題意識を膨らませ、証明への動機づけが行われる過程で、カブリがどのような役割を果たしうるのかについて、カブリを使って証明問題に取り組む中学生の活動を詳細に分析することによって考察する。

２．データの収集と解決の概要

2.1　データの収集

平成１２年２月に東京都内の公立中学校３年生４名を２つのペア(男女)に分け、コンピュータ(カブリ)１台を使用して、それぞれ２つの問題に取り組んでもらった。彼らはこれまでカブリを使用した経験はないため、この調査に際し３時間のインストラクションを行った。記録には VTR ２台を使用し、カブリの画面全体と彼らの活動の様子を録画した。また ATR １台によって音声を記録し、彼らが扱っていた図を入れたプロトコルを作成した。さらに後日、画面を記録した VTR を見ながらインタビューを行った。ここでは紙幅の関係上、２つのペアが取り組んだ問題１についてのみ考察する(女子のペアの問題２については福沢(2000b)を参照)。

問題1：四角形ABCDを作図し、辺ABの中点をP、辺BCの中点をQ、辺CDの中点をR、辺DAの中点をSとする。このときそれぞれの中点を結んでできる四角形PQRSはどんな四角形になりますか。(垣花，清水，1997 ほか改題)

以下の記述においては、女子のペアを阿川

と野田(いずれも仮名)、男子のペアを加川と高田(いずれも仮名)として述べる。

2.2　阿川と野田の解決の概要

①5つの図を作図し、問題意識を膨らませた場面

最初に四角形 ABCD が平行四辺形の場合を作図した。中点を結んでできた四角形 PQRS の４辺を測定し、平行四辺形になることでお互いに合意している。その後、四角形 ABCD の形を変形させながら４種類の図を作図するが、どのように形を崩しても四角形 PQRS が平行四辺形になることに気づき、「なぜ平行四辺形になるのか」という疑問を膨らませていった。

②阿川が野田に説明をした場面

中点連結定理を思い出せず、行き詰まっていた彼女たちは、教師の介入によってそれを思い出す。阿川は中点連結定理を適用しながら、これまでに作図をした図のうち３つを使って「なぜ平行四辺形になるのか」を野田に説明した。阿川は、中点連結定理を使うこと、補助線を引く必要があることを理解しており、「２組の対辺がそれぞれ平行ならば平行四辺形になる」という条件に当てはめようとしていたため、補助線(対角線)を２本引く必要があった。しかしどうしても１本しか引けず、説明がその都度行き詰まる。説明のたびごとに阿川は補助線に対する自分なりの意味づけにこだわるが、最後に野田の発話をきっかけに、図をドラッグして典型的な四角形に変形したあと「対角線を引く」という適切な意味づけをしている。全ての解決に要した時間は 57 分 35 秒であった。

2.3　加川と高田の解決の概要

①四角形PQRSが平行四辺形であることを証明した場面

作図を完成させ、４辺を測定し、"平行？"のコマンド[1)]によって２組の対辺が平行であることを確認した。彼らが「平行四辺形になる」と述べたことに対し教師は、「なぜ平行四辺形か」と尋ねたところ、加川は対角線を結び中点連結定理を適用して２組の対辺がそれぞれ平行であることを述べ、四角形 PQRS が平行四辺形になることを証明した。ここまでの活動がおよそ７分であった。

②四角形PQRSの形を探究する中で問題意識を膨らませた場面

証明を完成させた彼らに、教師は四角形 PQRS が平行四辺形以外の形になることはないかと尋ねたところ、彼らはカブリを使って再び探究活動を始める。四角形 ABCD の各頂点をドラッグしたり対角線 AC、BD をドラッグしながら、'四角形 ABCD が○○の場合、四角形 PQRS は○○になる'といった発話が繰り返し聞かれた。そして四角形 PQRS がひし形になるのは、四角形 ABCD が長方形のときだけではないことに気づき、どういうときにひし形になるのかという問題意識を持つに至った。ここまでの解決活動に 63 分 8 秒を要した。

３．解決活動における特徴的な場面

3.1　阿川と野田について

3.1.1　５つの図を作図し、問題意識を深めていった場面

阿川と野田は、カブリによって５つの異なるタイプの図を作図した。

最初のア(図１)の四角形 ABCD は、"平行線"のコマンドとSHIFT キーとを使って、２組の対辺が平行になるように作図し、画面上水平に配置したものである。

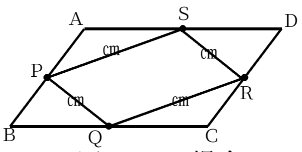

図１(アの場合)

この四角形 ABCD を野田は「普通の」四角形と表現している。彼女たちは４つの中点を結び終わった時点で、四角形 PQRS が平行四辺形であることを視覚的に判断している。そして４辺を測定しながら「ほら、長さが一緒だろ。角度一緒だよ」と述べている。角度については測定はしていない。ここで四角形 PQRS が平行四辺形になることに対する疑問

は聞かれない。

野田は「腐った四角形」や「ゆがんだ四角形」では平行四辺形にはならないのではないかと述べている。そして作図したのが２番目のイ(図２)の四角形 ABCD である。作図が完成し最初に PS と QR の測定をした直後、野田は「あれー、一緒だ。」と発話した。さらに彼女たちは残りの対辺、そしてアでは測定しなかった４角も測定し、対辺や対角が等しいことを確認した。ここで野田は「なんでかなあ」と述べている。

