算数の問題解決における図による問題把握を促す教師の支援について

廣井　弘敏
上越教育大学大学院修士課程２年

1. はじめに

図をかくことは, 問題解決ストラテジーに位置づいている（Polya, 1954；古藤, 1985）。しかし, 子どもが図を道具としてうまく使っていない実態のあることが報告されている（Diezmann ら, 2001；菊地, 1996；山本, 1995）。そこで筆者は, 子どもが図をうまく使えない原因として図の制約を取り上げ, そうした制約が少なく, 心理的に同型性を得やすい「子どもが自由にかく図」の可能性について指摘した（廣井, 2001a）。子どもが自由にかく図をもとに分析している先行研究では, 図の効果が示されている（Lopez-Real ら, 1993；Moses, 1982；Van Essen ら, 1990）。しかし, 学習者が解決の過程で図にどのように関わったのかについては明らかにされていない。

最初にかいた素朴な図が, 子どもの理解に伴ってどのように変化していくのかを扱った研究（Gibson, 1998；花形, 1990）からは, 学習者の理解に伴って図が変化し, 学習者がその変化した図をもとに問題把握を進めていることが見いだされている。そして, 問題解決の過程で刻々と変化する図を, 学習者がどのように捉え利用していたのかについては, 廣井(2001b)により次の２点が実態として報告されている。

- **子どもは，問題の条件を 1 つの図にまとめることで不整合となっている考え [1)]に気付いた。**
- **子どもは，計算結果を図に当てはめることで不整合となっている考え [2)]に気付いた。**

そして, これらの気付きから問題の構造を把握するきっかけを得たとしている。

しかし, 子どもがこのような図による問題把握を必ずしもできるとは限らない。考察された２つの事例の内, １つは教師が図の利用を促すことで図による問題把握が可能となっている。そこで本稿では, 子ども自らの力では図による問題把握が進められない場合に対する教師の支援のあり方について考察する。

2. 調査の目的と方法

2.1 調査の目的

小学５年生の問題解決の様子を図の変化や発話, 教師の支援に着目して分析し, 子どもが問題把握に図を生かすための教師の支援について明らかにすることを目的とする。

2.2 調査の方法

平成 13 年 7 月に新潟県内の公立小学校５年生の男子３名, 女子３名について, それぞれ二人組みと一人に分かれて問題に取り組んでもらった。記録には VTR を２台用い, １台で作業用紙を記録し, もう１台で表情などを含む活動全体を記録した。音声は ATR１台を使用し記録した。問題は以下の通りである。

> **問題：つるを折るので，きよしさんとあき子さんは 60 枚の色紙を 2 人で分けます。あき子さんの方がきよしさんよりも 12 まい多くなるようにします。それぞれの色紙の数は何まいになりますか。**

2.3 教師の支援の計画

計画した支援を表１（次頁参照）に示す。支援１は, Moses（1982）のイメージングの手法

や，藤田(1999) の情報の生成を促す支援を参考にしており，調査の基本的な流れを示している。特に，図による問題把握の提案（支援**1-3**）は，子どもの問題解決の文脈にインタビュアーが寄り添い，子どもが計画した解決方法をやり尽くしたときに行なうことにした。

支援２は，子どもが図の利用によって不整合となっている考えに気付き，問題把握を進めた実態(廣井,2001b)に沿う形で設定した。問題の条件を一つの図にまとめることを期待した支援が支援 2-2 であり，計算結果を図に当てはめることを期待した支援が支援 2-3 である。支援 2-1 は，支援 2-2 と支援 2-3 を支える支援として位置づけた。問題の条件に沿った複数の図を結びつけたり，計算結果と図を結びつけたりするには，その前に問題文で示された条件全てのイメージを図に表しておく必要があると考えたからである。図に表す具体的な内容は，全体の枚数の条件（和が 60 枚）と双方の枚数に関わる条件（差が 12 枚）の２つである。実際の支援はこうした支援を基本としつつ，子どもの状態に応じて柔軟に対応することにした。

表 1

支援1	1-1	最初に問題文を声に出して読ませる。
	1-2	問題に自由に取り組ませ，できそうなことを何でもやってもらう。
	1-3	本人が困ってしまい，活動が停滞したときに「図にかいてみたらどうだろう」と投げかける。
	1-4	図にかくことでも行き詰まった場合，情景図や具体物の提示を行う。
	1-5	最後に立式するように依頼する。
支援2	2-1	図に表されていない問題の条件のイメージング。
	2-2	問題の条件に沿った複数の図の結びつけ。
	2-3	計算結果と図の結びつけ。

3．事例１（松木の問題把握の概要）

(1)　色紙を分ける様子をイメージングした場面

松木は最初に 60÷12＝５と計算し，答えを５枚とした。そこで，教師は「色紙を分けている様子ってのはなんか，こう，ぽーっと頭の中に浮かんできますか？」(88T･1-3) [3]「二人でなんか，分けてる様子をここに，かけるかね。」(99T･1-3) と色紙を分けている様子についてイメージングを促した。この教師の働きかけに対して，松木は「で，分けてるから」（109 松）と述べながら図１をかいた。

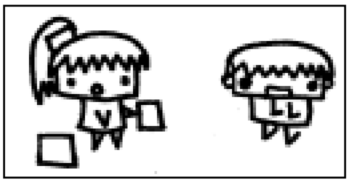


図 1 (松木)

そこで教師は，「じゃ，渡す前に何かしてないかな。」(158T) と尋ねると，松木は「うーんと，分けるからー」（162 松）「分けてるところもかくかな。」（164 松）と述べてから図 2 をかいた。そして，「こっから取って」(186 松)「うん。取って，あげる分に入れてる。」(190 松) とかいた図を指で示しながら話し始めた。さらに「こっから (四角形①) 取って，最初どうするの？」(193T) の支援に対して，次のように述べた。

