

子どもの数直線の見方の様相を顕在化させるための 問題の開発と検討

市 川 啓
上越教育大学大学院修士課程2年

1. 研究の背景

1.1 先行研究に見る「数直線」の価値と、 問題点

乗除法や割合の学習指導において、数直線の有効性を指摘した研究は多い。(榎園ら 1983, 中村 1996, 白井ら 1997 等)

それらの研究の多くは、数直線に埋め込まれた比例構造を生かすことによって、数量と数量の関係である倍や割合を顕在化させることができることを大きなポイントとして挙げている。例えば中村 (1995) は、小数の乗法の割合による意味づけの問題点を改善するための具体的な方策の 1 つとして、比例関係に基づいて割合を数直線によって明示することで、小数の乗法の意味づけを同数累加から割合へと広げることがを提案している。また、白井ら (1997) は、 \div 小数の学習で、数直線を書きながらも立式の根拠に用いていない児童について、2 つの数量の関係が比例関係に基づいているということの理解が十分になされていないと考えられると指摘している。

これらの研究から、数直線をどのように見ているかに着目する必要がある。

1.2 問題の所在

子どもによって、数直線に関する比例や割合の認識が異なることは指摘されている。実際どのように違っているのかについては、十分な検討がなされているとは言えない。そこで、そこに焦点をあてた研究が、求められる。

数直線に関する比例や割合の認識を調べるために、比例や割合に関する問題を自由に解かせてみる。子ども自身が回答に数直線をかいたとする。しかし、それが数直線に基づく推論だとは限らない。白井ら (1997) の、数直線をかいても演算決定の根拠にしていない児童がいることの指摘は、数直線をかいたか、かかないかで、それを用いたかどうかの判断ができないことを示している。

つまり、子どもが数直線に関する比例や割合をどのようにもっているのかを明らかにするためには、自由に問題を解かせ、数直線をかかせるだけではうまくいかない。子どもの数直線に関する比例や割合の概念を顕在化させるための問題を工夫することが必要である。

2 本研究の目的

本稿は、子どもの数直線に対する認識の様相の一端を顕在化させるための、問題を開発し、それについて検討することを目的とする。

3 数直線を用いた異種の 2 量に関する欠損値問題の解決

まず 1 あたり量が示されていない、比例する異種の 2 量の欠損値問題の解決過程を、教材研究的な立場から検討する。そして、その過程を、数直線を目盛りを読む問題に置きかえるを試みる。

3.1 問題と一般的な解法

ここでは、具体的に次の問題を数直線を用いて考えてみる。

<問題>

5 cm の重さが 40 g の針金があります。
この針金 20cm の重さは、何 g でしょう。
この針金 13cm の重さは、何 g でしょう。

このような比例関係を前提とした欠損値問題は、一般的には次の 3 つの解法がある。

a) 帰一法

針金 1 cm あたりの重さは、

$$40 \div 5 = 8 \text{ g}$$

よって、この針金 20cm の重さは

$$8 \times 20 = 160 \quad \text{答え } 160 \text{ g}$$

この針金 13cm の重さは、

$$8 \times 13 = 104 \text{ g} \quad \text{答え } 104 \text{ g}$$

b) 倍比例

20cm の針金は 5 cm の 4 倍。

長さが 4 倍になれば、重さも 4 倍になるはずだから

$$40 \times 4 = 160 \quad \text{答え } 160 \text{ g}$$

13cm の針金は、5 cm の 2.8 倍

長さが 2.8 倍になれば、重さも 2.8 倍になるはずだから

$$40 \times 2.8 = 112 \quad \text{答え } 112 \text{ g}$$

c) 外比 (対応のきまり)

長さ	5	$\times 8$...	20	$\times 8$	
重さ	40		...			

$$20 \times 8 = 160$$

答え 160 g

長さ	5	$\times 8$...	13	$\times 8$	
重さ	40		...			