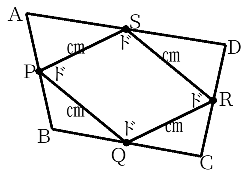

図２(イの場合)

そして「もう１個、とびきりゆがんだのを」作ってみようということで３番目のウ(図３)の四角形 abcd [2)]を作図した。pq と rs が結ばれた時点ですでに彼女たちは対辺が平行になることを予測している。四角形 pqrs が作図されて野田は測定することを提案するが、阿川は「もっと一番わかりやすいのがある。」と述べて測定をせず、p を通り qr に平行な直線を"平行線"のコマンドによって作図した。そして線分 ps と重なることを視覚的に確認し(pq と rs についても同様)、平行四辺形であることを確信している。ここで野田は「何でだろうね。これ角度[∠ bcd のあたりを指しながら]を大きくしているのに」と疑問を述べた。

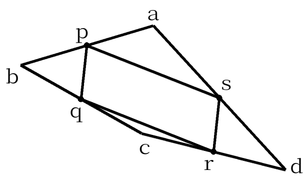

図３(ウの場合)

「あーああ、どうする？もう一個なんかすごいの作ってみる？」という阿川の提案で彼女たちは４番目のエ(図４)のように凹四角形 abcd を作図した。この凹四角形 abcd を見た野田は「質の悪い四角形」「四角形と呼べる代物か。」と述べている。

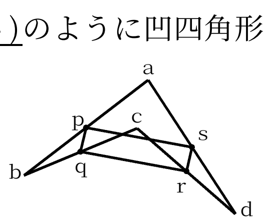

図４(エの場合)

また阿川は各辺の中点をプロットしながら「これで［平行四辺形に］なったらすごいよね」と述べている。そして中点を結びながら阿川は「でも平行っぽい。例外がない。つまんない。」、中点を結び終わって野田は「何作ってもなるなるね。それもただの平行四辺形」と述べた。さらに「何でだろうね」(阿川)という疑問も聞かれた。ワークシートには「どんなにゆがんだ四角形でも(おしくも)平行四辺形になってしまう」(阿川)と書いている。この図では測定機能も"平行線"のコマンドも使っていない。

ワークシートへの記述を終えたあと阿川は「もう１個ちょっと…」と述べて５番目のオ(図５)のような四角形 abcd を作図した。阿川が辺 ad から辺 dc を引いているときに野田は「こだわり、持っております」と阿川の思いを代弁するように述べている。それに対して阿川は「変な図形を作るの、好きなの」と答えた。しかしこの四角形 abcd では、イウエの四角形 ABCD に対して繰り返し述べていた「腐った」「ゆがんだ」「質の悪い」といったさまざまな表現は聞かれなかった。彼女たちは四角形 abcd の各辺の中点をプロットしながら、すでに平行四辺形になることを予測している。作図が完成してた時点では、測定機能などを活用せず、視覚的に平行四辺形になると判断し、「何で？ちょっとおかしいんじゃない。」(野田)と述べている。そして「ここところ[△ aps と△ cqr]がさあ、合同な三角形で、とかできたらわかるんだけど」(野田)と述べた。またここまでの活動をまとめて野田は「形もばらばらな四角形作ってるのに、中点でとると平行四辺形になっちゃう」、「一番最初は平行四辺形で描いたんで中も平行四辺形になると思っていたんですけど、ゆがんだのを描いてみてもやっぱり変わらず」と述べている。

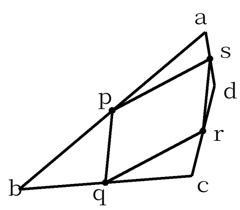

図５(オの場合)

3.1.2　図を変えながらの阿川の説明と補助線

の意味づけ

教師の介入により、ア(図１)とエ(図４)をドラッグしたものの、解決活動が進まなかったので、教師は誘導しながら中点連結定理を想起させた。その後、中点連結定理を適用した阿川の説明が３回行われる。

①説明1(エをドラッグした図をもとに(図6))

阿川は bd を結んだと仮定した上で、△ abd と△ cbd に中点連結定理を適用し、bd を媒介にして sp と qr が平行になると説明した。

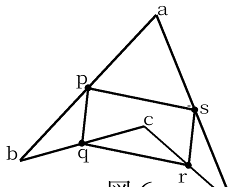

図６

続いて pq と rs について説明しようとして、bd を実際に引いた(図７)。しかし pq と rs の平行を説明するための補助線は bd ではないことに気づいた。あらためて阿川は a と c を結ぶようにポインタを動かしながら、ac を bd への「垂線」と意味づけた。ここで ac を実際に結ぶことはしていない。そして中点連結定理を適用する三角形や中点には触れずに、qr と sp が平行であることと合わせて、ac が媒介となり rs と pq が平行になること、結果として平行四辺形になることを説明したが、「めちゃくちゃ…」と述べている。

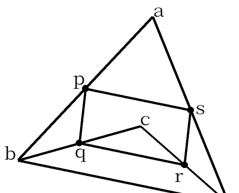

図７

②説明2(オ(図5)をもとに)

説明１が終わって野田は阿川に、「ゆがみがちっと軽い方の」(野田)オでの説明を求めた。阿川はまず bd を結び(図８)、△ bcd、△ abd についてそれぞれ中点連結定理を適用し、bd を媒介にして ps と qr の平行を説明した。

