数学教育における証明の意義指導に関する基礎的研究

ー Action Proof を選択肢に取り入れた証明の意義理解調査から ー

梅　川　貢　司
上越教育大学大学院修士課程２年

１　はじめに

筆者は，中学校での教職経験において，図形の証明問題が記述できるようになっても「証明が何故必要なのかわからない」という生徒たちの声を耳にしてきた。そのような声により,「学力の定着に伴ってその学習意義も自然に理解される」という漠然とした信念に疑いをもつようになった。それでは，生徒たちに証明を意義あるものとして学習させるためにはどのように指導しなければならないのであろうか。それが本研究の動機である。

本研究では，数学教育における証明の意義について考察し，それを基に中学３年生を対象にした証明の意義理解調査を実施した。本稿の目的は，この調査結果から生徒たちの証明の意義理解の様相をよりよく把握し，証明の意義指導を改善するための示唆を得ることである。

２　研究の背景

2.1　証明の意味・役割・機能

数学史において「証明」の果たしてきた役割は大きい。また，杉山(1975,1986)から示唆されるように,「証明」は数学教育において教育的に意義ある学習内容である。一方，ホーガン (1993)に代表されるように，コンピュータの台頭などにより現代数学のみならず数学教育においても「証明」の役割についての見直しが迫られている。それ故に，数学教育における証明の意義指導を改善するための具体的な示唆を得るためには，証明の機能に目を向けなければならない。証明の機能に関する研究として，de Villiers (1990)の「５つの機能（立証・説明・体系化・発見・コミュニケーション)」を中心に，Bell(1976)の「３つのセンス」,Hanna(1995)の「説明する証明」及び宮崎(1993)，國本(1998)について概観した。学習者の「理解」のために証明が果たしうる役割や機能に着目すると，これらの研究から主に次の２点が示唆される。

◆ 証明の基本的な機能である「説明の機能」を生徒が理解しやすいことから，証明の意義として「説明性」を指導すべきである。

◆ 学校数学で扱う証明を，数学的アイデアを内在する形式的でない証明まで範囲を広げることが証明の意義指導の効果を挙げうる。

しかしながら，中学校数学における証明の意義指導の実際は「一般性」が中心的であり（文部省,1991),「説明性」については教師の裁量に委ねられているように思われる。

2.2　中学生の証明の意義理解の先行研究

現状の証明指導による中学生の意義理解の実態についての研究(小関ら,1987;国宗，2000;國本,1996）を手がかりに，意義指導について考察を加えると，主に次の３点が示唆される。

◆ 証明の意義を理解している中学３年生の割合はおよそ 20～23%であり,「一般性」を中心にした証明の意義指導には限界がある。

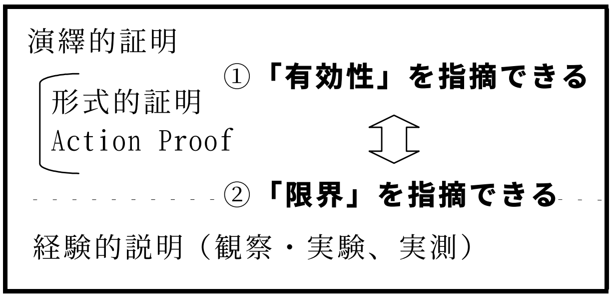
◆ 証明の意義指導においては生徒たちの討論活動と教師の意図的な介入が必要である。

◆ 学習活動の文脈の中に経験的説明や前形式的証明，形式的証明を「意味ある活動」として位置付けるべきである。

一方，これらの先行研究ではその調査方法が二分法に基づいているため，一人一人の生徒の「証明の位置付け」や獲得している「証明の意義」が十分には明らかにされていない。証明の意義を理解しているかいないかではなく，どのように理解しているのかを捉えることが指導を改善するためには必要である。

2.3　本研究の調査問題作成と分析の枠組み

本研究の目的をよりよく実現するために，メタ知識（Metawissen)，特に「有効性と限界」について岩崎（1994）の見解に着目した。新しい概念の「有効性」は今までの概念の「限界」ともいえる。そして，有効性や限界は他と比較することにより，より明確に意識されるものである。本研究の場合，新しい概念とは演繹的証明の考え方であり，今までの概念とは経験的説明の考え方である。生徒たちが理解している演繹的証明の考え方は，経験的説明との比較により，その限界としてよりよく表現されるであろうと考えた。そこで，この枠組みを本研究の調査問題の作成と分析の視点に用いることとした。具体的には，筆者が用意した説明から「一番よいと思う説明」を選択させ，その選択理由を「他の説明と比較して」記述させる質問形式にした。図１は分析の枠組みを図式的に表現したものである。



【図１】調査問題の分析の枠組み

なお，筆者は演繹的証明を「他のよく知られている幾何学的関係から何故そうなるのかを説明すること」(deVilliers,1998,p.388) と捉えている。

３　調査の概要

3.1　調査目的

第１回調査（予備調査）を平成 12 年 11 月に新潟県公立中学校１校（３年生，計５クラス，147 名）を対象に実施した。この第１回調査は先行研究の調査問題（三角形の内角の和）を踏襲したものであった（梅川,2001a）。この第 1 回調査では，主に次の問題点（ア，イ）と更なる課題（ウ，エ）が挙げられる。

ア　生徒にとって小学校以来の既知命題であったため，説明（または証明）の必要性が感じられなかった可能性があること。

イ　質問紙の筆記録のみによる解釈であったため，正しい解釈がやや困難であったこと。

ウ　証明の意義理解と基礎学力との関係はある程度の相関が予想されたが，より明確になるよう調査する必要があること。

エ　*Action Proof*（Semadeni,1984）や前形式的証明(國本,1996)のような説明を生徒たちがどのように評価するのかや，証明の意義指導にどのような効果が期待されるのかを明らかにすること。

