

数学的道具の観点から見た算数の授業過程の考察

浦原 卓也

上越教育大学大学院修士課程 1 年

1 はじめに

小学校の算数の授業は、ほとんどの場合具体的な問題場面で導入される。そして、具体から抽象へという段階を踏み、算数の世界へ移行していく。しかしながら、算数の授業で具体的問題場面において、子どもに活動させるとき、教師の望んでいる数学的概念まで高まらないことが多々ある。実際の授業を分析すると子どもが数学的概念を持っているにもかかわらず、授業の中の解決に生かされていないのである。問題状況からいかに数学的活動が生まれてくるかということは、算数の授業において重要な課題である。

そこで、問題状況から数学の世界への移行を分析する観点として、数学的道具を取り入れることを試みる。ここでは、数学的道具を大谷(2003)が述べているように、文脈問題から数学問題への移行を媒介するものとしてとらえる。そして、数学的道具の観点から算数の授業過程を見直すことにより、授業改善の示唆を得たいと考えた。

2 道具の先行研究について

数学学習における道具使用の研究の現状について、大谷(1997)は、コンピテンスの研究が優勢であり、そこでは、道具使用の発達は、個の意味の発達に随伴するとされ、それに還元されていると述べている。さらに、これに対する例として、道具と個人の意味の相互作用を明確に意図とした研究として、日野

(1995)と関口(1995)を例示している。これらをふまえた上で、「道具的方法」にもとづく研究の具現化が必要であると述べている。

2.1 「道具的方法」について

大谷(1997)は、文献解釈的な検討を行い、数学的活動を「道具的方法」という観点から特徴付けている。

大谷(2003)は、中学校における一次関数の単元で実施された 10 時間わたるビデオの授業記録を「文化的道具」使用への導かれた参加を視点として分析している。そして、その結果として、以下の 3 つの特徴を見出している。「(1)一連の授業は、「文化的道具の導かれた使用」を媒介とする「文脈問題」から「数学的問題」への移行過程とみなされること。(2)その移行過程において、「文化的道具」は、「精神間的機能」から、「精神的内機能」へと転回し、最終的には「数学的对象」になることと述べている。

そして、10 時間の授業の基本的構造を図示

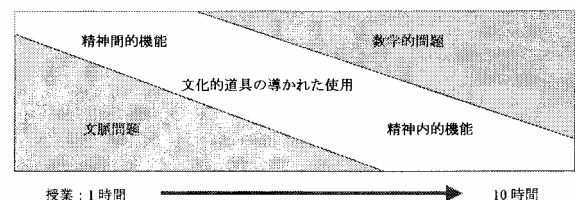


図 1

し(図 1)以下のように述べている。「文化的道具に導かれた使用」は、「文脈問題」と「数学的問題」の間に位置し、最初は、具体的な文

脈問題において教師の導きの下で使用され、次第に「数学問題」を解決する際に生徒自身が独力で使用するようになる。

本稿では、(1)の観点から、関数を題材とした指導計画を作成する。そして、道具の観点から、授業過程を見直す。

3 授業実践から

本授業実践は、1年生の100までの数を題材としている。ビデオの記録から、導入場面の授業プロトコルを作成し、子どもと教師の談話を分析することにより、授業実践における問題点を明らかにする。

3.1 授業のねらい

1年生の100までの数の主なねらいは、「100までの数について、その表し方と意味を理解すること」とある。表し方についての理解だけでなく、その意味も理解することをねらっている。そこで、本実践では、表し方の意味を理解することに焦点をあて、授業を構成した。

数は、十進位取り記数法の構造的にも表すことができる。そして、十進位取り記数法には、10のまとまりを1単位とする見方が含まれている。つまり、単位を取り直す概念が必要となるのである。そこで、本実践では、子どもが、数多くのものを数えるとき、同じ数のまとまりを作って数える活動を重視し意図的に経験させる。また、まとまりどうしの数で、大小関係を比べることにより、同じ数のまとまりを1と見るという単位を取り直す概念の素地となる活動を経験させることを試みた。