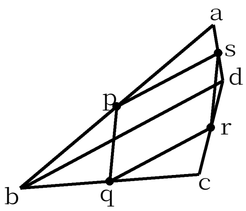

図８

続いて pq と sr の平行を説明しようとしたが補助線を引くことができない。このとき「ここ[cp]できっちゃっても意味ないんだよなー。」と述べている。結果として阿川は、「きわどいけど」と述べて、ac を結んだ(図９)。そして「中点連結定理でここが平行じゃん」と述べながら s と r を往復するようにポインタを動かし、さらに△ abc、bc の中点 q、ba の中点 p に言及し、「平行(ポ：pq)[3]、平行(ポ：qr)、平行(ポ：rs)、平行(ポ：sp)じゃん。」と述べて、平行四辺形であると説明した。

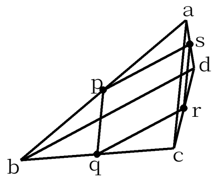

図９

③説明3(ウ(図3)をもとに)

何となく納得がいかないとする野田に対して、阿川は画面を切り換えて最初に表示されたウの図で説明をはじめた。そして「すごくいいとこに気がついた。真ん中だよ。真ん中に線を引くとすごい面白いことが起こるよ。」と述べた。a と c を結び(図１０)、中点連結定理を適用する三角形や中点に言及し、ac を媒介にして pq と sr の平行を説明した。さらに pq と ac、rs と ac の長さの比が 1:2 であることにも触れ、説明１、２では言及しなかった対辺の長さが等しいことについても説明した。

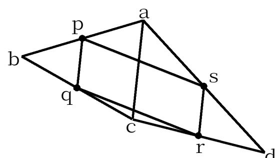

図１０

阿川はなおも説明を続けようとするが補助線を引くことができない。そこで野田が b と d を結ぶことを提案した。阿川は b と d を結んだが、「これで(ポ：d、b)、三角形(ポ：b、a、c)、三角形(ポ：a、c、d、a)、ちょっとはみだしちょるけど、中点連結の定理、中点連結の定理でなんと、平行やって、で、終わり。」と述べて説明を終えている。

④補助線を対角線と意味づける

３回の説明が終わったあと、野田は「向かい合った頂点同士結んで、」と意味づけたが、それを引き継ぐように阿川は「向かい合った頂点同士を結んで、それに平行、平行、平行、平行で線を引くと…」と述べている。教師が

調査を終えようとしたとき、阿川は「ちょっと待って」と述べて突然点 C をドラッグして、四角形 abcd を変形した(図１１)。そして、「つまりはこれ [ca] ってなんだっけ、なんて言うんだっけ。こうやって、角と角と…。対角線。対角線で四角をちょぎったらわかるんだ。」と述べた。さらにこの時間の最後には「対角線でちょんぎったらわかるなんて想像もつかなかった。」と感想を述べている。

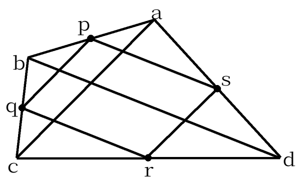

図１１

3.2　加川と高田について

彼らは活動を初めてから７分で、四角形 PQRS が平行四辺形になることを、中点連結定理を適用して証明した。その後、教師は「平行四辺形だけ？」と尋ねた。彼らは「他にもあります」と述べて活動を再開した。

3.2.1　四角形ABCDの形にともなって変わる四角形PQRSの形を探究する場面

探究活動を再開し、点 C をドラッグして図１２にした加川は「対角線が垂直に交わる場合、長方形？」と述べた。そして AC と BD が垂直に交わっていることを仮定して∠ PSR が 90 °になることを説明しようとしたが、「でもそうだよな」と述べて追究をうち切っている。ここで彼らが最初に完成させた証明について言及することはなかった。

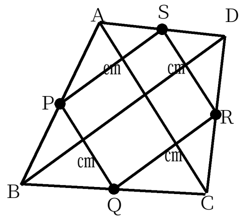

図１２

その後は「[四角形 ABCD が] ひし形の場合、[四角形 PQRS は] 長方形」、「正方形のときは正方形」、さらに PQ と QR が直交していないことを"垂直？"のコマンドで確認し、「台形の場合ひし形かな」と述べている。

その直後、加川が「ずらしたらどうなるんだろ。辺ごと」と述べたのを受けて、高田が実際に対角線 BD と AC をドラッグしている。対角線をドラッグした場合、四角形 ABCD がどのような形になろうとも、四角形 PQRS は平行移動するだけである。画面で起こっているこのような現象に対する彼らの反応は見られなかった。

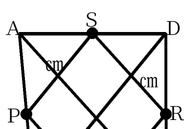

図１３

加川はこれまでの探究結果として四角形 ABCD の形に対する四角形 PQRS の形を整理して述べた。そして「ちょっと数値出します」と述べて四角形 ABCD の４辺を測定し、点 C、D をドラッグして図１４のような形を作った（彼らは長方形であるとして合意しているが、記録からは四角形 ABCD か四角形 PQRS は明らかではない)。そして「この状態から～平行四辺形に持って行くんですよね」と述べながら、点 B、D のドラッグによって四角形 ABCD を平行四辺形に近い形にし(図１５)、「平行四辺形は平行四辺形」と述べている。