そこで，この問題点を改善し，更なる課題に取り組むことを目的に次の調査を実施した。

3.2　調査対象と調査時期

第２回調査（本調査）を平成 13 年６月から９月にかけて新潟県公立中学校２校（３年生，計４クラス，133 名）を対象に実施した。３年生を調査対象にした理由は，２年生の論証幾何を学習した効果が安定し，それを評価するのに適していると考えたことと先行研究や第１回調査との比較のためからである。

3.3　調査方法と調査内容

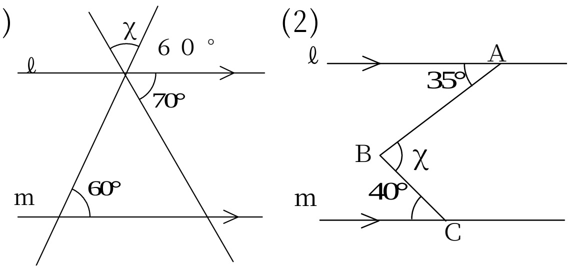
証明の基礎的内容の理解についての調査と意義理解についての調査に分けて実施した。

3.3.1　基礎的内容の理解についての調査

基礎的内容として，第１回調査である程度の相関が予想された「図形の基本性質（平行線の性質・三角形の合同条件）」と「基本的

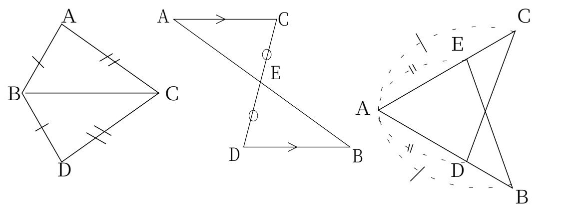
な証明問題」（梅川,2001a）に焦点化し，第１回調査の問題を基に作成した。具体的には，次の図２に示す通りである。そして，調査協力校の教科担任の監督のもと授業１校時で実施した。

1　次の(1)，(2)の図で，２直線ℓとmは平行です。∠χの大きさを求めてください。また，求めるときに用いた図形の性質を書いてください。

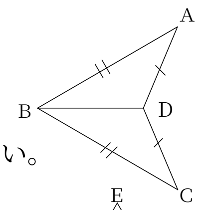


2　次の(1)～(3)の図で合同な三角形を記号・式を使って表し，合同条件を書いてください。

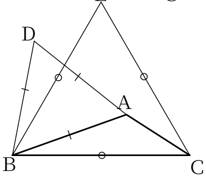
(1)　ＡＢ＝ＤＢ　(2)　ＡＣ//ＤＢ　(3)　ＡＢ＝ＡＣ
　ＡＣ＝ＤＣ　　ＣＥ＝ＤＥ　　ＡＤ＝ＡＥ



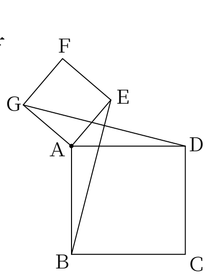
3　右の図で，ＡＤ＝ＣＤ，
ＡＢ＝ＣＢならば
∠ＡＢＤ＝∠ＣＢＤ
であることを証明してください。



4　右の図のように，△ＡＢＣの２辺ＡＢ，ＢＣをそれぞれ１辺として正三角形ＡＢＤ，ＢＣＥをつくります。
　このとき，ＡＣ＝ＤＥであることを証明してください。



5　右の図のように２つの正方形ＡＢＣＤとがＡＥＦＧが頂点Ａで重なっています。
　このとき，BE と DG の長さが等しいことを証明してください。



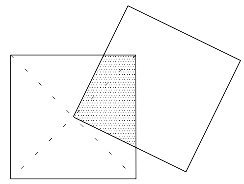
【図２】基礎的内容の理解の調査問題

3.3.2　証明の意義理解についての調査

　証明の意義理解の調査は，図３のような問題をプリントとＯＨＰを用いて生徒に提示し，答えを 10 分で予想させることから始めた。答えの予想は個人で行うよう指示した。予想の際には，プリントの正方形と合同な正方形が印刷された透明シートを全員に配布し，実際に操作しながら答えの予想を立てさせた。

　各自が立てた予想を確かめさせる活動を 25 分から 30 分間行った。確かめ方は特に指示せずに，任意のグループでの話し合いを許可した。このように答えを予想し，それを確かめる活動を実施した後，この問題では「どんな重なり方をしてもその重なる部分の面積は同じになる。」ことを定式化した。

問題　右図のように２つの合同な正方形を重ねて，一方の正方形を他方の正方形の対角線の交点を中心にして一回転させます。



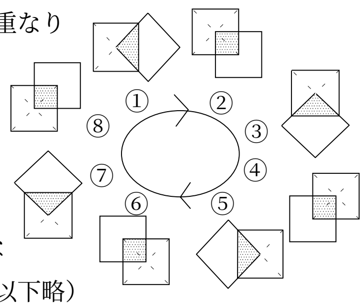
２つの正方形がどのような重なり方をしたとき，重なる部分の面積が一番大きくなるでしょうか。

【図３】意義理解調査に用いた問題

　このことの５つの説明（特殊・実測・実験・*Action Proof*・証明，次の図４参照）を選択肢として用意した質問紙を生徒たちに提示し，ＯＨＰ等を用いて補足説明した。

