

文字式の「よさ」の指導に関する基礎的研究

- 中学2・3年生を対象にした調査を手がかりにして -

大塚 高央
上越教育大学大学院修士課程2年

1 はじめに

一般的に、生徒たちは文字式を苦手としており、文字式を用いることに消極的である。文字式を積極的に用いるようになるためには、その意義を理解していることが必要であろう。逆に、文字式の意義を理解するためには、ある程度文字式について基礎的な事柄が身についていなければならない。文字式に関する基礎的能力と「よさ」の認識とのバランスを如何に図るかが、現在の数学教育における文字式指導を改善するための一つの方向であると考えられる。

本研究では、数学学習において文字式を用いる意義について考察し、これを基に文字式の「よさ」の理解に関する調査問題を開発し、これを中学2・3年生を対象に実施した。本稿の目的は、文字式を用いる基礎的能力、文字式の「よさ」の認識の程度、及び両者の関係を調査し、文字式を意義あるものとして主体的に学習することを促す指導法への示唆を得ることである。

2. 研究の背景

2.1 文字式利用の意義

数学学習において、文字式の果たしている役割や意義は大きい。次の～は、文字式に表現する価値について、三輪(1991)が述べていることを筆者が箇条書きにしたものである。

数学的な事象を簡潔で明確に表現できる。(形)
他人に伝達したり、自分で思考を進めたりするための手段である。(構)
一般的な表現が可能である。(般)
数量がどんな数に依存しているかわかる。(構)
共通の仕組みや構造がわかる。(構)
式の拡張や統合が可能である。(般)
形式的に操作(変形)できる。(形)

学習指導要領の解説では、文字式を用いて一般的に説明することが文字式の意義として強調されている。一方、これを文字式のもつ意義(よさ)の「一般性(般)」と呼ぶならば、そして、上述の～を参照すれば、この他に少なくとも文字式を用いると簡単に解けるや速く解けるといった「形式性(形)」、なぜそうなるかがわかるといったわかりやすさに関する「構造的性(構)」があることがわかる。そして、これらの「よさ」を理解することは、文字式を用いて問題を解決したり、文字式を用いて事象を考察することができる上でも重要であると考えられる。[上述の(般),(形),(構)は、筆者がこの視点で分類したものである。]

これらの文字式の意義がわかるためには、文字式を利用することが必要であろう。三輪(1996)の提案する文字式利用の図式に基づけば、文字式を利用するという事象を文字式で表す過程・変形する過程・読む過程での3つの力(表現・計算・読式)が必要である。

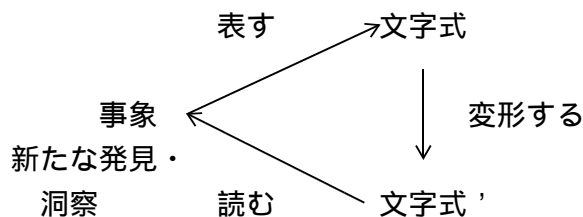


図1：文字式利用の図式（三輪,1996,p2）

平成10年度の学習指導要領においては、数学科の目標の中に、「数学的な見方や考え方のよさを知り、それらを活用する態度を育てる」とある。「よさ」は情意的な側面を大切にし、学ぶ意欲を高めるためことから平成元年度に引き続き強調されており、生徒が主体的な学習を促すためにも重要な意味を持つと考えられる。

2.2 中学生の文字式の意義理解の先行研究

現状の中学生の文字式の理解の実態について国宗ら(1997)は、文字式による論証のもつ「一般性」の理解は中学2年生で29%、中学3年生で36%であり、文字式を使って証明が正しくかけたとしても、帰納的な説明の特徴については必ずしも理解していないことを指摘している。これは、文字式を用いる意義(よさ)として、「一般性」を中心とした指導には限界があることを示唆している。

また、生徒の立場からの意義理解の研究には、梅川(2002)があり、「有効性」と「限界」は、他と比較することにより、より明確に意識されることが示唆される。

一方、国宗ら(1997)の調査は、その調査方法からして生徒が文字式を用いる「よさ」をどのようなものとしてとらえているかを明らかにしようとしたものではない。本研究の目的のためには、同氏らの研究のように生徒たちが文字式の論証のもつ「一般性」を理解しているかいないかを調べるといよりもむしろ、文字式を用いる「よさ」を生徒たちがどのように理解しているかを捉えることが必要である。

3. 研究の方法

3.1 調査方法,調査対象及び調査時期

本研究では、文字式を用いる基礎的能力、文字式の「よさ」の認識の程度、及び両者の関係を調査するために、質問紙調査とインタビュー調査を実施した。質問紙調査の対象は、新潟県公立中学校1校で、2年生3クラス88名と3年生クラス98名であり、調査時期は、2003年7月1日から2日間であった。さらに、質問紙調査を行った生徒の中から抽出した6名に対して、2003年10月27日から11月12日にかけて、インタビュー調査を実施した。