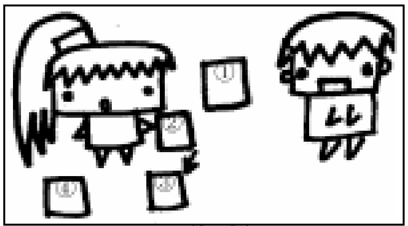


図 2 (松木)

番号は筆者が付けた

198 松：最初（四角形①）はここ（③）に置いて，次に，また取って，ここ（④）に///

206 松：それで，この折り紙（①）が，なんて言うんだろ。終わりまでやって［④③④の順に指す］[4]，

216 松：それで，12枚多くするようにするんだから，こっから（③）12枚取って，こっち（④）に入れる。

(2)「12 枚多い」部分をイメージングした場面

その後，「あき子さんの方がきよしさんよりも 12 枚多くなるようにします。っていうと，どんな感じが浮かんできますか。」(289T･2-1) と教師が尋ねると，松木は，

295 松：うーんと，はじめは，同じ枚数で

297 松：それで，あき子さんの色紙が，

299 松：12枚増えた（語尾を上げて話す）。

301 松：うん。きよしさんはそのまま変わらない。

と答えた。それに対し，教師が「それで考えてみるとどうかな。今言ったの，なんか絵にかいてみたらどうなりそうですか？」（305T・2-1）と問いかけると，松木は「一番はじめは同じ枚数だから」（310 松）と言いながら図 3 をかいた。教師はさらに「12 枚多いっていうのは，どうしたらいいかな。」（332 T・2-1）と尋ねた。

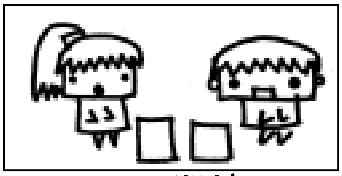


図 3(松木)

すると松木は，図 3 の左下に 12 枚の色紙を 1 枚ずつかき，その 12 枚の色紙を女の子の隣に位置する四角形に矢印でつなげることで表現した（図 4）。

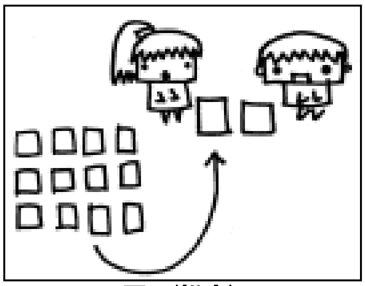


図 4 (松木)

教師が「これで考えたら，数何枚になるかね。」（342T）と尋ねると，松木は「60÷2=30，30+12=42」の式を書き，「あき子さんは，42 まいで　きよしさんは，30 まいのまま。」と書き加えた。教師がこれで問題文と合っているかを問うと（358T）「これだと 72 枚になっちゃう。」（371 松）と答え，教師が「72 枚だと」（374T）と言いかけると，松木は，

377 松：あき子さんの方が，12枚多く分けられる。

381 松：でも，60枚だから，

383 松：うーんと，あき子さんの方を，12枚多くすると，
きよしさんは12枚少なくなる。

と続けて話した。

(3) 色紙を切って問題解決を図ろうとした場面

教師が図 4 を指し，「これだけで何とかうまくいくようにならないのかな。」（391T・2-2）と尋ねると，図 5 の四角形の外枠をかきながら「色紙が，これ（図 5 の四角形の外枠）だとすると」（401 松）「30 枚ずつで引くのかな。」（403 松）と言い，さらに「半分にこうやって切ればいい。」（413 松）と述べて，図 5 の四角形の外枠に縦線をかき加えた（図 5）。

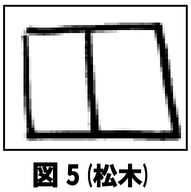


図 5 (松木)

そして図 5 の右に小さな四角形を 30 個かき，右上の四角形 3 つに斜線を引いた（図 6）。

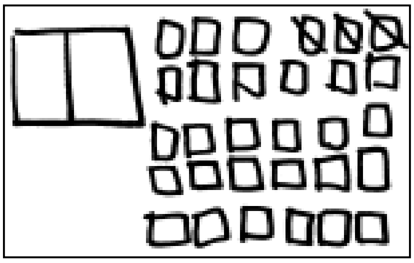


図 6 (松木)

その後，きよしとあき子の色紙を 3 枚ずつ半分に切って 12 枚の色紙を作り出し，その 12 枚をあき子にあげる考えについて話した。

(4) 具体物をもとに考えた場面

その後，教師は具体物である色紙を松木に操作させた(支援 1-4)。松木は 60 枚の色紙から 1 枚ずつ取り出して 30 枚の山を作り，手元に残った分を左隣に置いた。そして左側の 30 枚の色紙の山から 12 枚取って，右側の 30 枚の色紙の山に重ねようとした。そこで，教師が「これ（具体物である 12 枚の色紙）はここ（図 4 の小さな四角形 12 個）なんだよね。」（593T・2-2）と言いながら 12 枚の色紙を図 4 の小さな四角形 12 個に重ねた（図 7）。すると，松木は「これを重ねちゃって」（594 松）と言いながら 12 枚を除く残りの 2 つの色紙の山を重ね，「こうやって，交互にやる。」（596 松）と話しながら重ねた色紙を 1 枚ずつ左，右と交互に配り始めた。そして，配り終えてできた 2 つの山の内，右側の色紙の山に図 7 の上に置いてあった 12 枚の色紙をのせた。そして，答えを 24 枚と 36 枚として導き出し，「60－12=48，48÷2=24，24+12=36」の式を書いた。

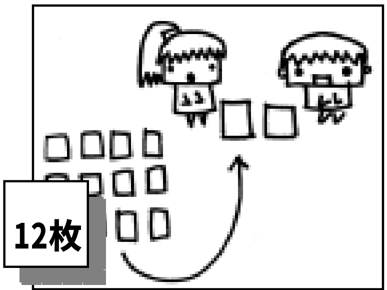


図 7 (松木)