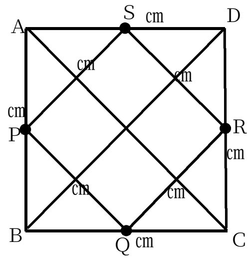

図１４

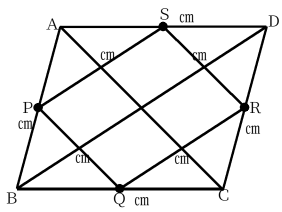

図１５

3.2.2　なぜそうなるかの理由を考え始める場面

加川は四角形 ABCD の４辺の測定値を全てそろえ、ひし形にして四角形 PQRS が長方形であることを説明しようとした(図１６)。しかし４辺の測定値をうまくそろえることができず「きわどい。やめた。えっと、ひし形の場合、AC を軸としてひっくりがえしたら、重なりますよね、たぶん。」と説明し、「だからひし形の場合、長方形か」と述べた。このことについて加川はこの調査の最後に「対角線の AC で折り返すと、～ S

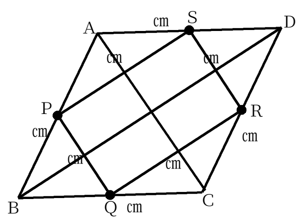

図１６

と P、R と Q が重なって、～重なるってことは 90 °ってことがわかって、～中は絶対平行四辺形であるから、PS と QR が平行だから長方形」と再び説明している。

加川は四角形 ABCD を正方形に近い形にし、「正方形の場合は正方形」であることを説明しようとしたが、画面を見て「あれ、これはひし形ですよね。SPQR。あれ、これはどういうときなんだ？」と述べて、説明を中断した。

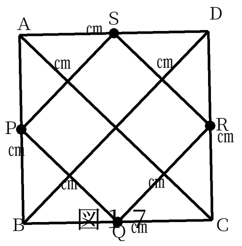

図１７

3.2.3　外側の四角形への意識から離れる場面

35 秒間の沈黙後、図１７で高田が点 D をわずかにドラッグしたのを見た加川は、ドラッグしても対辺の長さが変わらないことに気づいた。そして加川は四角形 PQRS がひし形になるのはいろいろな場合があることを指摘し、実際に四角形 PQRS をいろいろな形のひし形にして高田に示した。その様子を見ながら加川は「どういう／／／共通点／／」と述べた。さらに加川は線分 BD を大きくドラッグして「こうやってもひし形は保ってるんですよね。」と述べた。線分 BD のドラッグによってひし形にした四角形 PQRS は平行移動されることになる。その様子を見た高田は「多角形の場合はひし形」と述べている。

また加川は「枠が正方形の場合、動かしたらどうなるのか」と述べて、ドラッグによって四角形 ABCD を正方形にした。そして線分 BD を大きくドラッグして正方形が保たれていることを確認した。この様子を見た加川は「どういう場合に正方形かですね」「多角形の場合になると、～、なんで正方形になるのかわからない」と述べている。

4　解決活動に見られるカブリの果たした役割

３節では、生徒の解決活動における特徴的な場面について述べた。以下では、生徒の解決活動においてカブリの果たした役割について述べる。

4.1　カブリ環境下における問題の図の変形によって果たされた役割(阿川と野田のペア)

4.1.1　場面を理解するための仕組みを追究しようとする問題意識を持たせたこと

阿川と野田のペアはカブリを使って５つの異なったタイプの図をそれぞれ意図的に作図した。そして「なぜ平行四辺形になるのか」という問題意識を膨らませ、証明への動機づけを行っている。特にカブリの特性を生かして意図的に作図した、精確かつ典型的な(彼女たちは「普通の四角形」と表現した)アの平行四辺形 ABCD が、証明への動機づけのきっかけを作ったと考えられる。

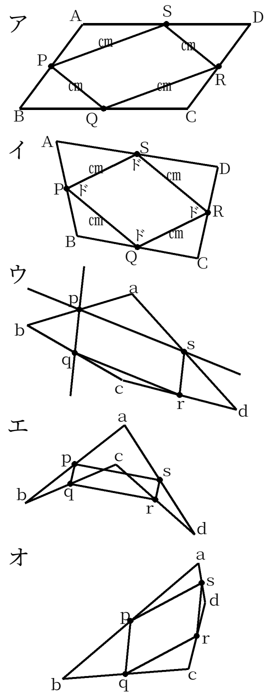

図１８
（問題の図の変形）

アの平行四辺形 ABCD の作図では、線分 AB を引いた後、SHIFT キーを使って画面に水平になるように BC を引いている。そして "平行線"のコマンドを使って、AB と BC にそれぞれ平行な直線を引き、その交点 D と A、C をそれぞれ結んで作図を完成させた。したがって四角形 ABCD は作図の条件として、２組の対辺が平行で、画面上に水平に配置されるように描かれている。このような図は教科書に見られる典型的な平行四辺形である。特に２組の対辺が平行であるという条件は、彼女たちにとって対辺や対角の相等とは違った意味を持つ。ウの図の四角形 PQRS が平行四辺形であることを"平行線"のコマンドによって確認する際、「［対辺や対角を測定するよりも］もっと一番わかりやすいのがある」と述べていることから、２組の対辺が平

行であるという条件は彼女たちにとって平行四辺形になるための条件の中で、より明確なものであるといえよう。このように特殊なキーやカブリのコマンドを確実に実行して２組の対辺が平行になるように平行四辺形を作図したことは、そこに彼女たちの意図が反映されているといえる。したがってカブリの特性は、精確かつ典型的な平行四辺形を描きたいと考えた彼女たちの意図を画面上で実現したといえる。