授業では、ジャンケンゲームという文脈で導入した。子どもは、シールが貼られている画用紙をくじ引きする。4~5人のグループごとに一齐にジャンケン(図2)をする。シールの数が多いほうが勝ちという場面設定にした。100までの数の大小関係については未習であるため同じ数のまとまりをつくり(図3)、まとまりの数で比べるようにさせる。シール



図 2



図 3

の数は40個から45個に設定した。

図4のようにぱっと見では、どちらが多いかよく分からない場면을提示する。次に、2ずつ、3ずつ、5ずつなど、同じ数ずつまとまりを作って数えさせる。

そして、他の人と比べることにより、別々

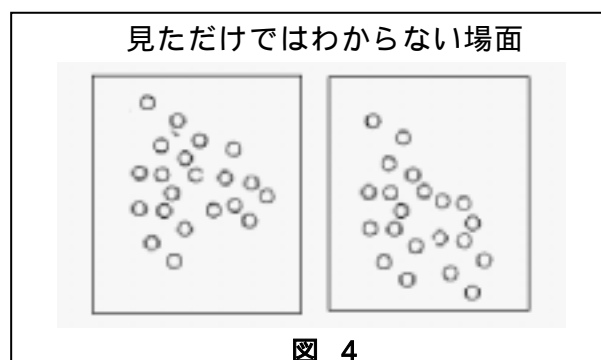
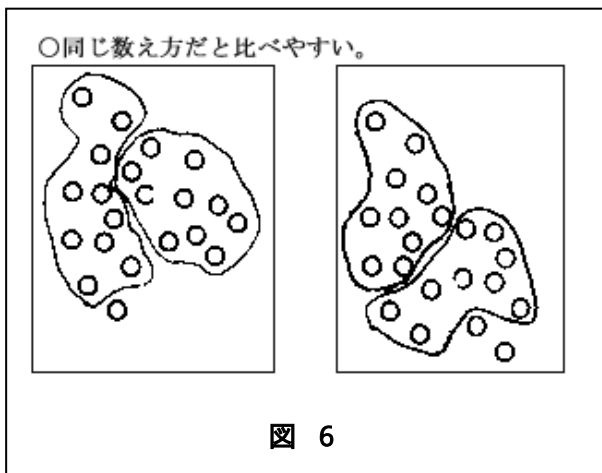
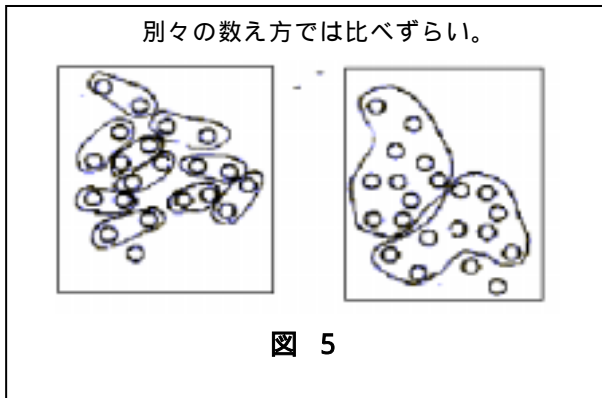


図 4

の数え方(図5)よりも、同じ数え方(図6)のほうが比べやすいことに気づかせ、まとまりの作り方を考えさせる。さらに、2のいくつか分



や 10 のいくつか分という見方でまとまりの数を比べる活動と数えなおしの活動（図 7）を通して、2 のまとまりや 10 のまとまりを 1 とみる見方を育てるという視点で指導計画を作成した。