4．事例 1 における支援 2 の効果

4．1　支援 2-1 の効果（支援A）

松木が図 2 をかいて得た情報は，色紙を 12 枚移動させることで，全体の枚数の条件（和が 60 枚）を保ったままで「12 枚多い」状況を作り解決を図るものであった。従って，松木の「12 枚多い」の理解は 12 枚の移動であった。

教師は，松木が全体の枚数の条件には意識を充分向けていると判断し，もう一方の条件である双方の枚数に関わる条件のイメージングが必要であると考えた。そこで，支援 2-1 である図に表されていない条件（双方の枚数に関わる条件）をイメージングさせる支援を行った（289T・2-1）。すると松木は，あき子のみが 12 枚増えて，きよしの枚数が「そのまま変わらない」（301 松）と述べた。この松木の理解は，全体の枚数を考慮に入れずに，はじめはあき子ときよしに同じ枚数の色紙が存在し，単にあき子が 12 枚多くなることのイメージから得られた情報である。

その後，松木の発言内容(295，297，299，301 松)を図に表すように勧めた支援(305T・2-1)によって松木は図 3 をかき，その中の 2 つの四角形に対して「一番はじめは同じ枚数」と意味付けている（310 松）。さらに，12 枚多い部分のイメージング(332T・2-1)によって，松木は図3を発展させて12枚の色紙が新たに加わる図4を作った。松木のイメージが図 3，図 4 により具体的に表現されることで，あき子が 12 枚多いことが，きよしからあき子への 12 枚の移動とは異なることが明確になった。さらに，あき子ときよしに共通部分があって，12 枚がそれとは別に存在していることが意識された。そして，教師が色紙の枚数を尋ねる（342T）と「あき子さんは，42 まいで　きよしさんは，30 まいのまま。」と書き加えている。あき子が 42 枚できよしが 30 枚との答えは，全体の枚数の条件である 60 枚から切り離して，12 枚多い状態を考えていることを示している。

したがって，合計枚数が 72 枚であれば「あき子さんの方が，12 枚多く分けられる」（377 松）との理解が図から得られたと考えられる。

結局，289T，305T，332T（支援Ａ）により，松木は 12 枚の移動による解決から離れて，12 枚多くなることのみの素朴なイメージを獲得することが可能となり，合計枚数が 72 枚の場合については解決することができたと考える。

4．2　支援 2-2 の効果（支援B，支援C）

図 4 において松木が「12 枚多い」状態を，あき子ときよしの共通部分と 12 枚の構造として捉えたと判断した教師は，“ 60 枚 ” だけで図 4 のようにできないかを問うことを目的に「うん。これだけで何とかうまくいくようにならないのかな。」（391T・2-2）と問いかけた（支援Ｂ）。この支援は，“ 図 4 ” と，全体の枚数が 60 枚のときに 12 枚の移動で解決を図ろうとする活動を導き出した “ 図 2 ” を結びつけている。しかし，図 2 に 12 枚の移動が表現されていないため，具体的な支援は，“ 図 4 ” と 383 松で述べている“ 全体の枚数が 60 枚のときに 12 枚の移動で解決を図ろうとした活動 ” を結びつける形でなされた。

この教師の支援（391T・2-2）によって，松木は不整合を起こすこととなった。それは，図 4 で表されている内容である，きよしとあき子に同数の色紙があって，あき子のみ 12 枚増えると考えた点（295，297，299，301 松）と，全体の枚数が 60 枚では 12 枚の移動でなければ解決できないと考えた点（381，383 松）との間の不整合である。

そこで松木は「30 枚ずつで引くのかな。」（403 松）と述べている通り，あき子ときよしの色紙の枚数を同数に保つこと，つまり図 4 のイメージを維持しつつ，あき子に加えるべき 12 枚の色紙を作り出す方法を考えようとした。その一つの解決策が，あき子ときよしから 3 枚ずつ抜くことで，二人の枚数を同数に保ち，さらに，その抜いた色紙をそれぞれ半分に切って 12 枚の色紙を生み出すとい

うものであった。松木は図5の外枠の四角形をかいてから，しばらく思案し，その後「半分にこうやって切ればいい。」（413 松）と述べて，図5の外枠の四角形に縦線を入れた。従って，色紙を切るアイディアは，図5に色紙を表す四角形をかいたことと，過去に色紙を使った経験が結びついたことでもたらされたと考えられる。このように色紙を切断することで新たに色紙を作り出せば，きよしとあき子に同数の色紙が存在し，あき子のみ 12 枚増える点と，全体の枚数が 60 枚である点とを整合できると松木は考えたのであろう。（ただし，全体の枚数が 60 枚であるのは色紙を切る時点までで，切断後は 66 枚になっている。松木はその点には気付いていなかった。）

結局，支援 2-2 の 391T（支援B）によって松木は不整合に気付き，色紙を切断することで問題把握を進めることができた。

その後の支援 2-2 は，具体物である 60 枚の色紙を松木が操作し，色紙を 12 枚移動させることで答え（18 枚と 42 枚）を導いた後に行われた。そのとき，教師は図4と図2を結びつけようと考えていた。しかし，支援の直前に松木は具体物による操作活動を行っており，その操作活動が図2をかいたときに述べた 12 枚の移動と同一であると判断したことから，実際の支援は松木が操作した色紙と図4との関連について尋ねるものに変更された。具体的には「これはここなんだよね。」（593T）と，12 枚の色紙（具体物）を図4の 12 枚の色紙の部分に重ねるというものであった。