アの図の四角形 PQRS が平行四辺形になることを、対辺が相等であることを測定によって確認し、結果については何の疑問も述べていない。彼女たちはオの図の探究後、△ aps と△ crq をさして、「合同な三角形で、とかできたらわかるんだけど、ぜんぜん違う」と述べている。すなわちアの図で四角形 ABCD を、カブリの特性を生かして精確かつ典型的な平行四辺形として作図し、△ APS と△ CRQ、△ BPQ と△ DRS が合同であることは明らかであると考え、四角形 PQRS が平行四辺形であることの仕組みを理解していたと思われる。イの図では AD と BC の平行を条件として残しながら AB と CD の平行を崩した形にしたところに彼女たちの作図へのこだわりが見られる。ウの図では「何でだろうね。これ角度［∠ bcd］を大きくしているのに。」と述べているが、これは△ aps と合同になると考えていた△ crq がつぶれていることを意識しての発話とも受け取れる。つまりウの図で「合同」という彼女たちの持っていた場面を理解するための仕組みが成り立たないことを認めざるを得ない状況になった。その結果 Goldenberg ら(1998)が生徒はモンスターとして排除する傾向にあると報告したエの図を描き探究を継続した。野田が「四角形と呼べる代物か」と述べたエの凹四角形でも、平行四辺形になったことに対して阿川が「やーだ。つまんない。例外がない」と述べたのは、起こった結果が彼女たちの場面に対する理解を超えたことを伺わせる発話である。オの図では∠ adc を極端に大きくして四角形 abcd へのこだわりを残しながらも、冷静に「これでも平行四辺形になっちゃうみたいね」(阿川)、「ここととここ[△ aps と△ crq]がさあ、合同な三角形で、とかできたらわかるんだけど、ぜんぜん違う」(野田)と述べている。このようにイ、ウ、エ、オと図を変えていくことでその仕組みが成り立たないことを認めざるを得ない状況から、「なぜ平行四辺形になるのか」という新たな仕組みを追究しようとするようになったと思われる。

以上のようにカブリ環境下において問題の図を変形することによって、場面を理解するための彼女たちなりの仕組みを見いだし、それが成り立たないことから「なぜそうなるのか」を考え、新たな仕組みを追究しようとする証明への動機づけが行われた。垣花、清水(1997)は短大生を対象としてカブリを利用した実践的な研究の中で、実験・観察から「いつでも成り立つ」ことがらへの気づき、そして「なぜそうなるのか」という証明への動機づけを含めて、新しい証明活動のサイクルを示している。今回の阿川と野田の事例では、「いつでも平行四辺形になる」ことだけでなく、そうなる仕組みに彼女たちが目を向け「なぜそうなるのか」という証明への動機づけを行う様子を明らかにした。すなわちカブリ環境下において問題の図を変形することによって「いつでも成り立つ」ことがらに気づくだけでなく、成り立つ仕組みに目を向けた問題意識をもつに至ることがわかった。

4.1.2 補助線を対角線として意味づけさせたこと

阿川は四角形 PQRS が平行四辺形になることを、エ(もとの図４をドラッグして変形したもの)、オ、ウの図を順に画面に表示させながら、中点連結定理を適用して野田に説明をした。図を変えながらの阿川の説明を通して彼女たちは、補助線の意味づけを模索して

いる。

説明１で用いたエは教師の指示により表示したものである。戸惑いながらも補助線として気づいた ac について阿川は、bd の「垂線」として意味づけている。これはカブリによって描かれた図を視覚的に判断した結果である。pq と rs が平行であることの説明では、中点連結定理を適用する三角形や中点の具体的な指摘はなく「これ[rs]平行やん。で、これ[pq]平行やん」と述べて終わっている。このことから ac を pq や rs に平行な線分と見て、形式的に定理を適用したと思われる。

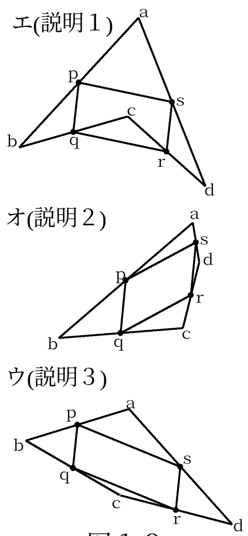

図１９
（説明の図の変化）

野田はエの図を「たまたま三角形みたいな形してる」と述べ、別な図として「ゆがみの軽い方」(オの図)での説明を阿川に求めている。彼女たちは「なぜ平行四辺形になるのか」という問題意識を、四角形 ABCD を意図的に「ゆがませ」ることで問題意識を膨らませていった(4.1.1)。すなわちゆがんだ図でも平行四辺形になることの仕組みを理解したいという気持ちの表れであるといえる。

オを用いた説明２では、補助線 bd は容易に引くことができた。しかし ac についてはポインタを s のあたりにおきながら「どこで三角形きりゃいいんだ、この場合。これと平行な点。ねぇって感じだ。」と述べて、引くことができずにいる。つまり中点連結定理を適用するための三角形と、目的とする sr に平行な補助線を引くための点を探していると考えられる。その一方で補助線として不適切であることが明らか(sr や pq と平行でない)な cp について「ここ[cp]できっちゃっても意味ないんだよな」と述べている。これは説明１での「垂線」という意味づけにこだわり、cp を ab の垂線であると視覚的に判断した結果であると思われる。そして自ら「意味ない」と述べていることから、阿川は「垂線」という意味づけでは解決につながる補助線を引くことができないことに気づいたといえる。したがって図をオに変えることで、補助線に対する新たな理解を得たといえる。このあと阿川はしばらく画面に見入った結果、ac を結んだ。先述したように阿川は sr に平行な補助線を探していることから、視覚的に判断して ac を結んだと思われる。