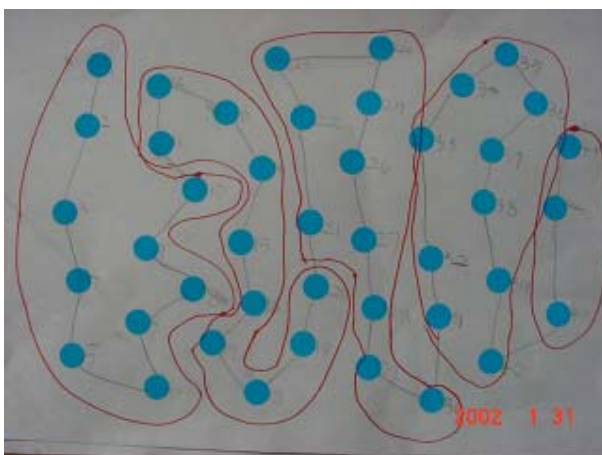


図 7

3.2 授業の分析について

子どもと教師のやり取りから、授業の分析を試みる。数学的道具の観点から授業過程を

見ることにより、算数の授業における問題点が顕在化すると考えた。

取り上げたデータは、小学校 1 年生の大きな数の導入場面の 1 時間の授業の様子をビデオカメラによって記録したものである。

分析の手順として、はじめに授業の中で数学的道具が顕在化する場面を特定する。次に、その概念が授業の中でどのように扱われているか特徴付け、問題点を明らかにする。そして、問題が起こる原因を明確することにより、授業改善への示唆を得られると考えた。

3.2.1 授業分析の観点

1 年生の 100 までの数で学ぶべき数学的道具は、100 までの数について、その表し方と意味を理解することである。そして、最終的には、十進位取り記数法の原理について基礎的な理解を図ることをねらいとしている。

そこで、本稿では、100 までの数において子どもが身につけるべき十進位取り記数法の原理の基礎となる概念を「10 のまとまり」と捉え、それを数学的道具として扱う。そして、授業における子どもと教師のやり取りから「10 のまとまり」の概念を通して、授業過程において顕在化する問題点を分析する。

3.2.2 授業で起きている事実から

この授業で数学的道具が顕在化する場面を授業のプロトコルをもとに分析する。

(1) 「数え方を検討する場面」

子どもたちが、数多くのシールが貼られた画用紙を目の前にして、どのように数えるか検討している場面である。

1075	T	どう、すぐわかる。
1076	T	これなに、これなに。
1077	c	わかんない。
1078	T	わかんない。
1079	c	多すぎてわかんない。
1080	T	多すぎてわかんない子もいるんだっ

		て、そしたらどうすればいいかな。
1081	c	数える。
1082	c	大田さん。大田さん。
1083	c	数える。
1084	c	まとめる。
1085	T	まとめるう。
1086	c	線をつける。
1087	T	はあ。
1088	c	線。
1089	T	あ、線つけたらいい。
1090	c	目印をつける。

教師と子どものやり取りにおいて、1081、1083、1084、1086、1090では、「数える、まとめる、線をつける、目印をつける」と発話している。

これらは、子どもが授業のはじめの段階で持っている数学的概念ということができる。教師は、自力解決の場面で、子どもに「まとめる」という概念を使わせたいという意図を持っていた。そこで、この場面で「まとめる」という発話に対する価値付けを行った。

(2) 「数え方を発表する場面」

以下に示すプロトコルは、自力解決の後、数え方を発表する場面である。ここでは10のまとまりを作って数えた場合と20のまとまりを作って数えた場合を取り上げる。ただし、これ以外にも2、3、5のまとまりで数えたという考えが出された。

この事実から、「まとまりを作る」という概念は子どもに定着していることがわかる。

1134	大関	はい。10と1こで数えました。
1135	T	10、10、10、10。あーあ。1こあまったんね。
1136	大関	うん。
1137	T	じゃあ、1は違うけど、10、10、10、10って数えた人？
1138	T	2人、3人ぐらい。ああそう。中島くんもそうね。はい、他に。

大関は、10のまとまりを作って数えた。1134で、「10と1こ」と発話しているが、教師は、「10、10、10、10」とまとまりを指し示しながら説明を加えている。この段階で、10のまとまりで数えた子どもは2,3人であった。

1159	山本	20こと2こで数えました。
1160	T	20こってどれ。やってみて。20こ。20こ。2こあまったんだね。

山本は20のまとまりを作って数えた。ここで、山本は20このまとまりが2ことあまりが2ことみている。

この段階では、数えるという状況のため、10のまとまりがよいか、20のまとまりがよいかの正当性を検証する根拠がない。

まとまりを作るという行為が数える行為が独立して起きている状態である。

(3) 10のまとまりと20のまとまりの関係

教師は、話し合いの場面で10のまとまりで数えたものと20のまとまりで数えたものを取り出し、ぱっと見てわかりやすいのはどちらか比較させた。すると、10のまとまりと20のまとまりで意見が分かれ、以下のようなやり取りが展開された。