この段階において，松木には不整合が起こっていたと考えられる。教師が図4に重ねた 12 枚の色紙（具体物）は，松木にとっては，きよしの 30 枚の色紙から 12 枚抜いて，あき子に渡すものであった。したがって，12 枚を除いた残りの色紙については，きよしは 18 枚であき子は 30 枚と，同数の色紙を持ってはいない。しかし，図4では後であき子に渡す 12 枚を除いたあき子ときよしの色紙は，同数として表現されている。

そこで，松木は「これを重ねちゃって」（594 松）「こうやって，交互にやる。」（596 松）と，具体物である色紙の枚数を図4のイメージに合うように調整することで整合させようとした。そのことにより，増加分 12 枚を除くと、あき子ときよしは 24 枚ずつになるという問題の構造を理解し，立式もすることができた。

結局，支援 2-2 の 593T（支援C）により，松木は不整合に気付き，具体物の色紙を重ねて交互に配ることで，問題把握を進めたことが分かる。

5．事例2（小川・石川ペアの問題把握の概要）

(1) 子どもが自由な追求をした場面

小川が「二人に分けるんだよね。」（52 小）と発話し，二人で 60÷2 の計算を行った。さらに 30÷12 の計算を二人で一緒に行おうとするが，計算結果が小数になったことで，小川は次のような発話をした。

159 小：それで，その，だから，きよしさんのが，
161 小：12枚減って，
163 小：あき子さんに12枚行くんじゃないの（語尾を上げて話す）

そこで，教師が色紙の枚数を尋ねると，小川は「一人 18 枚，一人 42 枚だ。あ，違う。」（218 小）と言って 42-18=24 の計算を行った。そして，「あ，こっちは 24 枚も多いや。何でだ。」（228 小）と疑問点について述べた。

その後「さー（語尾を上げて話す）。一人 12 枚に，あ，一人 10 枚。分かんないねー。42 で 18 だから［天井を見る］。」（240 小）と当惑したような発話をした。

(2) 問題文全体をイメージングした場面

教師は，問題文全体を読み上げて「頭の中に何かこう，浮かんでこ

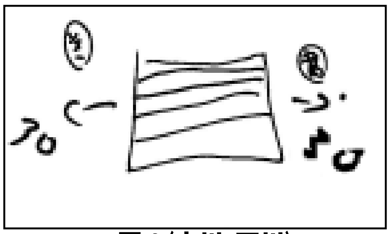


図8（小川・石川）

ないですかねー。」(273T・1-3)と働きかけた。すると二人で図 8 をかき，

308 小：こっち 30 枚でこっち 42 枚にすれば 12 枚多くなるよ。

310 小：でも，そしたら 60 枚にならないね。

と発話し「だから，こっちのやつ（図 8 の左側）を 12 引いて，答え出して」(312 小)「で，こっちに 12 を足す。」(314 小）と考えを訂正する。しかし「あ，でもだめだ。したらもっと差開いちゃう。」（316 小）と述べた。

(3)「12 枚多く」なる部分をイメージングした場面

教師が「あき子さんの方がきよしさんよりも 12 枚多くなるようにします，っていう所って絵にできそう？」(382T・2-1) と支援すると，小川は図 8 の右側に横の訂正線を引き，その下に「42」を記入した（図 9)。この図に対して，

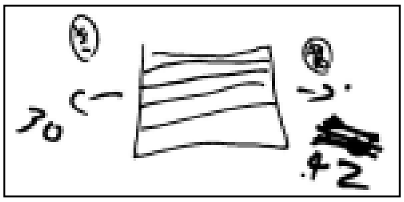


図 9（小川）

387 石：72 になっちゃう。

389 小：でも，12 枚多くするんだからいいんじゃないの。

と二人でやり取りをした。

そして小川は，60－12＝48，30－12＝18 の計算を行い「差が 12 になればいいんだけどね。」（445 小）と述べた。

(4) 60 枚の色紙を二人で分ける部分をイメージングした場面

教師は「きよしさんとあき子さんは，60 枚の色紙を二人で分けますっていったら，どういうのが浮かんできそう？頭の中に。」（474T・1-3)とさらに支援を行った。すると，二人とも手を縦に二回振り下ろす動作をして「分ける」と答え，一緒に図 10 をかいた。

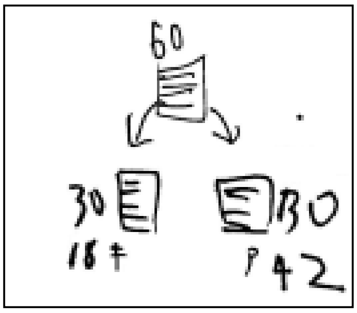


図 10（小川・石川）

そこで，教師が「あき子さんの方がきよしさんよりも 12 枚多くなるようにしますの，12 枚ってどこに，あるかね，絵の中でね。」(507T・2-2) と尋ねると，小川は図 10 の右の四角形に「冂」の形を加え，さらに横線 2 本を右側に加えてその間に「12」とかき，「18 キ」の文字を横線で消して図 11 のようにした。そして， 石川と次のようなやり取りをしている。

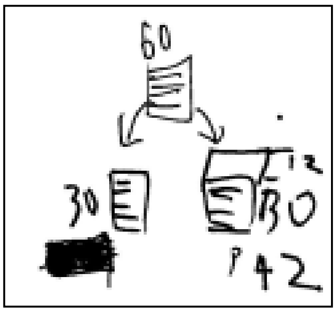


図 11（小川）

515 石：相手のもらうの。

516 小：うん。それを書いてないよね。でも。

517 石：うん。余ったやつ，とったんか。

518 小：あ。うん，6 0枚しかないよ。

523 小：で，こっち[図 11 の左側を指す]は 12 引かないと

その後小川は，きよしがあき子に色紙を 12 枚あげることについて，

531 小：や、作ってもらって [図 11 の右側を指す] 。また戻せば、[図 11 の左側を指す]