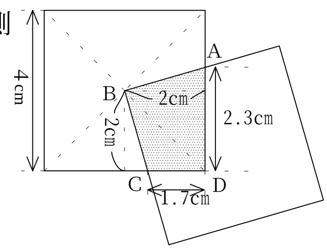
<Ａ君の説明>　※特殊

　①，③，⑤，⑦の重なり方は，直角二等辺三角形です。これは，元の正方形の１／４の大きさです。また，②,④，⑥，⑧の重なり方は，正方形と（以下略）



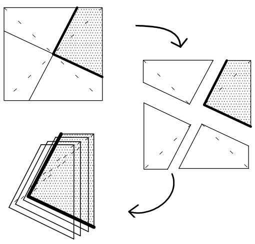
<Ｂ君の説明>　※実測

　元の正方形の１辺を４㎝とすると，その面積は１６㎠となります。（以下略）



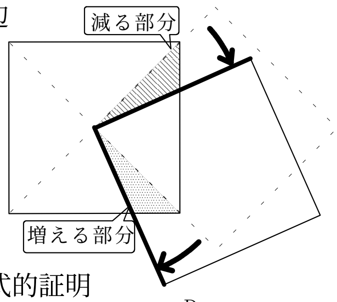
<C君の説明>　※実験

回転する方の正方形の２辺を延長し，その線に沿って，元の正方形をはさみで切ってみたら，４つの四角形はぴったりと重なりました。（以下略）



<D君の説明>　※*Action Proof*

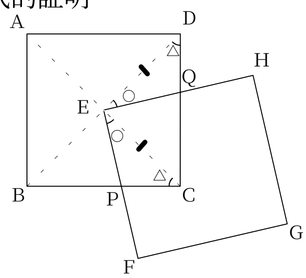
回転する正方形の２辺の動き方は同じだから，「減る部分」の三角形と「増える部分」の三角形はいつも合同となり，（以下略）



<E君の説明>　※形式的証明

右図のように頂点に記号をつけました。△ＰＣＥと△ＱＤＥについて

（以下略）



【図４】意義理解調査で用意した説明

なお，筆者は *Action Proof* を，Semadeni (1984)の定義に基づき「証明のアイデアを含む操作的証明」と捉え，図４の「Ｄ君の説明」のように用意した。

５つの説明の提示と補足説明の後，生徒たちに「一番よいと思う説明」を選択させ，その選択理由を「他の説明と比較して」記述するよう求めた。質問紙調査の様子はＶＴＲとＡＴＲで記録した。質問紙調査後に，選択理由の解釈が難しいと判断した生徒(49 名)を対象にインタビュー調査を実施した。調査の様子はＡＴＲで記録した。

４　調査の結果と分析・考察

4.1　選択状況

次の表５は第１回調査（予備調査）での選択分布であり（梅川,2001a），表６は第２回調査（本調査）の選択分布である。なお，「A･P」は *Action Proof* の意味である。

＼	特殊 Ａ君	実測 Ｂ君	実験 Ｃ君		証明 Ｄ君	合計
合計	31	21	55		40	147
%	21.1	14.4	37.7		27.4	100.0

【表５】選択者数と割合（第１回調査）

＼	特殊 Ａ君	実測 Ｂ君	実験 Ｃ君	A･P Ｄ君	証明 Ｅ君	合計
合計	24	14	21	55	19	133
%	18.0	10.5	15.8	41.4	14.3	100.0

【表６】選択者数と割合（第２回調査）

表５と表６とを比較すると，実験による説明の選択者と形式的証明の選択者が減り，新しく選択肢として用意した *Action Proof* が多くの生徒に支持されたことがわかる。

4.2　一般性の理解の様相

一般性の理解の様相について，生徒が記述した選択理由の筆記録やインタビューの発話記録を基に分析した。その結果，生徒たちの一般性の理解の様相は大きく３つに分類できることが明らかになった。その３つとは，

認識①：特殊な場合でよいとする理解
認識②：適当な１つの場合が成り立てば一般性が保証されるとする理解
認識③：全ての場合を示さなくてはならないとする理解

である。以下に，これらについての事例をあげながら，具体的にその様相を述べる。

認識①：特殊な場合でよいとする理解

中田（Ａ君の説明を選択，以下生徒名はすべて仮名）は次のように選択理由を記述している。なお，このような箇条書きのスタイルは生徒たちが記述した選択理由を引用するときに用いるものとする。

- **1 番正確でいいと思った。Ｃ君の説明はＡ君のと形がちがうけど，だいたいはあってると思ったし，Ｂ君のみたいに長さとか，はかるのはめんどうくさい。　　　　　（中田）**

中田は，重なる部分の形が不等辺四角形になる場合があることを理解している。しかし，そのような一般的な形を考慮することよりも45°ずつ回転させ重なる部分の面積が元の正

方形の１／４になることがわかりやすいＡ君の説明の方が「正確」でよいと判断している。彼女にとってそれは,「一般性」よりも重要であるということである。

認識②：適当な１つの場合が成り立てば一般性が保証されるとする理解

藤井（Ｃ君の説明を選択）は次のように選択理由を記述している。

- **一番イイと思ったわけは，どの形にしても，延長してやればあとは切るだけで同じ形が４つできるというのが分かりやすかった。（以下略：他の説明が面倒なことを述べている。）**
  （藤井，下線は筆者加筆）

藤井は，決して一般性を無視してはいない。実験（経験的証拠）で一般性が主張できるし保障されると考えているのである。その意味で，説明には「一般性」が必要であることを認識していると思われる。ただ，その捉えが数学教育で求められるものと異なっているだけである。

認識③：全ての場合を示さなくてはならないとする理解

宮田（Ｄ君の説明を選択）は次のように選択理由を記述している。

- **Ａ君〜Ｃ君，は一部分のものしか例としてあげていない。全部に共通して言えることを見つけた方がいい。Ｄ君，Ｅ君が良かったけど，Ｄ君の方がわかりやすいし，形として見える。**
  （宮田，下線は筆者加筆）

経験的説明では一般性が保証されないことを指摘し，一般性が保証される説明はＤ君とＥ君であると言及している。宮田は，数学教育における証明で求められる一般性を認識している。

次の表７は一般性の理解の様相について集計した結果である。

＼	特殊 A君	実測 B君	実験 C君	A・P D君	証明 E君	合計
認識①	24	10	14	26	8	82
認識②	0	4	7	8	2	21
認識③	0	0	0	21	9	30
合計	24	14	21	55	19	133