1202	山本	10と10をたして20で
1203	T	んー？
1204	山本	まず、10が4個あって、最後に、藤友里恵ちゃんのなんだけど
1205	T	ああ、藤友里恵ちゃんので言ってるんだ。
1206	山本	10が…
1207	T	ちょっと、なんかいいこといってるみたい。
1208	山本	10が4こあったら、10と10でたして20って書いてあるから、あとここに20ってあるから、20と20をたして40になって、40と4をたしたら、44ってなった。
1209	T	いまいったのわかった？よく分から

		なかったんだけど説明して。
1210	T	はい。
1211	大関	まず始めに10たす10をたして、それで20で、それでまた、10たす10をたして40で、最後に4をたして44。
1212	T	なんで、佐藤友里恵ちゃんの10がいいと思ったの？山本さん。
1213	山本	…
1214	T	そこまでは、わかんない。

10のまとまりがよいと主張する子どもと教師がやり取りをする場面である。この場面では1202,1208の山本の発話と1211の大関の発話から10のまとまり作ること、たすこと、数詞で表すことといった行為を結びつけて、シールを数としてあらわそうとしていることが分かる。

まとまりを作るという行為から10のまとまりをつくり、次に足し算という道具で10のまとまり同士を足している。数えることから加法的に捉えることへと行為が変化していると見ることができる。

ここでは、10と10で20、10と10で20、合わせて40、40と4をたして44と考えている。数学的概念を使って、44という数詞を作り出すという行為が見られる。

1321	T	じゃあ何で、小池君、10がいいと思うん？
1322	小池	10と10で20だから、もう一個たすと30だから…
1323	T	もう一個たすと
1324	小池	40う。
1325	T	もう一個たすと。ないか。
1326	T	10と10で20もう一個たすと30もう一個たすと40っていえるんだって・
1327	小池	そんで、44

小池の発話は1322で10ずつたしていくものである。これは10、20、30、40と数えられるというように数詞の概念と結び付けて考

えている。教師は、子どもにとって10のまとまりの概念を強調できる発話ととらえ、価値付けを図っている。

1356	市川	10がいいと思います。
1357	T	何で。春子さんの意見を聞きましょう。
1358	市川	10が4こたして、40ってすぐわかる。
1359	T	10が4個で40、10がすぐわかる。

市川は1358の発話で、10を4個たして40と答えている。乗法的に捉えれば、より簡単に数詞にあらわせることを主張している。

10のまとまりのよさを主張する子どもは、10のまとまりと数詞を結びつけて捉えていることがわかる。教師が望んでいる数学的概念の活用がなされている場合である。

しかし、比べるやぱっと見てわかるという状況が入ってくると10のまとまりよりも20のまとまりのほうがよいという議論が起こってくる。次に20のまとまりよさを主張する場面を提示する。

1277	大関	20と20
1278	T	20と20。なんで、すぐに分かるのかなあ。
1279	大関	同じのがあるから、20とこれ。
1280	T	20とこの20が同じ。はい。20とこれ20？
1281	c	違う。5。
1282	T	これ違う。違うからわからない。
1283	大関	これで40作れちゃうし、これで40作れちゃうから
1284	T	だから、ぱっと見て分かっちゃう。はい、ありがとう

シールの数を比べるという観点から見ると20のまとまりを作るほうがよい。大関は、1283でこれで40作れちゃうしこれでという発話で、20のまとまりなら、まとまりの数が少ないから比べやすい。つまり、20のまと

まりどうしは同じと見ると、残りの数で比べれば簡単に比べられる。ぱっとみてわかるという点では、10のまとまりよりも20のまとまりのほうが有効だという考えである。

1366	T	まだ、どっちがいいかわからない。最後に聞くよ。10がい人、20がい人
1367	T	20のほうがおおいなあ。

シールの数を比べるという状況に依存して、授業が進んだため、まとめの段階になっても、10のまとまりよりも20のまとまりがよいという議論がつづいた。

教師は、ゲームという状況から、数学的活動に転換し、「10のまとまり」の概念形成とそれが数学的道具として働くことを教師は想定した。しかし、授業の終わりには、「20のまとまり」の方がよいという子どもが多数いたという結果に終わった。