$$13 \times 8 = 104$$

答え 104 g

3.2 数直線を用いた帰一法の推論

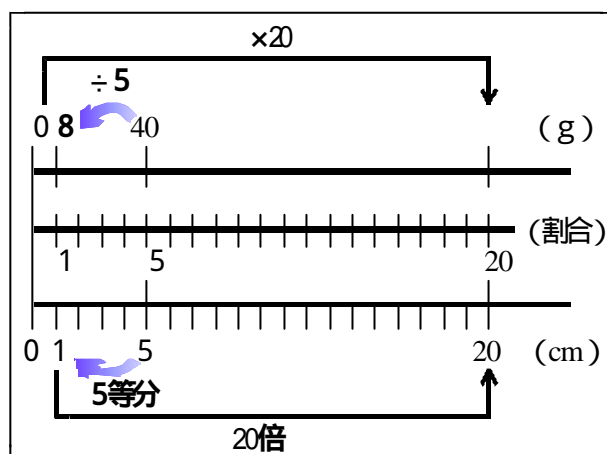
ここでは、a) b) 2 種類の解法について、

数直線を用いたとき、どのように推論が行われ、倍や割合、比例関係が顕在化するかを検討しよう。

まず、問題の帰一法による解法を考えてみる。帰一法では、まず 1 cm の重さを考えるところから始まる。そこで、5 cm と 1 cm の関係を考えると、長さは 5 等分されている。従って、重さも 5 等分されるはずである。分数倍や小数倍がよく身に付いている段階の子どもであれば、 $1/5$ 倍になっているなどとも言えるであろうが、そこまで至っていない子どもでも、帰一法を用いた解決は見られるので、そのときの根拠として、ここでは「等分」を用いる。長さが 5 等分されれば、重さも 5 等分されるはずである (2 量の比例関係) から、1 cm の重さは、 $40 \div 5 = 8$ から 8 g と求まる。

つぎに、20cm 分の重さを考える。20cm は 1 cm の 20 倍であるから、20cm の重さは、 $8 \times 20 = 160$ から、160 g と求めることができる。

この推論プロセスは、図 2 のように数直線上の操作・および関係として表すことができる。矢印で操作を表し、第 3 の数直線によって割合関係を表している。



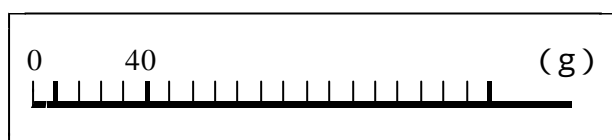
〔図 2〕

問題の場合も、推論プロセスに大きな違いはない。

割合を表す第 3 の数直線を入れてみると明

らかなように、帰一法では、40 を 5 と見て推論を行っている、と解釈できる。

この過程は図 3 の様に、40 を 5 と見るために、40 を 5 目盛りで表し、1 目盛りの大きさを求める活動、それに基づいて 20 目盛りにあたる大きさを求める活動に置きかえることができる。



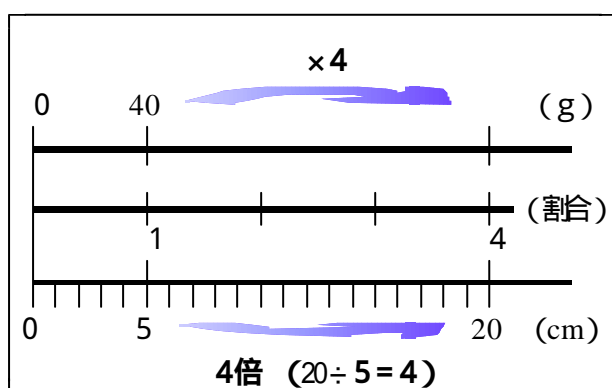
〔図 3 5 目盛りで 40 のとき 1 目盛りは？
1 目盛り のとき、20 目盛りは？〕