【表７】一般性の認識

この表７の認識③の生徒たち（30 名）は，数学教育における証明で求められる「一般性」を認識しているレベルであり，全体の 22.6% である。この数値は，先行研究（小関ら,1987；国宗,2000；國本,1996）や筆者の第１回調査（梅川,2001a）とほぼ一致する。

4.3　説明性の理解の様相

筆者が実施した第２回調査の意義理解調査に用いた問題では，なぜそうなるのかの理由や根拠を考えるためには「減る部分」の三角形と「増える部分」の三角形に注目し，この２つの三角形が本当に合同になるのかに関心が向かわなければならない。この観点から生徒たちの説明性の理解の様相をみると，主に次の３つに分類される。

認識１：減る部分と増える部分について意識していない。
認識２：減る部分と増える部分について意識しているが，その根拠までは言及していない。
認識３：減る部分と増える部分について意識し，その根拠まで言及している。

以下に，これらについての事例をあげながら，具体的にその様相を述べることとする。

認識１：減る部分と増える部分について意識していない。

Ａ君の説明・Ｂ君の説明・Ｃ君の説明を選択した生徒たちのほとんどは，選択理由に「減る部分と増える部分」についての記述が見られない。またインタビューにおいても発話されていない。一方，Ｄ君の説明（*Action Proof*）やＥ君の説明（形式的証明）を選択している生徒でも，選択理由にその記述がない場合やインタビューで発話されていない場合は認識１とした。例えば，次の奥村（Ｄ君の説明を選択）のような場合である。

- **理由はいかに速く説明できるかです。Ａ君の説明は８つの図をかかなくてはならないし，Ｂ・Ｅ君の説明は計算しなくてはならないし，Ｃ君の説明は画用紙を切らなくてはならない，しか**

しＤ君の説明は図は一つですむ，計算はいらない，べつに正方形を切らなくてもよい，という点でＤ君の説明が一番いいと思う。

（奥村，下線は筆者加筆）

彼の選択理由には，Ｄ君の説明は面倒でなく簡単な説明であるという評価が記述されており，「減る部分と増える部分」に関連した記述がない。そのため，認識１とした。

認識２：減る部分と増える部分について意識しているが,その根拠までは言及していない。

上山（Ｄ君の説明を選択）は，選択理由を次のように記述している。

- **見ただけで増える部分と減る部分がわかるのでわかりやすかった。他のは計算などがあってめんどくさいし考え方がむずかしくてわかりにくかった。　　　（上山，下線は筆者加筆）**

*Action Proof*の「減る部分と増える部分」に注目し，視覚的・直観的な根拠ではあるが演繹的な推論のよさについて言及している。上山の説明性の理解は，後述の小田などの説明性の理解と同等ではない。しかし，根拠が直観的であっても演繹的な推論のよさを指摘する上山のような生徒は，演繹的証明のもつ説明性をある程度認識している生徒であると解釈できる。

認識３：減る部分と増える部分について意識し，その根拠まで言及している。

小田（Ｄ君の説明を選択）は選択理由を，Ａ君・Ｂ君・Ｃ君の説明は一般性がないことを指摘した後，次のように記述している。

- **Ｄ君の場合，これもみんなと同じで１つの四角形しか例を挙げていないけど，確かに４つの辺の動き方（動く速度）はみんな同じなので減る部分と増える部分の三角形は同じでこれはどんなときにやっても同じという点で他の４人の説明よりいいと思います。**

（小田，下線は筆者加筆）

彼女は，Ｄ君の説明（*Action Proof*）の減る部分と増える部分に注目している。さらにその根拠にも言及している。このように命題が何故成り立つのかの理由とその根拠に関心を向けることができる彼女は，演繹的証明の「説明性」を十分に認識していると解釈できる。

次の表８は，説明性の理解の様相について集計した結果である。

＼	特殊 A君	実測 B君	実験 C君	A・P D君	証明 E君	合計
認識1	24	12	19	2	2	59
認識2	0	2	2	46	0	50
認識3	0	0	0	7	17	24
合計	24	14	21	55	19	133

【表８】説明性の認識

この表８で認識３の生徒たち（24 名）は，数学教育における証明で求められるであろう「説明性」を認識しているレベルであり，その割合は全体の 18.0%である。

注目されるのは，*Action Proof*を選択し認識２に属する 46 名が全体の 34.6%を占めるという事実である。このグループは，増える部分と減る部分に注目し演繹的証明の説明性を評価している生徒たちである。この生徒たちは，おそらく*Action Proof*が選択肢になければ，経験的説明を一番よい説明として選択していたと考えられる。今回の調査問題で*Action Proof*を選択肢に入れたことで，これらの生徒たちが経験的説明を支持していた側から演繹的証明を支持する側に加わる可能性があることがわかったのである。このことは，第１回調査ではわからなかったことである。そして，ここに，演繹的証明への移行的段階として*Action Proof*を導入すること，それを演繹的証明として認めていくことの意義をみることができる（梅川，2001b）。

4.4　「一般性」と「説明性」の理解の関連

「一般性」は授業で中心的に指導されてきた証明の意義であり「説明性」は授業では強調されてこなかった証明の意義である。そこで，前頁の表７の認識③と表８の認識２と認識３に注目し，それを集計したのが次頁の表９である。なお, 分類番号は次の意味である。

分類 01：一般性（認識③）のみ

分類 02：説明性（認識２と認識３）のみ

分類 03：一般性（③）と説明性(2,3)両方

分類＼	特殊 A君	実測 B君	実験 C君	A･P D君	証明 E君	合 計
01	0	0	0	0	0	0
02	0	2	2	32	8	44
03	0	0	0	21	9	30
合計	0	2	2	53	17	74
総数	24	14	21	55	19	133