「まだ納得がいかない」と述べる野田に対して、阿川はウの図を用いて説明３を行った。ウの図は画面を切り換えて最初に表示された図である。表示されて迷うことなく「じゃこれ」と説明に入ったことを考えると、阿川はウの図を説明３に用いる図として適当であると判断したと推測できる。つまりウの図は１つの角を極端に大きくしたという点でオと共通するが、配置が異なる。したがって説明２を補う意味で適当であると判断したことが推測できるのである。

表示したウを見た阿川は「すごくいいとこに気がついた。真ん中だよ」と述べ ac を引き、pq と rs が平行であることだけでなく、説明１、２では述べていない対辺の長さが等しいことにまで言及した。このように「真ん中」という意味づけに対して「すごくいいとこ」と述べて説明そのものが変化したことから、教師に誘導されて適用していた中点連結定理がより明確に意識化されたといえる。それらの背景として次の２点が推測される。１つ目はエの ac、オの bd、ウの ac の３つの補助線が四角形 ABCD の「真ん中」に引かれているという共通点を見いだしたということである。２つ目は縦の補助線が引けたということである。説明１、２で彼女たちは縦の補助線を引くことに苦労した経緯がある。また縦の補助線によって中点連結定理を適用する

三角形が横向きに置かれることになり、教科書等で定理を説明する場合の図の配置とは異なる。したがって発見するのに苦労した縦の補助線に容易に気づいた結果、中点連結定理を適用する横向きの三角形にも気づくことができた喜びを「すごくいいとこ」という言葉で表したり、中点連結定理をより意識した、これまでにない丁寧な説明を行ったと思われる。

阿川はさらに説明を続けようとして、ウの図に補助線をもう１本引こうとするが、うまくいかなかった。一方これまで説明を聞くだけであった野田が「ここ[d]とここ[b]じゃいけないの？」と述べた。野田の自信がなさそうな様子から補助線の意味づけがまだなされていないことがわかる。阿川はこれを採用しbd を結ぶが、その後の説明は「これで(ポ：d から b)三角形(ポ：b、a、c)、三角形(ポ：a、c、d、a、c)、ちょっとはみだしちょるけど、中点連結の定理、中点連結の定理で、なんと、平行やって、で、終わり！」と説明を終えている。bd を結んだ後の阿川の説明は、ポインタの動きから、△ abc や△ acd を意識したものであることがわかる。本来意識しなければならない△ bcd は bd によって切られた「はみだしちょる」部分としてみている。このように阿川は場面の構造を理解をして説明しているとはいえない。

説明３の終了後に野田は「向かい合った頂点同士を結んで」と補助線の意味づけを自ら行い、阿川に「わかりました」と述べている。このことから野田も証明のアイディアとしての補助線の意味づけに関心をもっていたことがわかる。一方阿川は野田の意味づけに続けて「向かい合った頂点同士を結んで、それに平行、平行、平行、平行で線を引くと…」と述べた。その直後にウの図の点 c をドラッグして典型的な四角形に変形(図２０)し、「つまりはこれ[ac]って、こうやって、角と角と…。対角線」と述べた。そして最後の感想で「対角線でちょんぎったらわかるなんて想像もつかなかった」と述べた。すなわち阿川は補助線を四角形 PQRS の各辺に平行に引くものという意識があったものの、納得していなかった。だからこそ「ゆがませた」四角形へのこだわりが表れている頂点 c をドラッグし、典型的な四角形に直すことで対角線という意味づけを行った。阿川が「角と角と…。対角線」と述べていることから、ウの図の極端に大きい∠ c は角として見ていなかったことが伺える。ドラッグして∠ c を鋭角に戻したことで角として認識され ac を対角線として意味づけることができたといえる。

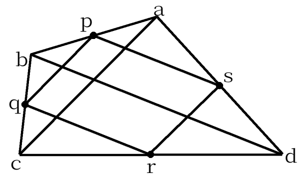

図２０

以上、述べたように阿川は迷いながらも補助線を引いて彼女なりに野田に説明をした。しかし野田は納得できない気持ちを持ち続けていた。一方説明をしている阿川も理解をして説明をしていたわけではないことが、最後のドラッグや感想から伺える。このように何となくわかるけれど明確に理解することができない状態の中でも、「垂線」という意味づけを修正したり、「真ん中」という意味づけによって、形式的に中点連結定理を適用していると思われる説明から、定理をより意識して適用したと思われる説明に変化した場面も見られた。このようにカブリ環境下において説明のための図を変えたりドラッグによって図を変形することによって、補助線の意味づけや説明そのものを変化させながら、結果的には対角線として意味づけるに至り、彼女たち自身も納得して解決活動を終えている。

4.2　ドラッグをしながら新たに問題意識を持つようになったこと(加川と高田のペア)

カブリの特徴的な機能であるドラッグは、問題の条件を保ったまま図を自由に、しかも連続的に変形することができる。それによって画面に表示された図を解釈するだけでな

く、与えられた条件から結論が成り立つ仕組みに目を向けるようになる(福沢, 2001)。

中点連結定理を用いて容易に証明を完成させた加川と高田は、教師の介入によって四角形 PQRS が平行四辺形以外の場合を探究し始めた。彼らは点 B、C、D や線分 BD をドラッグした。点のドラッグでは凸四角形を崩すようなドラッグはしていないが、線分 BD のドラッグでは点 D を点 A に重ねる(結果として点 S も重なる)ような場面が見られた。しかし彼らからの反応はない。教師が発話を促した結果、点 C をドラッグして図２１にした加川は「対角線が垂直に交わる場合、長方形？」と述べた。そして AC と BD が垂直に交わっていることを仮定して「三角形[△ AiD]とこの三角形[△ SjD]か。90 °で(ポ：i)、90 °、ここ[j]じゃないか、ここ[S]か。ここはどうやってやるんだ？でもそうだよな。」と独り言を述べている。「ここはどうやってやるんだ？」と述べたもののすぐに「でもそうだよな。」と納得していることから、結論が成り立つことだけを再認識しただけであると思われる。すなわちこの段階では場面の本質的な構造に目を向けた問題意識は持っていないと考えられる。