3.2 質問紙調査

3.2.1 調査問題

本研究では、中学生が文字式を用いて問題を解決したり、文字式で事象を考察したりするためには、文字式を用いる意義(よさ)を「一般性」に加えて「形式性」「構造的性」を含めて考える必要があるという立場をとる。これらの文字式の「よさ」を生徒がどのように理解しているかを調べるための調査問題を作成した。

調査問題 A-1 (方程式の応用)

兄は妹よりも5歳年上です。父の年齢は兄の年齢の3倍であり、3人の年齢を合わせると80歳です。それぞれの年齢は何歳でしょうか。

調査問題 A-2 (論証)

下のカレンダーをもとにして、次の問いに答えなさい。

下のわくで囲んだ2, 9, 16は、 $2+9+16=27$ 、 $9 \times 3=27$ のように、たてに3つ続いている数の和は、まん中の数の3倍になっています。

このことがどこでもいえることを説明しなさい。

調査問題 B：基礎力調査

文字式の基礎力調査は、三輪(1996)の図式に基づいて、調査問題Aの2問を解くために必要と思われるものを主として選んだ。(後の資料参照)


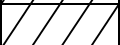
3.2.2 質問紙調査の実施手順

調査問題 A は、まず、自ら文字式を用いて解決できるかどうかをみる。その後に、ヒントカードで A 君～C 君の 3 人の生徒の考え方の始めの部分を紹介して、どれか 1 人を選択させて再び解かせた。ヒントカードを用いた理由は、自ら文字を用いることができなくとも、文字式を用いた解法とその他の解法を比較することによって、文字式の「よさ」を認識することができると思ったからである。ヒントは、國本(1995)を参考にして A 君：経験的・帰納的な方法、B 君：前形式的な方法(図を用いた操作)、C 君：文字式による方法の 3 種類を設けた。どれも同じ程度のヒントになるよう工夫し、そのプリントを配布するとともに教師が説明した。

調査問題 A-1 のヒントカード

(A 君の考え) 妹の年齢を 8 歳とすると
兄は 13 歳となり、父は、...

(B 君の考え)

妹の年齢を		で表すと
兄の年齢は		5

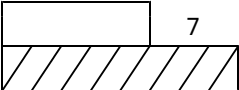
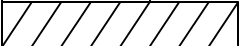
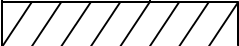
となり、
父の年齢は、...

(C 君の考え) 妹の年齢を x 歳とすると
兄は $x + 5$ 歳となり、父は、...

調査問題 A-2 のヒントカード

(A 君の考え) 他のところでも具体的に調べてみると、...

(B 君の考え) 下の図のように斜線の部分をまん中の数と考えると

一番上の数		7
まん中の数		
一番下の数		

(C 君の考え) まん中の数を x と表すと
一番上の数は $x - 7$ 、一番下の数は、...

解決方法を選択する際に、その選択理由と選択しない理由を書かせ、文字式のどのような「よさ」を指摘できるかをみる。論証の問

題は、自力解決の後、3 人の説明をすべて見せた後、再びどれが一番よいか選択させ、その選択理由を書かせた。それは、説明はすべてを見ないとどれがよい方法か判断できないと考えたからである。

3.2.3 分析の視点

岩崎(1994)の見解に基づく「有効性と限界」を観点として、生徒たちの文字式のよさの認識を生徒が文字式を用いることを選択した理由や選択しない理由に基づいて、いくつかの段階を設定し、生徒たちを各段階に分類し、考察する。また、調査問題 A を行った後に、調査問題 B を行い、問題解決力と文字式の基礎的な力との関連についても考察する。

3.3 インタビュー調査

質問紙調査において、文字式を用いて解決できると考えられる生徒が、なぜ文字式を用いようとしなかったのか、その背景となる考え方や心情を探ることを目的とする。対象生徒は、質問紙調査を行った生徒の中から、次のようにして 6 名を抽出した。

ア、文字式の計算力があり、ヒントがあれば文字式を用いることができるであろうと考えられる生徒。

イ、「カレンダーの問題」において、最後まで帰納的な説明を支持し続けた生徒。

インタビューは、インタビュアー(筆者)と生徒が 1 対 1 の面接方式で、1 人につき 40 分程度で行った。生徒に質問紙調査と同じ問題を解かせ、その解き方について説明させた。その後、3 通りの解き方を一通り考えさせ、どの考え方がよいと思うか尋ねた。インタビューの様子は全て ATR と VTR で記録し、これらのプロトコルを作成し、そのデータを解釈考察する。

4. 質問紙調査の結果と分析・考察

4.1 文章題の自力解決の解答

調査問題 A-1 の解答率は、表 1 の通りである。

表1 調査問題 A-1 (方程式の文章題)

	2年生(%)	3年生(%)
文字式	25名(28.4)	33名(33.6)
×	28名(31.8)	16名(16.3)
表や	15名(17.1)	38名(38.8)
試行錯誤 ×	14名(15.9)	11名(11.2)
無回答	7名(8.0)	9名(9.2)