【表９】一般性と説明性を意識している生徒数

この表９から,「一般性」を理解している生徒たちはある程度の「説明性」を認識していること（表９，分類 01 と分類 03）と,「一般性」を理解していなくとも「説明性」をある程度認識している生徒たちが存在すること（表９，分類 02）がわかる。そこで，以下に「説明性」の認識に注目して，証明の基礎的内容の理解との関連について分析し考察する。

4.5　証明の基礎的内容の理解と「説明性」の認識との関連

次の表 10 は，基本的な証明問題の結果と「説明性」の認識との関連を集計したものである。なお，証明問題の解答を判定する基準は第１回調査と同じである（梅川,2001a)。また，基礎的内容の調査と意義理解調査の実施日が違うため, 合計の数値は表８とは異なる。

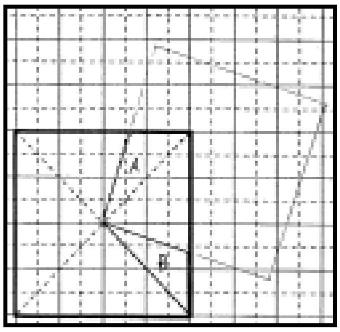
分類	3 SSS	4 SAS 減	5 SAS 加	説明性の認識 1	 2	 3	合計
01	×	×	×	23	13	3	39
02	△	×	×	7	7	1	15
03	○	×	×	4	3	2	9
04	×	△	△	1	0	0	1
05	△	×	△	1	1	0	2
06	△	×	○	0	0	1	1
07	○	×	△	1	3	0	4
08	○	△	×	3	4	1	8
09	△	△	△	1	2	0	3
10	○	×	○	0	1	0	1
11	○	○	×	4	1	0	5
12	○	△	△	2	5	2	9
13	○	△	○	4	4	2	10
14	○	○	△	2	1	1	4
15	○	○	○	4	4	11	19
合計				57	49	24	130

【表 10】証明問題と意義理解

この表 10 からは, 証明問題を記述できる学力と証明の意義の１つである「説明性」の認識との間に明らかな相関関係があるようには見て取れない。そこで，代表的な生徒に注目し，分析と考察を加える。

4.5.1　基礎学力を十分に身につけ,「説明性」の理解が認識３である生徒

古田（Ｅ君の説明を選択, 表 10 の分類 14, 説明性の認識３）は，答えを予想する活動において，図 11 のように重なる部分が不等辺四角形になる場合を１つ作図し, 対角線を辺にもつ三角形２つをＡ，Ｂと命名した。そして,「変わらない。ＡとＢは等しいから。Ａが増えればＢはその分減る。」と記述している。さらに，確かめる活動でも同様の作図を行い，減る部分を黒の斜線で，増える部分を赤の斜線で区別し，「黒い部分が減って赤い部分が増えた。この減る量と増える量は同じ」と記述している。このように，彼は答えの予想とその確かめの時点から，自分の考えの根拠として証明のアイデアを用いている。



【図 11】古田の予想

そして，５つの説明からＥ君の説明（形式的証明）を選択し，その選択理由を次のように記述している。

- **証明することが１番説得力があると思ったから。（古田）**

どうして「説得力があると思った」のかをより詳しく知るためにインタビュー調査を実施した。以下に，その発話記録の一部を引用する。なお, Ｉはインタビューアの意味である。

田	**C君のは，説明された時，一番わかりやすいような気がするけど。**
	待って，C君のは説明された，説明されたというのは？
田	**ていうか，全体に授業をやったとき**

	に，一番やりやすい。
	あ，一番やりやすい。けど？
田	**けど，まだＥ君の方がいいと思います。**
	まだ，Ｅ君の方がいい。どういうふうにいい？
田	**なんか，授業の流れ的には，まずＣ君のやつでやった後に，Ｅ君のやつをやって，やれば，多分，かなり分かると思う。**

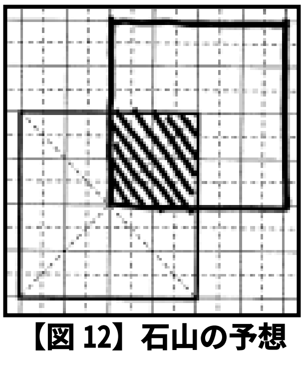
古田は，授業場面を想定し自分が理解する過程を発話している。彼は，「重なる部分の面積が変わらない」事実を理解するためには，Ｃ君の説明（実験）が一番わかりやすいと述べている(21 古田)。さらに，Ｅ君の説明（形式的証明）により「かなり分かる」(27 古田)と発話している。彼の「かなり分かる」対象は，次のインタビューでの発話記録から解釈することができる。

	わかりました。Ｄ君のは？
田	**んっと，減る部分と増える部分が同じってことを，証明した方がいいと思う。**
	うん。証明した方がいいと思う。どうしてかな？
田	**減る部分と増える部分が同じだって言われて，違うかもしれないって思う人がいるかもしれない。**

Ｄ君の説明(*Action Proof*)の根拠が不確実であり，説得力に欠けることを述べている部分である。つまり，彼にとって「かなり分かる」対象はその根拠である。このように，古田は「事実のわかりやすさ」と「根拠のわかりやすさ」を区別できる生徒である。

4.5.2　基礎学力を十分に身につけていても，「説明性」の理解が認識１である生徒

石山（Ｃ君の説明を選択, 表 10 の分類 15, 説明性の認識１）は，答えを予想する活動において，右の図 12 のように重なり方が正方形の場合を１つ作図し,「どこで重なっても重なる部分の面積は同じになると思う。重なる部分はどこでも４マス分だから。」と記述している。さらに，その確かめの活動では，右の図 13 のように重なり方として３通り（正方形，直角二等辺三角形，不等辺四角形）を別々に作図し，正方形と直角二等辺三角形の面積を４と書き，不等辺四角形は正方形に等積変形している。