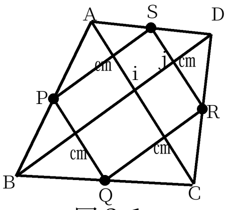

図２１

その後、各頂点をドラッグしながら「［四角形 ABCD が］ひし形の場合、［四角形 PQRS は］長方形」、「正方形のときは正方形」と述べた。四角形 PQRS が正方形であると判断した図で PQ と QR が直交していないことを、カブリの"垂直"のコマンドで確認し(図２２)、「台形の場合ひし形かな」とも述べている。そしてこの直後、加川は「ずらしたらどうなるんだろ。辺ごと」と述べて高川は BD をドラッグした。四角形 ABCD が大きく崩れるようなドラッグも見られた(図２３)が、加川が「立体に見えますね」と述べただけで四角形 PQRS が平行移動されていることへの反応は聞かれなかった。探究活動後に加川は図２３のように BD が外側にでた場合、BD に中点がないので例外であると考えたと述べている。Goldenberg ら(1998)が述べるように彼らはこのような特殊な図を探究の対象外としていることがわかる。

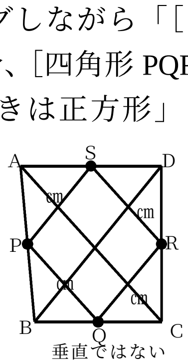

図２２

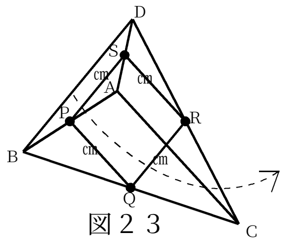

図２３
（点線はドラッグの軌跡）

加川は「ちょっと数値出します」と述べて四角形 ABCD の４辺を測定し、点 C、D をドラッグして長方形にした(彼らが画面上の図は長方形であると合意した)。そして加川は「この状態から～平行四辺形に持って行くんですよね」と述べながら点 B、D をドラッグし、四角形 ABCD を平行四辺形に近い形にして「平行四辺形は平行四辺形」と述べている。彼らが最初に完成させた証明は四角形 ABCD がどのような四角形であっても四角形 PQRS は平行四辺形であることの証明である。「平行四辺形は平行四辺形」と述べたことから、彼らは最初の証明とここまでの活動は別なものとして認識していると推測できる。また先述した「ずらしたらどうなるんだろ。辺ごと」や「この状態から～平行四辺形に持って行くんですよね」と言う発話は連続的な変形を意識している発話である。これは四角形 PQRS の形に対する四角形 ABCD の形を特定することを目的としながらも、途中のドラッグをする活動にも注目しつつあることを示しているといえよう。

加川は四角形 ABCD の４辺の測定値を全てそろえ、ひし形にして四角形 PQRS が長方形であることを説明しようとした。しかし４辺の測定値をうまくそろえることができなかった。そこで「きわどい。やめた。えっと、ひし形の場合、AC を軸としてひっくりがえ

したら、重なりますよね、たぶん。」と説明し、「だからひし形の場合、長方形か」と述べた。このことについて加川はこの調査の最後に「対角線の AC で折り返すと、～ S と P、R と Q が重なって、～重なるってことは 90 °ってことがわかって、～中は絶対平行四辺形であるから、PS と QR が平行だから長方形」と再び説明している。図中の線分を軸にして折ることによって重なることを根拠にした説明は、問題２でも見られたことであり、彼らが'折る'という操作を、場面の構造を理解し、説明する手だてとして持っていたことがわかる。

加川は四角形 ABCD を正方形に近い形にした図(図２４)で、「正方形の場合は正方形」であることを説明しようとしたが、画面を見て「あれ、これはひし形ですよね。SPQR。あれ、これはどういうときなんだ？」と述べて、説明を中断した。「正方形の場合は正方形」であることを証明しようとしたものの、四角形 PQRS がひし形であることを確認した上で、「あれ、これはどういうときなんだ？」述べていることから、四角形 PQRS の４辺の測定値は等しくなっているものの、四角形 ABCD の測定値は対辺が等しくなっていないと推測される(VTR の画面では読みとれない)。彼らはここまでの探究で、四角形 PQRS がひし形の時は四角形 ABCD が長方形であると理解していたが、表示されている画面ではそうなっていないことに気づき「あれ、これはどういうときなんだ？」と述べたと思われる。ドラッグによる変形によって、彼らの理解を超えた場面が表示され、測定値によってその場面に注目した結果、新たな問題意識を持つことができたといえる。