表1の項目中の文字式、表や試行錯誤はそれぞれ用いた方法を表し、○は正解、×は不正解を表す。例えば、文字式 ○とは、文字を用いて正解を求めたことである。表や試行錯誤 ○とは、表や試行錯誤をして正解にたどり着いたことを、×は不正解であったり、行き詰まったことをさす。以降も同様に用いる。

2年生で調査問題 A-1 (方程式) を、自ら文字式を用いて解こうとした生徒は53名(60.2%)いた。しかし、実際に正解を求めることができた生徒は25名(28.4%)であり、用いようとした生徒の47.2%であった。基礎問題との関連でみると、基礎問題の正答率が8割以上の生徒は36名(40.1%)いた。そのうち文字式を用いて方程式を立てて解けた生徒は、23名(26.1%)であった。文字式に関する基礎力がある生徒のうち、63.9%が方程式を立てて解くことができたことになる。また、基礎問題の正答率が8割に満たない生徒で、方程式を立てて解けた生徒は2名(2.3%)であった。

3年生で調査問題 A-1 (方程式) を、自ら文字式を用いて解こうとした生徒は49名(50.0%)いた。しかし、実際に正解を求めることができた生徒は33名(33.6%)であり、文字式を用いようとした生徒の67.3%であった。基礎問題との関連でみると、基礎問題の正答率が8割以上の生徒は49名(50.0%)いた。そのうち文字式を用いて方程式を立てて解けた生徒は、30名(30.6%)であった。文字式に関する基礎力がある生徒のうち、61.2%が方程式を立てて解くことができたことになる。また、基礎問題の正答率が8割に満たない生徒で、

方程式を立てて解けた生徒は3名(3.1%)であった。

2, 3年生を比較すると、一度でも文字式を用いようとした生徒は、2年生の53名(60.2%)に対して3年生は49名(50.0%)であり、2年生の方が多い。しかし、正答を求めた生徒の割合は2年生の47.2%に対して3年生は67.3%と上がっている。また、文字式を用いた正答率も28.4%から33.6%に、他の方法も含めた全体の正答率も、45.5%から72.4%に上がり、学年進行とともに問題解決力が向上している。2年生が最初に文字式を用いようとした生徒が多かったのは、調査時期が連立方程式の学習をした直後であったことが影響していると考えられ、無理に文字式を用いて失敗しているのに対して、3年生は自分が解決できる適当な方法を選択していることが窺える。

また、基礎問題の正答率が8割未満で、方程式で解けた生徒がほとんどいないことは両方の学年に共通している。このことから、文字式を用いて方程式で問題を解くためには、文字式に関する基礎力は必要であることがわかる。一方、方程式を立てて解くことができたのは、文字式に関する基礎力があると考えられる生徒のうち、6割程度であることから基礎力があるからといって、方程式で解けるとは限らないといえる。

さらに、2年生において基礎問題の個々の要素と方程式の文章題解決の関連を示したものが、表2である。

表2 方程式に関する基礎問題の正答率%

	文字式	文字式 ×	その他
式計算	95.0	75.0(78.9)	57.1(60.1)
方程式	97.0	79.5(81.9)	59.3(61.1)
式の値	100.0	91.0(91.0)	74.3(74.3)
表現	78.0	41.1(52.7)	32.9(42.8)
読式	94.0	60.7(64.6)	35.7(38.0)

()内は文字式 に対しての割合%

文字式を用いて解けた生徒と用いようとしたけれども解けなかった生徒を比較すると、式の計算や方程式、式の値は解けた生徒の80%程度であるが、表現は52.7%でしかない。特に正答率が低い問題は、「ある数とそれよりも5大きい数との和を表す式を書きなさい。」である。文字を用いようとしたが解けなかった生徒の正答率が29%、文字式を用いなかった生徒の正答率が6%と極端に低い。

3年生についても同様の傾向があり、特に表現力に大きな差が見られることから、文章題を方程式で解くためには、表現力が重要であることがわかる。

調査問題 A-2 の解答率は、表3の通りである。

表3 調査問題 A-2 (論証)

	2年生(%)	3年生(%)
文字式	20名(22.7)	25名(25.5)
	10名(11.4)	8名(8.2)
×	11名(12.5)	6名(6.1)
帰納的説明	8名(9.1)	18名(18.4)
その他	16名(19.3)	14名(14.3)
無回答	23名(26.1)	27名(27.6)

文字式 とは、文字を用いて正しく説明したことをさす。文字式 とは、文字式の表し方は正しいが、説明が不十分なことをさす。例えば、 $n + (n + 7) + (n + 14) = 3n + 21$ までの場合などである。文字式×とは、文字の表し方が不適切($2x+9x+16x$ など)な場合である。帰納的説明とは、具体的にいくつかの場合を調べている場合である。その他は、言葉による説明や意味不明の場合を含んでいる。以降も同様に用いる。