3.2.3 問題点

この授業の問題点は、10のまとまりの概念を子どもが使えるようにならなかったことである。つまり、教師の望む数学的道具まで、子どもが高まらなかったことである。この原因は、状況の設定に問題があったことである。10のまとまりという数学的道具が授業で出されているにもかかわらず、定着しなかった原因として、比べるために、ぱっと見てわかるようにという状況に依存したことがあげられる。つまり、ゲームが10のまとまりという数学的道具がうまく機能しなかったのである。

言い換えるとゲームの状況から数学への転換がうまくいかなかったといえる。「まとまりをつくる」という数学的道具を通して数学の世界に移行したが、勝ち負けを決めるというゲームの文脈に戻ったときに、ぱっとみてわかるや比べるといった状況に依存し、「10のまとまり」より「20のまとまり」がよいという現象が起きている。

4 道具の概念を用いた授業設計

前章で検討した問題点は、教師が望む数学的概念まで、子どもが高まらなかったことである。そして、その原因として、状況設定が悪いために、ゲーム化の状況から、数学の世界への移行がうまく行かないことであった。子どもと教師の価値観のずれと、子どもの学習が共通の土台に乗らないことであった。この問題点を、明らかにする手立てとして、数学的道具という観点で、授業分析を進めた結果、1年生の事例では、ゲームの状況から「10のまとまり」の概念への一般化がうまくいかないことがわかった。うまくいかないことが見られる。そこで、問題状況からの移行をうまくいくようにするために、数学的道具の概念を取り入れることが必要であると考えた。そこで大谷(2003)の「文化的道具の導かれた使用」を媒介とする「文脈問題」から「数学的問題」への移行過程という観点を援用し、授業を構成することにした。

4.1 実験授業の概要

関数的なものの見方を媒介として、文脈問題から数学問題への移行をはかるという観点で学習活動を構成した。ここでは、キャラクターの絵を拡大するという問題場面を通して関数的なものの見方を養うことをねらいとしている。

子ども実態としては、既に比例の学習を終えている状況である。そこで、比例的な見方と関連付ける発展的な教材として、2乗に比例する事象を取り扱うことにした。

指導計画は4時間扱いとし、1・2時間目に比例の事象を、3・4時間目に2乗に比例する事象を取り扱う。

キャラクターの絵をコピー機で拡大するという状況設定で、1.2時間目には、ひげの長さを問題とし、3.4時間目には、足の裏の面積を問題とする。

4.2 文脈問題

キャラクターの絵を拡大コピーするという文脈、比例の事象と2乗に比例する事象とを扱う問題を作成した。

4.2.1 授業計画1(1・2時間目の計画)

はじめに、キャラクターの絵をコピー機で拡大するという場面で導入する。そして、コピーが失敗してしまい、左のひげがうまく移らなかったため、ひげを正確に描き入れたいという状況から課題1を提示する。

課題1は、「3倍拡大のキャラクターのひげを正確にかこう。」と設定する。そして、基準のキャラクターと3倍拡大のキャラクターを個別に配布し自力解決に入る。課題1では、内比・外比の量化を取り上げ、長さに着目し計算することにより、ひげの長さが正確に書けることを意識させる。

次に、課題2では、「3倍拡大の他の場合のひげの長さを求めよう。」という課題設定をし、4倍拡大、5倍拡大など、いろいろな倍率の長さを求める活動をする。

ここで、重要なことは文脈問題に数学的道具がどのように入っていくかということである。この時間に想定される数学的道具は、比例である。

児童の意見をもとに教師は表と式を黒板に書く。そして、表を埋めながら、比例の性質に気づかせ、倍比例や言葉の式が成り立つことを確認する。

次に、9倍・1.7倍を求め、外挿・内挿を確認する。最後に、実際の拡大図で長さをはかり妥当性を検討する。

4.2.2 授業計画2(3・4時間目の計画)

キャラクターの絵を拡大したときの足の裏(楕円形)の面積の変化を調べる。「もとのキャラクターの足の裏の面積は、2.83平方cmです。これを6倍に拡大したときに足の裏の面積は、最初の何倍になるでしょう。また、ほかの場合も求めましょう。」という問題を設定する。