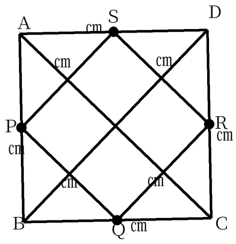

図２４

35 秒間の沈黙の後、高田が点 D をドラッグしたのを見て加川は初めて「ここ［点 D］動かすとき対辺、あの対辺は変わらないんですよね。」と述べた。さらに点 B、C をそれぞれわずかにドラッグしながら、対辺の長さが変わらないことを確認している。すなわち彼らは外側の四角形 ABCD の形にとらわれずに、ドラッグしても保たれる四角形 PQRS の特徴へ注目するようになったといえる。この発話は高田のドラッグが直接的なきっかけになっているが、加川が以前からドラッグによる連続的な変形を意識していたことも関わっていると考えられる。

その後加川は、四角形 PQRS がひし形になるのはいろんな場合が考えられるとして、実際に頂点をドラッグして示した。そして「どういう／／／共通点／／」(加川)と述べた。さらに加川は線分 BD を大きくドラッグして四角形 PQRS が平行移動される様子を見ながら「こうやってもひし形は保ってるんですよね。」と述べている。さらに「枠が正方形の場合、動かしたらどうなるのか」と述べて、ドラッグによって四角形 ABCD を正方形にした彼らは、線分 BD を大きくドラッグして正方形が保たれていることを確認した。その結果、「ひし形や正方形になるのはどういう場合か」という問題意識を持つに至っている。

このように加川と高田はカブリを使わず容易に証明を完成させて、問題解決活動が終わったと考えていた。しかしカブリを使ってドラッグをしながら探究活動を再開したところ、完成させた証明によって説明できる場面に対して、新たな問題意識を持つに至った。これは彼らがドラッグによる探究活動によって場面の本質的な構造に目を向けた結果である。

５. おわりに

これまで見てきたように、証明問題の解決活動において、場面の本質的な構造に目を向けた問題意識をもたせ、証明への動機づけを行うことや証明につながるアイディアとして対角線という意味づけをすることにおいてカ

ブリは、異なるタイプの図を生み出したりドラッグによって変形することによって貢献したといえる。しかし今回の調査では証明につながるアイディアを見つける活動、証明を完成させる活動にカブリがどのように役立ちうるのかについて十分に明らかにすることができなかった。また解決に必要な中点連結定理を教師が誘導してしまった場面も見られた。そこで今後の課題として、形式的に完成させた証明とカブリによって膨らませることのできた問題意識をどのように生徒が結びつけいていくのかについて明らかにしていく必要がある。また生徒がカブリを使って自ら証明問題に取り組み際に、教師のどのような支援が有効なのかについても考える必要がある。

註および引用・参考文献

1）"〇〇"はカブリのコマンド名を表す。

2）図の頂点の小文字のアルファベットは筆者による。

3）(ポ：〇〇)はポインタの動きを示したもの。

Balacheff, N. & Kaput, J.（1996）. Computer-based learning environments in mathematics. In A. J. Bishop et al.（Eds.）, *International handbook of mathematics education*（pp. 469-501）. Dordrecht: Kluwer.

福沢俊之.（2000a）. Cabri を使う個人に焦点をあてた活動分析の方向性と意義. 上越数学教育研究, *15*, 121-132.

福沢俊之.（2000b）. 中学生の解決活動に見られるカブリの役割について: プロトコルの分析をもとに. 日本数学教育学会第３３回数学教育論文発表会論文集, 343-348.

福沢俊之.（2001）. 証明問題の解決活動における作図ツールの役割についての研究. 上越教育大学大学院修士論文(未刊行).

Goldenberg, E. P. & Cuoco, A.（1998）. What is dynamic geometry?. In R. Lehrer & D. Chazan（Eds.）, *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*（pp. 351-367）. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

原田耕平.（1996）. 幾何の証明問題の解決を支援する Cabri-Geometry の利用: 作図における誤りの分析. 日本科学教育学会年会論文集, *20*, 217-218.

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathenatical Learning, 1*, 169-187.

飯島康之.（1998）. 作図ツールによる図形・関数領域でのカリキュラム開発. 日本数学教育学会(編), 日本の算数・数学教育 1998: 算数・数学カリキュラムの開発へ(pp. 185-200）. 産業図書.

垣花京子, 清水克彦.（1995）. 図形の証明問題での測定値の役割: コンピュータ環境下における生徒の活動分析を通して. 日本数学教育学会誌, *77*(11), 17-22.

垣花京子, 清水克彦.（1997）. コンピュータ環境下での証明の機能の変化に伴う学習活動の具体的な検討: 図形ソフトカブリを利用した実験・観察と証明. 日本数学教育学会第３０回数学教育論文発表会論文集, 379-384.

川上公一.（1997）. 数学的探求活動を支援する Cabri-Geometry の利用. 日本数学教育学会第３０回数学教育論文発表会論文集, 373-378.

国宗　進.（1998）. 図形の論証指導 改善の視点. 日本数学教育学会第３１回数学教育論文発表会「テーマ別部会」発表収録, 91-96.

Mariotti, M. A. & Bartolini Bussi, M. G.（1998）. From dragging to construction: Teacher's mediation within the Cabri environment. *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*（vol. 3, pp. 247-254）. Stellenbosch, South Africa.

太田伸也.（1998）. 図形指導における論証の位置づけ. 日本数学教育学会, 第３１回数学教育論文発表会「テーマ別部会」発表収録, 103-108.

Olivero, F. et al.（1998）. Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry. *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*（vol. 2, pp. 32-39）. Stellenbosch, South Africa.

相馬一彦.（1998）.「必要感」を重視した図形の論証指導. 日本数学教育学会第３１回数学教育論文発表会「テーマ別部会」発表収録, 97-102.