2年生で、調査問題 A-2 (論証) を自ら文字式を用いて説明しようとした生徒は、41名(46.6%)いた。しかし、実際に正しく説明できた生徒は20名(22.7%)であり、文字式を用いようとした生徒の48.8%であった。基礎問

題との関連でみると、基礎問題の正答率が8割以上の生徒は35名(39.8%)いた。そのうち文字式を用いて正しく説明できた生徒は、18名(20.5%)であった。文字式に関する基礎力がある生徒のうち、51.4%が正しく説明できたことになる。また、基礎問題の正答率が8割に満たない生徒で、文字を使って正しく説明できた生徒は、2名(2.3%)であった。

3年生で、調査問題 A-2 (論証) を自ら文字式を用いて説明しようとした生徒は、39名(39.8%)いた。しかし、実際に正しく説明できた生徒は25名(25.6%)であり、文字式を用いようとした生徒の64.1%であった。基礎問題との関連でみると、基礎問題の正答率が8割以上の生徒は41名(41.8%)いた。そのうち文字式を用いて正しく説明できた生徒は、23名(23.5%)であった。文字式に関する基礎力がある生徒のうち、56.1%が正しく説明できたことになる。また、基礎問題の正答率が8割に満たない生徒で、文字を使って正しく説明できた生徒は、2名(2.0%)であった。

2, 3年生を比較すると、文字式を一度でも用いようとした生徒は、2年生の41名(46.6%)に対して、3年生は39名(39.8%)であり、2年生の方が多い。しかし、そのうち正しく説明した生徒は、2年生が48.8%であるのに対して、3年生は64.1%と上がっている。

また、基礎問題の正答率が8割に満たない生徒で、正しく説明できた生徒はほとんどいなかったことは、両方の学年に共通している。このことから、文字式を用いて正しく説明するためには、文字式に関する基礎力は必要であることがわかる。一方、文字式に関する基礎力がある生徒のうち、正しく説明できたのは5割程度であることから、基礎力があるからといって、文字式を用いて正しく説明できるとは限らないといえる。

さらに、2年生において基礎問題の個々の要素と論証問題解決の関連を示したものが、表4である。

表4 論証に関する基礎問題の正答率%

	文字式	文字式×	その他
式計算	96.3	81.0(84.1)	60.6(62.9)
式の値	100.0	92.9(92.9)	78.7(78.7)
表現	82.5	64.3(77.9)	47.9(58.1)
読式	77.5	50.0(64.5)	14.9(19.2)

()内は文字式 に対する割合%

文字式を用いて正しく説明できた生徒と用いようとしたけれども正しく説明できなかった生徒を比較すると、式の計算や式の値、表現は説明できた生徒の80%程度であるが、読式は64.5%でしかない。特に、正答率が低い問題は、「連続する3つの整数を n 、 $n+1$ 、 $n+2$ とすると、 $n+1$ は何を表していますか。」である。文字を用いようとしたが正しく説明できなかった生徒の正答率が43%、文字式を用いなかった生徒の正答率が15%と極端に低い。

3年生についても、同様の傾向があり、特に、読式力に大きな差が見られることから、文字式を用いて正しく説明するためには、読式力が重要であるといえる。

4.2 文字式の「よさ」の指摘

調査問題A-1、A-2においてどのような「よさ」を指摘できたかどうかをまとめると、表5、6のようになる。

表5 文字式の「よさ」の指摘 2年

	一般性	形式性	構造的性	人数	%
				11	12.5
			なし	3	3.4
		なし		0	0.0
		なし	なし	0	0.0
	なし			14	15.9
	なし		なし	18	20.5
	なし	なし		6	6.8
	なし	なし	なし	20	22.7
	文字を全く使用せず			13	14.8

: 指摘あり

表6 文字式の「よさ」の指摘 3年

	一般性	形式性	構造的性	人数	%
				6	6.1
			なし	6	6.1
		なし		2	2.0
		なし	なし	3	3.1
	なし			11	11.2
	なし		なし	19	19.4
	なし	なし		7	7.1
	なし	なし	なし	17	17.3
	文字を全く使用せず			25	25.5

「一般性」の指摘は2年生の14名(15.9%)に対して3年生は17名(17.3%)であり、3年生の方が多い。しかし、「形式性」の指摘は2年生の46名(52.3%)に対して3年生は42名(42.9%)、「構造的性」の指摘は2年生の31名(35.2%)に対して3年生は26名(26.5%)であり、2年生の方が多い。また、2、3年生ともに「一般性」の指摘は2割以下と少なく、「形式性」の指摘が一番多いことは共通している。文字式の論証のもつ「一般性」を指摘できた31名のうち、28名は、「形式性」か「構造的性」のどちらかを指摘できた。文字式のもつ「一般性」を指摘できる生徒は、他のよさも認識している可能性が高いといえる。この結果から文字式の「よさ」には、生徒が指摘しやすいものと指摘しにくいものがあることがわかる。