そして、何倍になるか予想した後、子どもなりの見通しを持たせる。それぞれの見通しについて発表し話し合った後、自力解決に取り組ませる。

教師は、子どもの考えについていくつかの場合を想定し支援にあたる。予想される反応は、以下のとおりである。

- ・楕円の面積を実測し求める。
- ・切り取って敷き詰める。
- ・キャラクターの他に部分に置き換える。
- ・正方形や円の面積に置き換える。
- ・切り取って重さに置き換える。
- ・比例を想定し式を立て計算して求める。

補助資料として、2倍から6倍までのキャラクターのコピー、1倍と6倍の足の裏のコピー、上皿天秤などを用意する。

次に話し合いの段階で、子どもたちそれぞれの意見を発表させ、比例ではないことを確認する。また、2乗に比例するという関係に気づかせるために、円や正方形の面積に置き換えて考えたことを取り上げる。この際、円の場合には式を正方形の場合には図を活用し2乗に比例することを読み取らせる。

そして、子どもたちのそれぞれの考えを価値付けながら、きまりの定式化を行う。最後にきまりを利用して求め、重さで確認する。

4.3 数学的道具との関連

1・2時間目で数学的道具として比例を想定している。キャラクターのひげをかくという文脈問題から数学問題への移行を考えると次のような場合が想定される。

子どもは、既に比例の学習を終えている。それにもかかわらず、授業計画1の段階で、比例の事象を扱う理由は、比例の定式化に重点を置き、定式化の思考プロセスを強調した指導を行うためである。

ここでは、数学的道具を思考プロセスにかかわるものを想定する。具体的には、数表に表すことやきまりを見つけること、数表から

言葉の式への移行のプロセス、倍比例の関係に焦点を当てる。

指導計画 2 では、子どもは、比例を想定し解決を図ることが考えられる。1 倍拡大と 6 倍拡大の足の裏の面積を比べたり、実測して計算したりすることにより、比例ではないことに気づかせる。

ここでは、数学的道具を数表からきまりを見つけることや言葉の式への定式化を想定する。それを踏まえた上で、2 乗に比例する事象を扱うことにより、比例の事象の時に思考のプロセスを活用し、課題解決に取り組めると考える。思考のプロセスを再現するためにかかわる概念を道具と捉えようと考えた。

5 おわりに

本稿では、算数の授業実践の Protokol をもとに分析することにより、授業における問題点を顕在化させることができた。

そして、その問題点をふまえ、授業を活性化し子どもの学習活動をより充実したものにするために、道具という観点から算数の授業を見直すことを試みることにした。比例を

きまりをみつけることを媒介として、道具が変化するプロセスを明らかにすることを通して、子どもの思考の特徴を分析したいと考えている。

引用・参考文献

大谷実.(1997). 数学学習における「道具的方法」. 日本数学教育学会・第 30 回論文発表会論文集, 151 - 156.

大谷実.(2002). 比例の指導におけるグラフのシンボル化と談話の機能：小学校と中学校の関数指導の接続性に向けて. 日本数学教育学会, 第 34 回数学教育論文発表会論文集, 151 - 156.

大谷実.(2002). 初等・中等教育段階の接続性を持つ数学的活動カリキュラムの開発と評価. 平成 11 年～13 年度科学研究費補助金（基盤研究 C(2)）研究成果報告.

大谷実.(2003). 数学の授業における「文化的道具」の使用：日本の第 8 学年における一次関数の授業分析. 日本科学教育学会・年間論文集 27, 149 - 152.

島田茂.(1995). 新訂, 算数・数学科のオープンエンドアプローチ, 授業改善への新しい提案. 東洋館出版社.

出口陽正.(1997). 実験できる算数・数学. 仮説社.

中村光一.(2003). ある算数の授業におけるきまりの構造過程に関する分析. 日本数学教育学会, 第 36 回論文発表会, 「課題別分科会」発表集録, 今後の我が国の数学教育研究, 118 - 125.

C. カミイ, G. デクラーク.(1987). 子どもと新しい算数. 北大路書房.

J.V. ワーチ.(2002). 行為としての心. 北大路書房.