533 小：や、それはない。

と述べた。

(5) 20 枚あまりを作って考えた場面

しばらくして小川は，①～③のような方法について話し始めた。①全体の枚数 60 枚をきよしに渡す分，あき子に渡す分，あまりの 3 つに等分する（20 枚ずつになる)。②あまりの 20 枚を 12 枚と 8 枚に分けて，12 枚をあき子に渡す。③残りの 8 枚をきよしにあげる。

その後，小川は③の 8 枚をあき子ときよしに渡す組合せ（あき子：きよし）を（8:0)，(0:8)，(7:1)，(3:5)，(6:2) にして考えた。(③の 8 枚の組合せに伴うあき子ときよしの色紙の総数は(40：20)，(32:28)，(39:21)，(35:25)，(38:22）となる。）それぞれの値が誤答になってしまうことは，差が 12 枚になるかどうかを計算することで毎回確認していた。

ここで教師は，作業用紙が計算結果などの書き込みをしたことで見にくくなったと判断

し，二人で分けている絵を別の場所にかくよう働きかけた。すると，小川は(36：24)の組み合わせを図 12 にかき始めた（③の組合せは（4:4)）。そして「なったよ，一応 12 枚，差になったよ。差が 12 枚になったよ。」（768 小）と，あき子:36 枚，きよし:24 枚が答えになることを確認した。

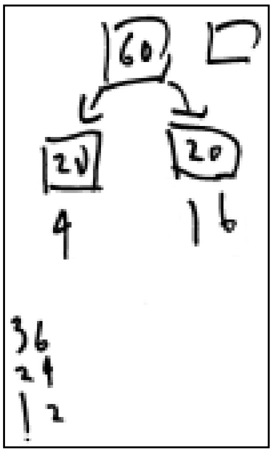


図 12 (小川)

そこで教師は「これを出すように式で書くとしたらどう書けばいいと思う。」(816T･1-5) と支援した。すると小川は，60－40－12＝8 と計算したが，説明はできなかった。

(6) 具体物の色紙を使って考えた場面

教師は，具体物である色紙を提示して二人で分けるように支援した(支援 1-4)。すると，二人は最初持っていた色紙から 20 枚ずつ取り出して２つの山を作った。そして，あまりの色紙 20 枚を 4 枚と 16 枚に分けて，最初取りだした２つの山の脇に置いた（図 13)。

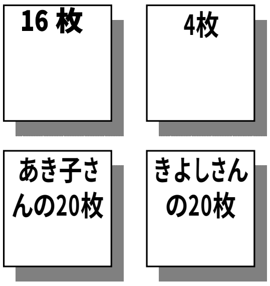
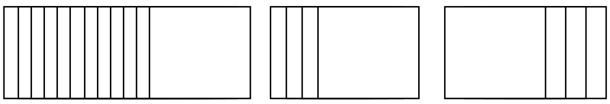


図 13 (小川･石川)



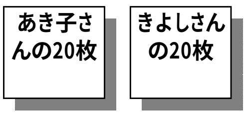


図 14 (小川)

そこで，教師が「12 はどこへ行っちゃったんだろうね？」(971T) と問い掛けると，小川が 16 枚の色紙を 12 枚と 4 枚に分離させた（図 14)。しかし，立式はできなかった。

(7) 24 の意味を考える場面

教師は，具体物である色紙の操作についてのまとめをワークシートに書くように促した。それに対して，小川は図 15 をかいた。すると，

1079 小：あ，同じくすればいいんだ。分けだ，分け。

1083 小：あまりが 12 枚になるように分ける。

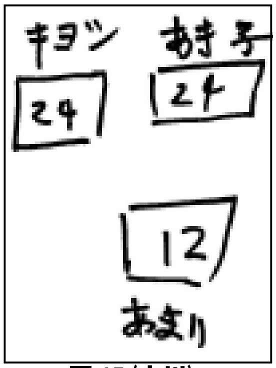


図 15 (小川)

と話した。ここで教師が「24 っていうのはどこから出たんですか？」(1101T･2-3) と尋ねると，

1105 石：42－18 (語尾を上げて話す)

1108 小：じゃ，42 はどっから出たんだ，その前に。

1110 小：18 もどっから出たんだ (語尾を上げて話す)

1114 小：ぜってい変だ。

と困惑したような発話をした。そして，小川が「あまりが 12 枚になるように半分にするから」（1150 小）と述べたことに対し，教師が「これが (具体物の色紙 12 枚) あまりになるような半分ってのは，どういうこと？」（1155T）と尋ねると，小川は，

1156 小：えっと，ろく，60 枚あって，

1158 小：それで，あまりをじゅ，あまりが 12 になるように，あ，なんて言えばいい，あ，12 引いて，

1160 小：えっとー，なんだっけ。60－12 だよね。[60-12 の筆算を書く。]

1162 小：なんだ，わかったぞ。これ，さっきやった気がするんですけどね。

と述べた。そして 60－12＝48，48÷２＝24 を計算し，最初に 60 枚から引いた 12 枚をあき子に渡すことについて述べた。

6．事例 2 における支援 2 の効果

6.1 支援 2-1 の効果 (支援D)

小川は，12 枚の色紙を移動させるアイディアについて３度に渡り発言している(159, 161, 163 小，312，314 小，523 小)。繰り返し発言していることから，小川がこのアイディアについて相当のこだわりを持っていたことがうかがえる。

最初に 12 枚色紙を移動させるアイディア

を小川が話したときには,「何でだ。」(228 小)「分かんないねー。」(240 小)とかなり当惑した発話をしていた。これは，12 枚移動させれば差が 12 枚になるだろうとの見込みが,結果の数値から否定されたことに対しての戸惑いであったと考えられる。