【図 12】石山の予想

【図 13】石山の確かめ

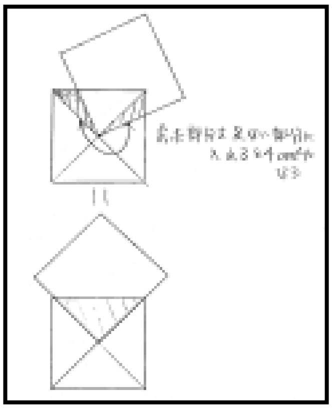
このように，彼女は正しい答えを予想し，それを確かめる活動において，不等辺四角形を正方形に等積変形するアイデアを用いているのである。これは，筆者の用意した *Action Proof* と近いアイデアである。つまり，証明を記述する学力を十分に身につけている彼女は，予想を確かめる活動においてこの命題の証明に気付きうる可能性を示している。しかしながら，彼女は５つの説明からＣ君の説明（実験）を選択し，その選択理由を次のように記述している。

- **Ａ君だと４５°以外で回転してた場合，説明できないのでだめだと思いました。Ｂ君やＥ君のは確実だけど，いちいち全部やるのがちょっとめんどうだし，わかりづらいかも？　（石山）**

このように，形式的証明は確実であることを指摘しながらも,「めんどうだし, わかりづらいかも？」と記述していることから，彼女は「事実のわかりやすさ」を基準に選択しているものと解釈される。証明を記述できることとそのよさ（説明性）を認識することとは別の次元で起こることなのかもしれない。

秋葉（Ｃ君の説明を選択, 表 10 の分類 13, 説明性の認識１）は，答えを予想する活動において，作図せずに「どんな重なり方をしても面積は同じになる」と記述している。さらに，その予想を確かめる活動では次頁の図 14 のように，不等辺四角形を直角二等辺三角形に等積変形する図を描き，「足りない面積と

余った面積は同じ」と記述している。このように，彼は正しい予想を立て，それを確かめる活動において，証明のアイデアを用いているのである。つまり，彼は筆者の用意した*Action Proof*を十分に理解できる生徒である。しかし，秋葉は５つの説明からＣ君の説明（実験）を選択し，その選択理由を次のように記述している。



【図 14】秋葉の確かめ

- **Ｃ君の説明はＢ君の説明のように長さを測ったり計算をしたりと面倒なことをしていない。Ｃ君の説明はひとめで 1/4 の面積になることがわかるので，よいと思う。　（秋葉）**

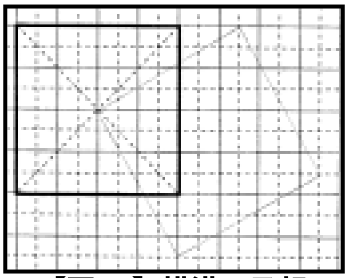
彼は，Ｂ君の説明（実測）を「長さを測ったり計算したりと面倒な」方法であると捉えている。さらに，「Ｃ君の説明がひとめで 1/4 の面積になることがわかるのでよいと思う」と記述していることから判断されるように，秋葉は経験的事実でわかれば十分であると考えている生徒であることがわかる。

このように秋葉は，*Action Proof*の考え方と実験的方法の両方を理解しているが，どんな時に，どのように使えば，どんな効果があるのかという効果の違いを認識していない。要するに，秋葉にとってこの２つの説明の認識論的地位（メタ知識）はほぼ同じということである。言い換えれば，秋葉はＤ君の説明（*Action Proof*）の本当のよさ（説明性）に気付いていないということである。だからより単純な方をわかりやすいという理由で選択したものと思われる。このことは石山にもいえることである。その意味で，演繹的証明（*Action Proof*や形式的証明）の本当のよさ（説明性）に気付きうる経験が必要である。

表10の分類12,13,14,15で説明性の認識１の生徒たち 12 名について分析した結果，石山や秋葉と同様に証明を記述したり理解したりする学力があるにもかかわらず，演繹的証明のよさ（説明性）の認識が十分でないことが明らかになった（梅川，2002）。

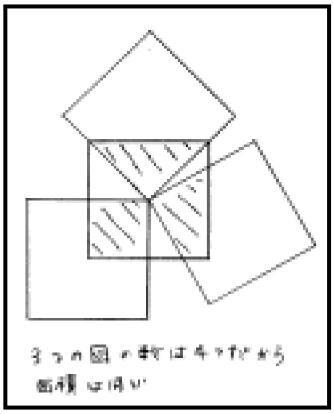
4.5.3　基礎学力の定着が不十分であっても，「説明性」の理解が認識２，３である生徒

横溝（Ｄ君の説明を選択，表 10 の分類 01，説明性の認識２）は，答えを予想する活動で，図15のように不等辺四角形の場合を１つ作図し，「全部同じだと思った。」と記述している。そして，その予想を確かめる活動では，次の図 16 のように，元の正方形を１辺４㎝で作図し，重なる部分として３通り（直角二等辺三角形，不等辺四角形，正方形）を作図している。そして，「３つの■（筆者註：１㎝×１㎝の正方形の意味）の数は４つだから面積は同じ」と記述している。



【図 15】横溝の予想

このように，正しい予想を立て，1㎝×1㎝ の正方形を単位にして面積を数える方法で確認した彼女は，５つの説明からＤ君の説明（*Action Proof*）を選択し，その選択理由を次のように記述している。



【図 16】横溝の確かめ

- **Ｅ君のよりも分かりやすいと思った。（横溝）**

何が「Ｅ君のよりも分かりやすいと思った」のかを詳しく知るためにインタビュー調査を実施した。まず，Ｄ君を選んだ理由をもう一度聞かせて欲しいと問いかけると，

17 横溝	**えー，なんか，ふふふ，増える部分と減る部分が，うーん，あるから，・・・。**

18Ｉ	**うん，増える部分と減る部分があって・・・。**
19 横溝	**同じだって，すぐわかる，・・・。**
20Ｉ	**あ，同じだってすぐわかる。**
21 横溝	**あ，わかりやすい。**