4.3 文字式の「よさ」の認識の段階設定

文字式の「一般性」を指摘している生徒は、ほとんどの場合他の「よさ」も指摘できていることから、文字式の「よさ」の認識は、次の4つの段階に区分することができる。

- 段階0 文字式を全く用いようとせず、文字式の「よさ」も指摘できない。
- 段階1 文字式を用いることがあるが、文字式の「よさ」は指摘できない。

段階 文字式を用いることがあり、文字式の論証のもつ「一般性」は指摘できないが、他の「よさ」は指摘できる。

段階 文字式を用いることがあり、文字式の論証のもつ「一般性」を指摘できる。

4.4 文字式の「よさ」の認識の段階の分布

上記の段階設定基準に基づいて、生徒を各段階に分類すると、表 7、8 のようになる。但し、文字 には、ヒント後に文字式を用いて正解した生徒も含んでいる。

表 7 文字式の「よさ」の認識の分布 2 年

段 階	0			
人 数	1 3	2 0	3 8	1 4
%	15.9	21.6	44.3	18.2
論 証	文字	0	4	1 5
	正解率	(0.0)	(20.0)	(39.5)
	文字 ×	0	8	2 0
	その他	1 3	8	3
方 程 式	文字	0	4	1 7
	正解率	(0.0)	(20.0)	(44.7)
	文字 ×	0	1 1	2 0
	その他	1 3	5	1

表 8 文字式の「よさ」の認識の分布 3 年

段 階	0			
人 数	2 5	1 7	3 7	1 7
%	25.5	17.3	37.8	17.3
論 証	文字	0	1	1 7
	正解率	(0.0)	(5.9)	(45.9)
	文字 ×	0	1 0	1 6
	その他	2 5	6	4
方 程 式	文字	0	2	2 4
	正解率	(0.0)	(11.8)	(64.9)
	文字 ×	0	1 1	6
	その他	2 5	4	7

文字式の「よさ」の認識が段階 0 の生徒は、2 年生で14名(18.2%)、3 年生で17名(17.3

%)おり、そのうち文字式を用いて正しく説明できた生徒は12名(85.7%)と13名(76.5%)、方程式を用いて解くことができた生徒は11名(78.6%)と14名(82.4%)いた。どちらも正答率が高い。段階 1 の生徒は、2 年生で38名(44.3%)、3 年生で37名(37.8%)いるが、そのうち15名(39.5%)と17名(45.9%)しか文字式を用いて正しく説明できていない。方程式を用いて解けた生徒は17名(44.7%)と24名(64.9%)であり、どちらも正答率は段階 2 の生徒を下まわる。段階 2 の生徒は、2 年生で20名(21.6%)、3 年生で17名(17.3%)いるが、そのうち4 名(20.0%)と1 名(5.9%)しか文字式を用いて正しく説明できない。方程式を用いて解けた生徒は4 名(20.0%)と2 名(11.8%)であり、どちらも正答率はかなり低い。ヒントがあっても文字式を全く用いようとしない段階 3 の生徒は、2 年生で13名(15.9%)と24名(24.2%)いた。

2、3 年生ともに文字式の「よさ」の認識の段階 1 の生徒が一番多いことがわかる。生徒は機械的に計算できたり、問題のしくみや構造がわかるということから文字式を用いることが多いといえる。文字式のもつ「一般性」を理解して、文字式を積極的に用いるようになることが理想である。しかし、生徒の実態から考えると、文字式の「よさ」として「一般性」だけを強調しすぎない方がよいと考えられる。文字式のもつ「形式性」や「構造的性」という「よさ」を積極的に認めながら、生徒に文字式の「よさ」を意識させて、文字式を用いることを促していくことが大切である。また、文字式の「よさ」を指摘できる生徒は、指摘できない生徒に比べて文字式を用いて問題解決する能力が高く、特に「一般性」を指摘できる生徒は、少ないけれども文字式を用いて問題解決する能力は高いといえる。いろいろな解き方の比較を通して、文字式の「よさ」を認識させるような授業を展開していくことが重要である。

次に、各段階に属する生徒の文字式の基礎力についてまとめると、表9、10のようになる。

表9 各段階の基礎力の正解率と標準偏差 2年

段階	0				
	N	1 3	2 0	3 8	1 4
計算	Mean	49.2	70.5	86.3	95.7
	S.D	28.1	28.3	17.5	6.2
表現	Mean	26.9	31.3	54.6	80.4
	S.D	11.9	20.7	30.4	25.3
読式	Mean	17.3	37.5	57.9	80.0
	S.D	22.7	30.1	30.4	21.5

表10 各段階の基礎力の正解率と標準偏差 3年

段階	0				
	N	2 5	1 7	3 7	1 7
計算	Mean	55.2	67.1	88.9	92.9
	S.D	33.5	30.1	11.6	8.9
表現	Mean	22.0	35.3	70.3	79.4
	S.D	26.8	32.2	27.2	24.6
読式	Mean	18.0	32.4	67.6	82.4
	S.D	26.9	30.6	39.6	26.8