小川と石川の問題把握が停滞していると判断した教師は,イメージングの支援を行った。それは，支援 1-3「図にかいてみたらどうだろう」の対象を問題文全体にしたイメージングであった(273T･1-3)。このイメージングに対して，小川と石川が図 8 をかいた後，小川は「こっち 30 枚でこっち 42 枚にすれば 12 枚多くなるよ。」(308 小）と,「12 枚多い」部分に関して抱いた合計の 60 枚にとらわれない素朴なイメージについて発話した。しかし，教師の支援が問題文全体のイメージングであったために,合計が枚数 60 枚であることを根拠としてすぐに素朴なイメージを撤回した（310 小)。そして，再度 12 枚の色紙の移動で考えようとした（312，314 小)。

教師が次に行った支援は，図 8 に具体的に表現されていない｢12 枚多く｣なる部分をイメージングさせるものであった（382T･2-1)。これに対して，小川は図 8 に「42」を書き加えて図 9 にし，30 枚と 42 枚という答えについて考えようとした。石川がこの答えの組合せに対して「72 になっちゃう。」(387 石）と反論するが，小川は自分のイメージを訂正することはなかった(389 小)。教師が問題文全体をイメージングさせた時に，合計枚数 60 枚にとらわれて自分の考えを撤回した場合とは大きく異なっている。そればかりか「差が 12 になればいいんだけどね。」(445 小）と，｢12 枚多い｣ことを差が 12 として捉えている。この時の小川の理解は，30 枚に 12 枚増えた数として 42枚を捉えていた時と比べ(308 小)，その考えに加えて 42 枚と 30 枚の差で捉えているところに違いがある（445 小)。そのために,出てきた答えに対して差が 12 枚になるかどうかで確認をする方針を立てるまでに問題の把握が進んだ。

結局，問題文全体のイメージング(273T･1-3)は問題に関わる２つの条件を同時に考慮に入れる必要があるため，素朴なイメージを膨らませるには至らなかった。それに対して「12 枚多く」なる部分のイメージングを意図した支援 2-1 の 382T（支援Ｄ）は，差が 12 枚あるとの素朴なイメージを小川にもたせ，導かれた数値のチェック方法まで確立させることができた。

６.２ 支援 2-2 の効果 (支援Ｅ)

教師は，60 枚の色紙を二人で分ける部分の絵（図 10）をかかせた後に，図 10 と図 9 を関連付けようとした。しかし，図 9 でイメージされている「12 枚多い」状態は，実際には 30 枚と 42 枚しか表現されておらず，12 枚そのものが示されているわけではなかった。そこで図 10 と，図 9 でイメージングした「12 枚多い」状態を関連付けるために，12 枚が図 10 の中のどこにあるのかを問う支援（507T･2-2）を行った。

この支援で，小川は，図 10 のあき子の分の四角形(右側)に 12 枚加えるような図をかき，きよしの分の四角形（左側）には手を加えず，｢18｣枚とのメモを横線で消した。そうしてできた図 11 は，全体の枚数が 60 枚であることを前提にしていただけに不整合を起こすこととなった。ここでの不整合は，前提条件として 60 枚を考えて２等分していることと（図 10)，前提条件として 60 枚を考えず，あき子にだけ 12 枚増やしていることである(図 9)。

小川はこの不整合を解消しようと，石川の「余ったやつ」(517 石）に影響される形で，あき子ときよしに配った色紙以外にあまりを作り出し,さらに合計枚数の 60 枚を維持するために色紙をもとに戻すような発話をする（531 小)。しかし，すぐにその考えを否定することから（533 小)，色紙を 12 枚移動させるだけではあまりの色紙を作り出すことがで

きず不整合の解消に困難を感じていることが読み取れる。

その後，小川は全体の枚数 60 枚を 20 枚ずつ３等分して 20 枚のあまりを作り出すことを思いつく。こうした３等分の発想を小川がする要因としては，図 11 において,きよしとあき子に色紙 30 枚の共通部分があり,さらに,それには含まれない 12 枚の色紙が表現されたことが,３つの集合を意識することにつながり影響したと考えられる。

その後,図 10 の 60 枚を２等分して 30 枚ずつあき子ときよしに渡す考えに関しては，60 枚から 20 枚引いた残りの 40 枚を２等分して 20 枚ずつ二人に渡すことで整合を図ろうとした。そして図 9 に関しては，あまりの 20 枚から後であき子に渡す 12 枚を捻出することで整合を図ろうとした。その結果，残りの 8 枚の色紙の配り方のみの考察で問題把握を進めていくことが可能となった。

結局，支援 2-2 の 507T（支援Ｅ）によって小川は不整合に気付き,あまりの 20 枚の色紙を作り出すことで問題把握を進めたことが分かる。

6.3 支援 2-3 の効果 (支援F)

小川は，あまりの 20 枚の色紙の内 12 枚をあき子に渡し，残りの８枚の配り方のみで問題把握を進めている。そして最終的に（4，4）の組み合わせに至り，正答を導き出した。しかし教師が立式を促しても（816T･1-5)，小川・石川はすぐには式を立てることができなかった。したがって，この段階では小川と石川は問題の構造を十分には理解していないことが分かる。

その後，具体物による操作を行い，色紙を 24 枚の集合２つと 12 枚の集合１つに分けることができた。しかし，それでも立式には至らなかった。ただし，具体物による操作で 24 枚･24 枚･12 枚の３つの集合に分けた経験は,その後にかいた図 15 の表現に活かされることになった。

図 15 は，あまりの 20 枚を試行錯誤的に分けた結果を表す図 12 とは異なり,きよしとあき子の共通部分である 24 枚が見えやすい図として表現されている。そうした図の特徴から，小川は「あまりが 12 枚になるように分ける」(1083 小）ことを把握することになった。これは,あまりを 20 枚にしてから配り方の組合せを考えていたところを,図 15 を見直すことによって,はじめからあまりを 12 枚に決めて考えるように変化したと捉えることができる。ただし，小川が「あまりが 12 枚になるように分ける」（1083 小）と述べていることから，この段階では，きよしとあき子に同じ枚数を分けていって最終的にあまりが 12 枚になるとの捉えをしている。従って，12 枚のあまりを先に全体から引いておいて，残りの 48 枚を２等分する考えには至っていない。