3.3 数直線を用いた倍比例の推論

(1) 問題 整数倍になる場合について

まず、問題 について検討する。長さの関係に着目し、20cm は 5 cm の 4 倍である。長さが 4 倍になれば、重さも 4 倍になるはず（2 量の比例関係）であるから、20cm の重さは 40g の 4 倍で、 $40 \times 4 = 160$ から 160g と結論づけられる。言い換えれば、5 cm を 1 と見れば、20cm は 4 と見られる。5cm に対応する 40g を 1 と見た時、4 にあたる重さは 40×4 となり、160 g と結論づけられる。

この推論プロセスは、図 4 のように数直線上の操作・および関係として表すことができる。矢印で操作を表し、第 3 の数直線によって割合関係を表している。



〔図 4〕

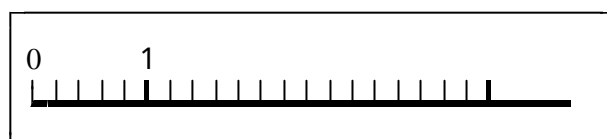
4.2 で示した帰一法と 4.3 で示した倍比例の方略では、「何を 1 と見るか」ということ

に関して、大きな違いがある。帰一法は、どちらかの数量の 1 普遍単位、この問題で言えば 1 cm を 1 と見る解法であるといえる。また、倍比例では、基準量を 1 と見る解法であるといえる。

帰一法の場合、割合を表す第 3 の数直線は、長さの数直線と、全く同じ目盛りをふればよかった。この目盛りに対応させて、重さの数直線に目盛りをふり直せばよかった。

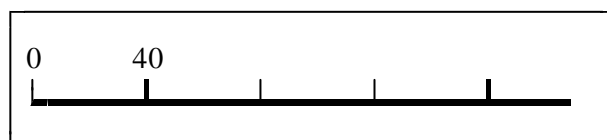
しかし倍比例の場合、まず、割合の数直線に長さの基準量を 1 目盛りとした目盛りをふる。さらに割合の数直線の目盛りに合わせて、重さの数直線に目盛りをふり直す必要がある。割合の数直線を作り出すときに、新たな目盛りの系列を考えなければならず、それに基づいて、重さの数直線に新たな目盛りを入れていかなければならない。

つまり、前半の手続きは、5 目盛りを 1 としたとき、40 目盛りがいくつになるかを考える活動に置きかえることができる。



〔図 5 5 目盛りで 1 のとき 40 目盛りは？〕
ただし、問題 では、 の値が整数になることを改めて付加しておく。

後半の手続きは、40 を 1 目盛りとしたとき、 に当たる数の 4 である 4 目盛りに対応する数を求める活動に置きかえることができる。数直線で表せば図 6 のようになる。



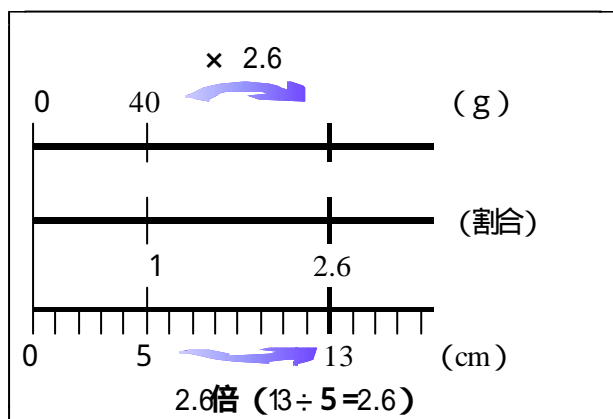
〔図 6 1 目盛り 40 のとき 4 目盛りでは？〕
(2) 問題 小数（分数）倍になる場合について

次に問題 について検討する。問題 と同様長さの関係に着目する。5 を 1 と見たとき、

13 がいくつにあたるかを考える。

13cm は 5 cm の 2.6 倍にあたる。長さが 2.6 倍になれば、重さも 2.6 倍になるはず（2 量の比例関係）であるから、13cm の重さは 40g の 2.6 倍で、 $40 \times 2.6 = 104$ から 104g と結論づけられる。言い換えれば、5 cm を 1 と見れば、13cm は 2.6 と見られる。5cm に対応する 40g を 1 と見た時、2.6 にあたる重さは 40×2.6 となり、104 g と結論づけられる。