2年生の計算力の得点について分散分析を行った結果、有意であった ($F_{(3,81)} = 12.41$, $p < .01$)。LSD法を用いた多重比較によると、段階0の平均よりも段階の平均が、段階の平均よりも段階の平均がそれぞれ有意に大きかった ($MSe = 476.7$, $p < .05$)。段階と段階は有意差はなかった。このことから、文字式の「よさ」の認識の段階が高いほど計算力も高い傾向があるが、「よさ」を指摘できる生徒についてはほとんど変わりがないといえる。

表現力の得点について分散分析を行った結果、有意であった ($F_{(3,81)} = 13.74$, $p < .01$)。LSD法を用いた多重比較によると、段階0と段階は有意差はないが、段階の平均よりも段階の平均が、段階の平均よりも段階の平均が、

平均がそれぞれ有意に大きかった ($MSe = 69.3$, $p < .05$)。このことから、文字式の「よさ」の認識がない生徒は表現力については差がないが、「よさ」の認識の段階が高いほど表現力が高いといえる。

読式力の得点について分散分析を行った結果、有意であった ($F_{(3,81)} = 13.11$, $p < .01$)。LSD法を用いた多重比較によると、段階0と段階は有意差はないが、段階の平均よりも段階の平均が、段階の平均よりも段階の平均が、それぞれ有意に大きかった ($MSe = 820.5$, $p < .05$)。このことから、文字式の「よさ」の認識がない生徒は読式力については差がないが、「よさ」の認識の段階が高いほど読式力が高いといえる。

2年生の結果から、段階0と段階の計算力だけ有意であることから、文字式を使用するかしなないかは計算力と密接な関係がある。文字式を使用し始めてそれほどたたない頃は、計算することができればとりあえず使ってみようとするが、自分は計算さえもできないと思えば初めから使おうとしないと考えられる。実際、質問紙調査で段階の生徒は文字を用いて表してみようとしているが、うまく表現できなかったりして問題解決できないことが多かった。また、段階と段階の表現力・読式力が有意であることから、文字式の「一般性」の認識に関しては、表現力や読式力と密接な関係がある。

また、各段階の生徒の数学に対する好感度のアンケート結果をまとめたものが、表11、12である。

表11 各段階の生徒の数学の好感度 2年

	好き	やや好き	やや嫌い	嫌い
段階0	2	4	3	4
段階	0	6	8	6
段階	1 4	1 4	6	4
段階	3	7	3	1

表12 各段階の生徒の数学の好感度 3年

	好き	やや好き	やや嫌い	嫌い
段階0	1	9	9	5
段階1	1	6	5	6
段階5	5	19	9	4
段階3	3	8	4	2

文字式の「よさ」を指摘できる段階 以上のグループと指摘できない段階 以下のグループに分けて、数学に対する好感度のアンケート結果をまとめてみると、表13のようになる。

表13文字式の「よさ」の指摘と数学の好感度

	好き	嫌い
「よさ」を指摘できない	29	49
「よさ」を指摘できる	73	31

文字式の「よさ」を指摘できた生徒の人数を、好き(73名)と嫌い(31名)の人数差で検定した結果、有意であった ($p=.000$, 両側検定)。また、文字式の「よさ」を指摘できない生徒の人数を、好き(29名)と嫌い(46名)の人数差で検定した結果、有意傾向があった ($p=.0639$, 両側検定)。

これらのことから文字式の「よさ」の認識が段階 以上の生徒の特徴、つまり文字式の「よさ」を指摘できる生徒は、数学に対する好感度が高く、段階 以下の生徒の特徴、つまり文字式の「よさ」を指摘ができない生徒は、好感度が低い傾向にある。

以上の統計的な分析から得られた主要な結果は、次の3点である。

文字式の「一般性」を指摘することは難しいが、「形式性」や「構造的性」は指摘しやすい。

文字式の「よさ」を指摘できない生徒は、文字式の表現力と読式力が不足している。文字式の「よさ」を指摘できる生徒は、指摘できない生徒に比べて数学に対する好感度が高い。

5. インタビュー調査の結果と分析

5.1 文字式の読式力の重要性

澤口(2年女子)は、問題1で父、兄、妹の年齢をそれぞれ x 、 y 、 z と表し、 $x + y + z = 80$ と式を立てた後、 $3x + (y + 5) + z = 80$ と立て直したが、解けなくて試行錯誤を行った。ヒントカードをもとにして、次のように解いた。

$$\begin{aligned} x + x + 5 + (x + 5) \times 3 &= 80 \\ x + x + 5 + 3x + 15 &= 80 \\ 5x + 20 &= 80 - 20 \\ 5x &= 60 \\ x &= 60 \div 5 \end{aligned}$$

図2 . ヒント後の澤口の解き方(問題1)