ここで教師は，支援 2-3「24 っていうのはどこから出たんですか？」(1101T･2-3）をした。廣井（2001b）の事例では，教師が計算結果を図に書き込むように働きかけているが，小川の場合は，先に図に数値が表現されていたために，書かれている数値そのものを問いかける形に支援を変形してある。なお厳密には，きよしの「24」枚は試行錯誤の後の計算により求められているが(図 12 の「20」と「4」の和)，あき子の「24」枚は具体物の色紙の操作によって導き出されている（図 14)。

そこで小川は，図 15 の中に現れる「24」の意味を捉え直そうとして，既に行った活動，つまり，あまりの 20 枚の内 12 枚をあき子に渡し，残りの８枚の組合せを試行錯誤的に探求する活動を振り返ってみた。そして，「24」の意味を説明できるような活動が見当たらないことに気付いた。そのことは,「42」や「18」という数値がどのように導かれたのかを反省的に振り返る言葉からもうかがえる（1108，1110 小)。その後，小川は「24」の意味付けをする方向で問題把握を進めることになったと考えられる。さらに，図 15 に対する小川の

「あまりが 12 枚になるように半分にする。」（1150 小）との意味付けは，「これが，あまりになるような半分ってのは，どういうこと？」（1155T）の支援によって，最初に 12 枚引くことであまりの分として 12 枚確保し，さらに残った色紙を２等分して「24」を求めることへ変化することが可能となった(1158, 1160 小)。

結局，支援 2-3 の 1101T（支援Ｆ）は，既に行った活動の中に意味を説明できるものがないことを小川に自覚させた。そして「24」の意味を, 図 15 に対する意味付けの変更によって得ようとすることになったと考える。

7. 教師の支援の効果

７.１ 支援2を中心とした支援の効果

事例１・２の結果から, 教師の支援によって, 子どもの図による問題把握の進展が見られることが明らかとなった。実際に行った支援を整理すると，以下のようになる。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{支援 2-1：支援Ａ，支援Ｄ}\\\text{支援 2-2：支援Ｂ，支援Ｃ，支援Ｅ}\\\text{支援 2-3：支援Ｆ}\end{array}\right.$$

この中の支援Ｄは，図 8 に「12 枚多くなる」条件を加えさせるより，むしろ「12 枚多くなる」条件のみをイメージングして図にかくことを意図していた。そこで，支援 2-1 を“１つの条件のイメージング”と捉え直すことにする。そうすれば，支援 2-1 が支援 2-2 と支援 2-3 を引き出す支援としての位置付けに, 1 つの条件のみを図にかくこと自体で問題把握を進めるという，より積極的なねらいを加えることが可能となると考えるからである。

また，他の支援については実際に行った支援をもとに検証する。支援Ｂは図 4 と“全体の枚数が 60 枚のときに 12 枚の移動で解決を図ろうとした活動”を，支援Ｃは図 4 と“松木が操作した色紙”を，支援Ｅは図 10 と“図 9”を，支援Ｆは図 15 と“計算結果の「24」”を結び付けている。ここで，子どものかいた図に結びつける対象を,“既に行った活動”として捉え直すと，支援Ｂ・Ｃ・Ｅ・Ｆの全て，つまりは，支援 2-2 と支援 2-3 を統一的な支援の中に位置付けることが可能となる。従って，支援２を次のように修正する。

支援２´(修正版)

2´-1	**１つの条件のイメージング。**
2´-2	**子どものかいた図と既に行った活動の結びつけ。**

ここで，教師の支援の効果を次の２点にまとめることができる。

- **１つの条件をイメージングさせる支援によって，子どもは他の条件とは独立に素朴なイメージを図に表現し，その図から得られた新たな情報をもとに問題把握を進めることができた。**

  例えば, 教師は小川に対して「12 枚多く」なる部分のみのイメージングをさせる支援を行った（支援Ｄ）。その結果，小川は合計枚数の 60 枚にとらわれない数値を用いて図をかいた。そして，その図をもとに「12 枚多く」なることを「差が 12」としてとらえることができた。

- **子どものかいた図と既に行った活動を結びつける支援によって，子どもは図の中に生じた不整合を解消させる中で，あるいは，図に表れている数値を意味付ける中で問題把握を進めることができた。**

  例えば，教師は松木に対して，松木のかいた図と松木が具体物である色紙を使った操作活動を結びつける支援を行った（支援Ｃ）。その結果，松木は両者の不整合に気付き, 具体物である色紙の枚数を図のイメージに合うように調整することで問題把握を進めることができた。

  また別の例では，教師は小川に対して，小川のかいた図と既に行った活動を結びつける支援を行った（支援Ｆ）。その結果，小川は既に行った活動の中に図の意味をうまく説明できるものがないことに気付き，図の意味付けを変更することで問題把

握を進めることができた。

7.2 イメージングを膨らませることの可能性

事例１では，子どものイメージングをさらに膨らませる支援によって図による問題把握が進む場合があった。以下で詳しく説明する。

図１は，支援 1-3 の「図にかいてみたらどうだろう」に沿った支援の後に松木がかいた図である。ただし，このときの支援は，実際には問題文中にある「２人で分けます」の分ける行為を強調して，「分けている様子」をかけないかと表現を変えて行われた（88T, 99T・1-3)。ここでは，最初に松木が 12 と 2 のどちらで割るかを考える文脈，つまり問題文に出ている数値を当てはめて計算しようとする文脈に，色紙を「分けている様子」という松木にとって過去に経験しているであろう既知の文脈を入れている。そのことで教師は，菊池（1996）が述べた現実的な解法への移行を意図している。