その根拠までは言及していないが，*Action Proof* の「説明性」を評価していることがわかる。さらに，Ｅ君の説明と比較してどのようにわかりやすいのかを尋ねると，

22Ｉ	**うん，どこが？　Ｅ君のよりもわかりやすい・・・。**
23 横溝	**て，いうか，計算とかよくわかんない・・・。**

Ｅ君の説明（形式的証明）は，文字式で書かれているためにわからないと発話していると思われる。しかし，次の発話記録から彼女は全く理解できないのではないことがわかる。

46Ｉ	**ということは，Ｅ君とＤ君のとを比べて，Ｄ君のを選んだんですね。Ｅ君のは計算でわかりづらいって。Ｅ君の書いてあることって・・・。**
47 横溝	**Ｄ君のと同じ。**

A, B, C君についてどう思うかを尋ねると，

溝	**Ｃ君のもいいと思ったんだけど。**
	あ，Ｃ君のもいいと思ったんだ。じゃ，書いてくれれば良かったのに。
溝	**だけど。**
	だけど，何？
溝	**いや。いいと思いました。**

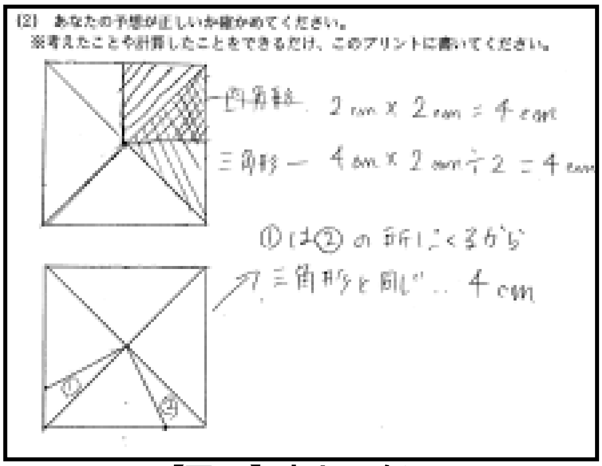
彼女は, うまく表現できずにいる。「C君のもいいと思った」のは何か,「だけど」どんな理由でそれを選ばなかったのかは明らかではないが，そのことは次の部分から推測できる。

	こういった，Ａ君とかＢ君とかＣ君とかも意識して，Ｄ君を選んだ？
溝	**あんまり。**
	あんまり，意識しなかった？
溝	**はい。(笑)**

つまり, 彼女は５つの説明から選択する際に, 経験的説明を最初から選択候補にしていなかったのである。演繹的証明（Ｄ君，Ｅ君）だけが選択候補であった事実から，彼女は説明とは「理由や根拠が明示されているもの」でなければならないと考えていると推測される。このことは，*Action Proof* が選択肢になければわからなかったことである。彼女の場合，形式的証明はわからないものとして切り捨てられていた可能性があるからである。

本山（Ｅ君の説明を選択, 表 10 の分類 01，説明性の認識３）は，答えを予想する活動において，予想用プリントに重なる部分が正方形の場合を１つ作図し，「どこを重ねても同じだと思う」と記述してあったものを消している。このことから，おそらく本山は正しい予想を立てていたと推測される。

続いて，予想を確かめる活動では，次の図 17 のように元の正方形を１辺４㎝で作図し，重なる部分として３通り（正方形の場合，直角二等辺三角形の場合，不等辺四角形の場合）を作図している。そして，確かめ用プリントに「四角形２㎝×２㎝=４㎝, 三角形４㎝×２㎝÷２=４㎝, ①は②の所にくるから三角形と同じ 4㎝」と記述している。また，わかったことを書く欄には「すべて４ｃｍ」とはっきりと記述している。



【図 17】本山の確かめ

本山の確かめ用プリントでは，直角二等辺三角形を三角形と表現していたり，４cm^2を４㎝と書いていたり，表現上の正確さに欠ける所が見受けられる。しかし，本山はこの確かめる活動において，実測による方法だけでなく，不等辺四角形と直角二等辺三角形との比較から合同そうな三角形を見つけ，これを移動するという等積変形のアイデアを獲得しているのである。これは証明のアイデアであ

る。このことは，基礎学力の定着が不十分な生徒であっても数学的活動を実現でき，その活動を通して証明のアイデアに気付きうることを示唆するものである。

本山は５人の説明からＥ君の説明を選択し，その選択理由を次のように記述している。

- **Ｄ君は，計算とか何も使わないで考えを出していたけど，Ｅ君のようにしょうめいを使って出すとすごくわかりやすいと思ったから。（本山）**

何が「すごくわかりやすい」のかを詳しく知るためにインタビュー調査を実施した。

13エ	**その，なんとなくというのが，・・・Ｄ君のは式とか計算を使ってなくて･･･，Ｅ君のは証明使ってあって・・・。**
14本山	**はい。そうです。**
15エ	**じゃあ，Ｄ君の，そのわかりにくい所って，どういう所かな？**
16本山	**うーん。・・・増える部分と減る部分？の・・・。**
17エ	**増える部分と減る部分の？**
18本山	**（笑）うん，増える部分と減る部分の，なんか，わかんない。**
	なんか，わかんない？
山	**よく，理解すれば分かるのかも知んないんだけど，こっち（Ｅ君の説明を指す）の方が読んでわかる・・・。**

彼女は，うまく表現できずにいる。しかし，「よく，理解すれば分かるのかも知んないんだけど」(20 本山）から，Ｄ君の説明は「増える部分と減る部分の」面積が等しくなる根拠がわからないことを意味しているものと解釈できる。筆者が用意したＤ君の説明では，２つの三角形が合同である根拠は「回転する正方形の２辺の動き方が同じ」ということであった。本山はこの根拠を「なんか，わかんない」(18 本山)と言っているのである。本山が「根拠のわかりやすさ」という判断基準により形式的証明を選択している事実は，学力とは関係なく，形式的証明の「説明性」を理解しうることを示唆するものである。