しかし、筆者がどの解き方がいいか尋ねたところ、澤口は「この($x = 12$)出てきた12が何なのかがわからなくなってきちゃうから」や「まとめて計算しているから何を出したいのかわからない。全部 x でまとめてあるから」と述べ、数的試行を選択した。これらの発話は、せっかく求めた x が何を意味しているのかわからないこと、つまり、自分は文字式を用いて解いてもそれを読んで解釈して答えとして使えないと考えていることを意味している。

また、田口(3年男子)は、問題2でヒントカードをもとにして、 $(x - 7) + x + (x + 7) = 3x$ と正しく計算した。 $3x$ を3の倍数と解釈できれば、これで終了するところであるが、田口は「おかしい」と述べて、二重線で消してしまった。 $3x$ が3の倍数を表すものと考えられなかったことが、一つの原因として推測される。これは $3x$ を正しく解釈することが難しいことを意味している。

澤口と田口は文字式を読むことに困難があり、文字式を用いようとしないうちに結びついていて、文字式を用いて問題解決

するために、文字式を読む力を高めることの重要性を示していると考えられる。

5.2 文字式の「よさ」の認識

笠野(3年女子)は、問題1を自力で次のように解いた。

兄	兄	兄	兄	
11	13	16	17	
姉	姉	姉	姉	
16	25	20	29	
6	10	11	12	A, 兄 17才
父	父	父	父	妹 12才
49	45	48	51	父 51才
+	33	45	48	
	49	70	75	80

図3．笠野の解き方(問題1)

笠野は、質問紙調査で文字式を用いた方法があることが示されたが、文字式を用いようとしなかった。しかし、今回のインタビュー調査ではヒントを参考にして、つまづきながら自分で実際に解き、他の方法と十分に比較したことで、文字式の「形式性」という「よさ」を指摘できた。

また、渡辺(3年女子)は、問題1では方程式を立てて正解を求め、速く効率的にできることを理由として文字式のもつ「形式性」を指摘できた。しかし、問題2ではカレンダーの構造に着目し、「 $7+14+21$ をたすと、42になり、14を3倍しても42となります。これは、どれも7を足している数の表なので、どのところでもいえます。」と書いた。ここには、文字こそ用いられてはいないが、藤井(1998)が述べている擬変数とみて一般的に示そうとする意志がみてとれる。筆者がヒントをもとに文字式を用いさせようすると、渡辺は、「どうすればいいんだ。」「これも何か式にするのかな、うわー。」と述べた。渡辺は首を傾げながら、 $x + x - 7 + x + 7 =$ と書いたが正しく説明できず、「何か数を当てはめなくちゃ」と述べ、右辺に42を書き入れた。

$$\begin{array}{l}
 x + 2 - 7 + 2 + 7 = 42 \\
 2x = 0 \quad 2x = -7 + 7 \\
 \cancel{2x = 0} \quad 2x = 0
 \end{array}$$

図4．渡辺の文字式を用いた説明(問題2)

渡辺にとって、文字式は答えを出すという認識があまりに強く、説明するための道具として文字式をみることができず、不安な様子である。式を答えを出すものという意味から説明するものへとその認識を変えることは容易ではないといえる。

これらの例が示すように、生徒は無理に文字式を用いようとして失敗する。4.1節で述べた2年生と3年生の文字式の利用に関する調査結果もこのことを示唆しているが、インタビューの結果はこの事実を裏付けた。

また、生徒は自分と文字式との関わりについてよく知っていて、今の自分に適切な方法を選択している。例えば、澤口は自分はまだ文字式に慣れていなく、文字式は難しくする方向だと考え、具体的な数を用いて考えることを選択している。また、松本は自分はまだ文字式の計算に不安があるので、図を用いて考えることを選択している。このように生徒は自分のことをよく知っていて、文字式に対して自信がもてていないことや他の方法の方がわかりやすいという理由から主体的に判断して文字式を用いないことを選択している。

6. 文字式指導への示唆

本研究における質問紙調査及びインタビュー調査から導かれる文字式指導への示唆は、主に次の3点である。

- (1) 文字式を用いる「よさ」として「一般性」だけでなく、生徒の認めやすい「形式性」「構造化」を積極的に認めること

本調査において、中学2年生の「一般性」の指摘は、全体の15%であったが、「形式性」は52%、「構造化」は35%と多くの生徒が指摘できた。3年生についても同様の傾向が見られ、文字式を用いる「よさ」を「一般性」だけでなく生徒の認めやすい「形式性」や「構造化」という「よさ」を積極的に認めながら、文字式を用いることを促していくことが必要である。

(2)生徒たちの文字式の計算力だけでなく、これと同時に特に表現力と読式力を高めることに力点をおくこと

本調査において、文字式を用いて問題解決するためには、文章題（方程式の応用）では文字式に表す力が、文字式による論証では文字式を読む力が大きくかかわっていることが明らかとなった。また、文字式の「よさ」を指摘できる生徒と指摘できない生徒の間には、文字式の計算力・表現力・読式力ともに有意な差が見られた。特に、文字式の「よさ」が指摘できない生徒は、文字式の表現力や読式力が不足している。これらのことから、教師は文字式の計算力だけでなく、表現力と読式力を高めることに大いに力を注ぐべきである。