松木は，図１をかいている途中に「分けてるから」（109 松）と発話した。この発話は，教師の「分けている様子」の文脈の指示に対して，松木が自己の経験を振り返り，分ける文脈で考えていた事実を示す。さらに図１には数値は書き込まれず，色紙があき子の分ときよしの分に分かれていることが表現されている。そして，最初の解答である 60÷12＝5 が図の中には全く反映されず，その後の解決にもとり上げられることはなかった。こうした事実から，既知の文脈に沿ったイメージングをさせる支援によって，松木は最初の文脈にとらわれずに図をもとにして分ける文脈で考えるようになったと捉えることができる。

分ける文脈で考えるようになった松木は，イメージングを膨らませる支援「この渡す前に何かしてないかな。」（158T）に対して，「分けるから」（162 松）「分けてるところもかくかな。」（164 松）と述べている。これらの発話から，この時点でも「分ける様子」の文脈で考えていたことが分かる。その後，図２をかき上げてからは，「こっから取って」（186 松）「あげる分に入れてる。」（190 松）と述べ，図２の最初の色紙が置いてある場所（①）から取って，あげる分に入れると説明している。このことから，最初の色紙の山からどのように配って二つの山に分けるのかで考えるようになったことが分かる。

その後のイメージングを膨らませる支援「こっから（①）取って，最初どうするの？」（193T）によって，松木はさらに分ける文脈で問題を把握しようとした。つまり 198 松と 206 松から，図２の四角形①が最初に色紙が置いてあるところで，そこから③と④に色紙を交互に置いていくということが表現されていることが分かる。

さらに 206 松で，色紙を配ると最初の①の部分の色紙がなくなってしまうことを「終わりまでやって」と理解した松木は，あき子に渡す 12 枚が残っていないことから，「12 枚多い」ことを③から 12 枚を取って④へ移動することとして図に表現した（216 松)。

一連の分ける文脈に沿った図による問題把握において，松木は問題文にはない新たな情報として，

- **分ける前には最初の色紙の山がある。(186 松)**
- **色紙を取って入れることで，全体の色紙を分けることができる。(186, 190 松)**
- **色紙を交互に置いていくことで，あき子ときよしに同じ枚数ずつ分けることができる。(198, 206 松)**
- **終わりまで分けることで，全ての色紙を配ることができる。(206 松)**
- **四角形③から四角形④へ色紙を移動することで，あき子の方を 12 枚増やすことができる。(216 松)**

を得ることができた。

結局，イメージングを膨らませる支援(158T, 193T)により，松木は図２において，色紙を配る行為の再現が可能となった。そして，図 2

上での再現を通して，問題文にはない新たな情報を得ることになったと考えられる。

8．おわりに

事例１と事例２のように，子どもが１人では図による問題把握を進められない場合について，教師１つの条件をイメージングさせる支援（支援 2´-1）と，子どものかいた図と既に行った活動を結びつける支援（支援 2´-2）が有効に働くことが明らかとなった。また，子どもの最初のイメージングを膨らませる支援によって，図による問題把握を進める可能性のあることが示された。

今後は，支援２´をより有効に機能させるために，支援２´とイメージングを膨らませる支援との関わりについて考えていく必要がある。

註および引用・参考文献

1) 2) 廣井(2001b)で“関係”としていた部分を“考え”に改めた。図の不整合というより，むしろ，子どもの考えに不整合が生じたと捉えられるからである。

3) 支援１と支援２には下線を付け，その後ろの括弧内は，(プロトコル番号･支援番号)として示した。

4) [○○]は，子どもや教師の動作を示した。

Diezmann, C. M., & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In Cuoco, A. A. & Curcio, F. R. (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp.77-89). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gibson, D. (1998). Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Ed.), *Research in collegiate mathematics education, vol. 3* (pp. 284-307). American Mathematical Society.

Lopez-Real, F. & Veloo, P. K. (1993). Children's use of diagrams as a problem-solving strategy. *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 169-176). Tsukuba, Japan.

Moses, B. (1982). Visualization: A different approach to problem solving. *School Science and Mathematics, 82*, 141-147.

Polya, G. (1954). いかにして問題をとくか(柿内賢信訳). 丸善.

Van Essen, G. & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research, 83*(6), 301-312.

市川伸一. (1988). 「納得の道具」としての同型的図式表現. 数理科学, *297*, 34-39.

菊地光司. (1996). 算数･数学の問題解決における図的表現の働きに関する研究. 上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).

古藤怜. (1985). 問題解決におけるストラテジーの指導. 明治図書.

布川和彦. (1993). 数学的問題解決における図の役割と解決者による意味づけ. 三輪辰郎先生退官記念論文編集委員会(編), 数学教育学の進歩(pp.303-320). 東洋館.

布川和彦. (1995). 「考え方」としてのストラテジーの指導. 古藤怜先生古希記念論文集編集委員会(編), 学校数学の改善:Do Math の指導と学習(pp.99-113). 東洋館.

花形恵美子. (1990). 文章題の解決過程における絵の役割. 日本数学教育学会誌, *72*(12), 28-36.

廣井弘敏. (2001a). 算数の問題解決における図による問題把握の研究：子どもが図をかく過程への着目. 上越数学教育研究, *16*, 167-176.

廣井弘敏. (2001b). 算数の問題解決における図による問題把握：小学５年生のインタビュー調査より. 数学教育論文発表会論文集, *34*, 457-462.

廣井弘敏. (2002). 算数の問題解決における図による問題把握. 上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).

藤田尚徳. (1999). 数学的問題解決における生徒の情報の生成を促す指導に関する基礎的研究. 上越数学教育研究, *14*, 85-98.

山本正明. (1995). 問題解決における数直線や線分図等の図の効果. 日本数学教育学会誌, *77*(8), 2-9.