５　証明の意義指導改善への示唆

以上の分析と考察から，証明の意義指導を改善するために得られた示唆は，主に次の３点である。

(1)証明の意義として「一般性」のみを強調することの注意

本調査において，中学３年生の「一般性」の理解は全体の 22.6%であった（**4.2**）。証明の意義として中心的に指導されているにもかかわらず，この理解度は低い数値である。

さらに，説明には一般性が大切であることを理解しながらも，それは経験的証拠で主張できるし保証もされると考えている生徒たちの存在（**4.2**，表７，認識②）を見逃してはならない。彼らに「一般性を保証するためには，演繹的な方法によらなければならない」と指導しても，理解されないのである。彼らには「一般性」に加えて，他の証明の意義を提示すべきである。それは「説明性」である。

(2)「説明性」を理解させるための *Action Proof* の有効性

説明性の認識３の生徒たち(24 名，18.0%)に，*Action Proof* を選択し説明性の認識２の生徒たち(46 名，34.6%)を加えると全体の 52.6%を占めるという事実（**4.3**）は，*Action Proof* が生徒たちの「説明性」の理解に貢献しうることを示唆する。それは，*Action Proof* が経験的説明と形式的証明との「橋渡し的」役割を担いうることを意味する。つまり，生徒たちが *Action Proof* と経験的説明とを比較するとき，その違いとして「説明性」を認識しやすいということである。このことは，証明の意義指導において，*Action Proof* を導入することの意義を示唆するものである。

(3)証明の意義指導を意図的に設定することの必要性

基礎学力の定着と証明の意義理解との間に明らかな相関関係がみられなかった事実と基礎学力の定着が不十分な生徒たちが数学的活動を実現させ，演繹的証明の「説明性」を認識していた事実(**4.5**)は，「一般性」や「説明性」を理解できる「適切な文脈」を教師が意図的に設定することの必要性を示唆するもの

である。つまり，学習意義は学力の定着に伴って自然に理解されるものではなく，そのための意図的な指導が必要であるということである。それは，学力とは関係なく，実現しうることである。

「適切な文脈」とは *Action Proof* を取り入れることで実現でき，生徒たちが経験的説明と演繹的証明とを比較し，その違いを検討できる特別な場である。それは「一連の学習活動の中に経験的説明や前形式的証明，形式的証明を意味ある活動として位置付けることにより,それぞれの意義を生徒が獲得していく」（國本,1996)授業である。さらに，生徒たちがそれぞれの意義を理解するためには「生徒の討論活動と教師の意図的な介入」（国宗，1987)が必要である。そのような活動を通して，生徒たちは「新しい概念によって，今までできなかったどのようなことが可能になるのか」（岩崎，1994）を獲得するのである。

６　今後の課題

今後の課題は，主に次の２点である。

(1)中学２年生が実際に証明を学習する際に，本稿で得られた示唆が有効であるのかについて検証すること。

(2)「適切な文脈」を実現する学習課題の開発とそれを生かした図形の証明単元を構成し，その効果を検証すること。

＜引用・参考文献＞

Bell，A. W. (1976).A STUDY OF PUPILS’ PROOF-EXPLANATIONS IN MATHEMATICAL SITUATIONS. *Educational Studies in Mathematics,* 7, 23-40.

de Villiers，M. (1990). THE ROLE AND FUNCTION OF PROOF IN MATHEMATICS, Pythagoras, 24, 17-24.

de Villiers，M. (1998). An Alternative Approach to Proof in Dynamic Geometry. R.Lehrer and D.Chazan(eds.). Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space. Mahwah,NJ：LEA.

Hanna,G. (1995). The role of proof in mathematics education. Lecture Note at the Tagung für Didaktik der Mathematik in Kassel， Germany.（磯野正人訳．(1996)．数学教育研究，11，155-168．上越教育大学数学教室．）

ホーガン，J．(1993)．証明は死んだ（山岸義和他訳）．日経サイエンス 12 月号．108-119.

岩崎浩．(1994)．「メタ知識」の意味．数学教育研究．第９号．33-42．上越教育大学数学教室.

國本景亀（研究代表者）．(1996)．空間直観力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善．平成６～７年度文部省科学研究費補助金　一般研究（C）．課題番号 06680256 研究報告書.

國本景亀．(1998)．準経験主義の哲学に基づく証明指導の研究．日本教科教育学会誌，21(2)，35-43.

国宗進．(2000)．図形の論証に関する理解度の変化．日本数学教育学会誌，82(3)，66-76．

小関熙純編著.(1987).図形の論証指導.明治図書.

宮崎樹夫．(1993)．学校数学における証明の意義に関する考察 ：証明の機能に焦点を当てて．筑波大学教育学系論集，18(1)，155-169.

文部省．(1991)．中学校指導書数学編（平成元年７月）．大阪書籍.

Semadeni,Z.(1984).Action Proofs in Primary Mathematics Teaching and in Teacher Training. *For the Learning of Mathematics*，4，32-34.

杉山吉茂．(1975)．証明の意味:demonstration と proof．日本数学教育学会誌，57(5)，107-111.

杉山吉茂．(1986)．公理的方法に基づく算数・数学の学習指導．東洋館.

梅川貢司．(2001a)．証明の意義理解に関する調査からの一考察.上越数学教育研究(16),115-126.

梅川貢司．(2001b)．中学校における証明の意義理解の調査研究.日本数学教育学会第 34 回数学教育論文発表会論文集．319-324.

梅川貢司．(2002)．数学教育における証明の意義指導に関する基礎的研究：中学３年生を対象にした調査を手がかりにして．上越教育大学大学院修士論文（未公刊）.