(3)生徒たちが自分自身で最適な方法を選択することを促すこと

インタビュー調査において、生徒は無理して文字式を用いて失敗していることや今の自分にとって最適な方法を選択していることが明らかとなった。文字式を用いた方法の他に、生徒たちが考える方法も認めながら、生徒自身が比較検討して、自ら文字式の「よさ」に気付くまで繰り返し指導していくことが大切である。教師が「こういう場合は文字式を使わなければならない。」と、他の方法を否定し、文字式を強制的に使用させたとしても、かえって数学に対する嫌悪感を抱かせること

につながりかねない。文字式以外の方法も認めながら、生徒が主体的に自分で適切であると思う方法を選べる教室の雰囲気をつくっておくことが重要である。

これらの示唆を生かすことで、生徒の主体的な学習を促しながら文字式の「よさ」の理解を図る指導が可能となるであろう。さらに文字式の「よさ」を指摘できる生徒は、数学に対する好感度が高いことから、文字式の「よさ」を認識させるような学習活動を展開することによって、数学嫌いの改善につながることも期待できる。

今後の課題は、本研究で得られた示唆に基づいて中学校での文字式指導を実践し、実証的に検討することである。

<引用・参考文献>

- 国宗進.(1997). 確かな理解をめざした文字式の学習指導. 明治図書.
- Bednarz, N et al. (eds). (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Kluwer.
- 國本景亀.(1995). 空間直観力と理論的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善. 平成6～7年度 文部省科学研究費補助金一般研究(C). (課題番号06680256) 第一次報告書(中間報告).
- 三輪辰郎.(1991). 式の指導内容の概観と問題点の考察. 福森信夫, 平林一栄(編). 新・中学校数学指導実例講座第2巻 数・式. 金子書房.
- 三輪辰郎.(1996). 文字式の指導序説. 筑波数学教育研究, 15, 1-14.
- 岩崎浩.(1994). 「メタ知識」の意味. 上越数学教育研究, 9, 33-42

岩崎浩.(2001).メタ知識としての限界
(Grenzen)の意味とその役割.日本数学教育
学会第34回数学教育論文発表会論文集,
361- 366.

文部省.(1999).中学校学習指導要領(平成10
年12月): 解説-数学編-.

梅川貢司.(2002).数学教育における証明の意
義指導に関する基礎的研究.数学教育研究,
17,67-78.

藤井斉亮.(1998).「文字式の理解」に関する
一考察ー擬変数について.日本数学教育学
会第31回数学教育論文発表会論文集,123-
128.

大塚高央.(2003).文字式の活用を促す学習指
導に関する基礎的研究.日本数学教育学会
第36回論文発表会論文集,361-366.

< 資料 >

調査問題 B : 基礎力調査問題

[計算]

1 次の計算をしなさい。

- (1) $2a + 5a$
- (2) $a + (a + 2) + (a + 3)$
- (3) $4(a + 3)$
- (4) $x + 5(x + 2)$

2 次の方程式を解きなさい。

- (1) $5x - 20 = 0$
- (2) $4x - 3 = 2x + 7$
- (3) $2x + 4(x - 7) = 14$
- (4) $-5(2x + 3) = 9 - 2x$

3 次の()にあてはまる数を求めなさい。

- (1) $x = 4$ のとき、 $3x + 5 = (\quad)$
- (2) $a = 2$, $b = -3$ のとき、
 $-4a + b = (\quad)$

[表現]

4 次の問いに答えなさい。

- (1) ある学級の男子は女子よりも3人多い
す。女子の人数が x 人のとき、男子の人数
を表す式を書きなさい。
- (2) ある数 x とそれよりも5大きい数との和
を表す式を書きなさい。
- (3) A君はB君よりも150円多く持ってい
ます。C君はA君の2倍のお金を持ってい
ます。B君が y 円持っているとする、C
君の持っているお金を表す式を書きなさい
- (4) ある数 x の3倍から7ひくと、もとの数
と等しくなった。これを式に表しなさい。

[読式]

5 次の問いに答えなさい。

150cm のリボンを姉と妹で分けます。姉は
妹よりも30cm 長くなるようにします。
姉と妹はそれぞれ何 cm ずつになるでしょ
うか。

上の問題に対して、Aさんは妹のリボンの
長さを x cm として、

$x + (x + 30) = 150$ という方程式を立て
ました。これを解くと、 $x = 60$ となりました。

- (1) $x + 30$ は何を表しているのでしょうか。
- (2) 問題の答えを書き、その答えがあってい
ることを確かめなさい。

6 次のことがらについて、問いに答えなさい。

連続する3つの整数を n 、 $n + 1$ 、 $n + 2$
とすると、連続する3つの整数の和は、
 $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$
 $= 3(n + 1)$

となります。

- (1) $n + 1$ は何を表していますか。
- (2) $3(n + 1)$ は、どんなことを表してい
ますか。