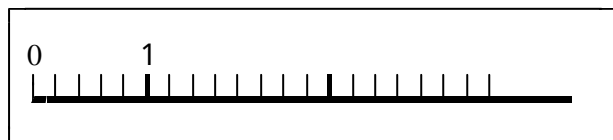
この推論プロセスは、図 7 のように数直線上の操作・および関係として表すことができる。矢印で操作を表し、第 3 の数直線によって割合関係を表している。



〔図7〕

基本的な解決のプロセスは問題 と同様である。長さの基準量を 1 目盛りとして、それに対応するように割合の数直線に目盛りをふる。

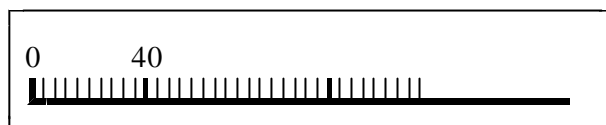
問題 では、このプロセスを 5 目盛りを 1 としたとき、13 目盛りがいくつになるかを考える活動に置きかえることができる。



〔図 8 5 目盛りで 1 のとき 13 目盛りは？〕
問題 が と異なるのは、 の値が小数または分数になることである。

次に、重さの数直線の見盛りをふり直す。40 を 1 目盛りにして目盛りをふり直すことにな

るが、問題 で知りたいのは 目盛りに当たる大きさである。しかし、 は具体的には 2.6 である。問題 のように 1 目盛りを 1 にすると、2.6 を目盛りは、1 目盛りを 10 等分して新たな下位の目盛りを設定しなければならない。そこで、0.1 を 1 目盛りで表し、2.6 を 26 目盛りで表すことにする。そうすると、10 目盛りで 40 のとき、26 目盛りに当たる大きさはいくつかという活動に、置きかえることができる。これを表したのが図 9 である。



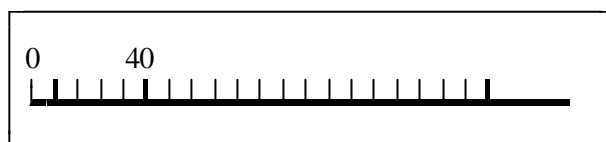
〔図 9 10 目盛り 40 のとき 26 目盛りでは？〕

4.4 単一数直線の目盛りをよむ活動への置きかえ

3.1 から 3.3 では、1 あたり量が示されていない比例する異種の 2 量の欠損値問題を考える際に、教材研究的な立場から想定される推論を、数直線の目盛りを読む活動に置きかえることを試みた。

まず、それらを整理し特徴をまとめる。

< 帰一法 >



〔図 3 5 目盛りで 40 のとき 1 目盛りは？〕

1 目盛り のとき、20 目盛りは？〕

帰一法は、次の 2 つの活動に置きかえられた。まず 1 目盛りにあたる大きさを求める活動、それをもとに、n 目盛りにあたる大きさを求める活動である。

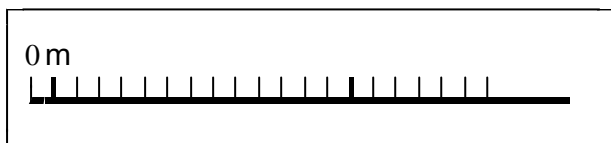
< 帰一法問題 (1) >



a (任意) 目盛りにあたる大きさが n のと

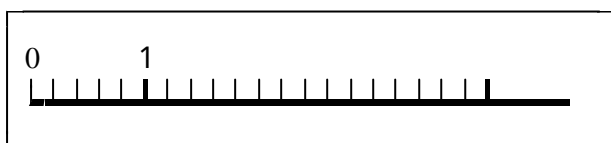
き、1目盛りに当たる大きさを求める問題。

<帰一法問題(2)>



1目盛りに当たる大きさがmのとき、b(任意)目盛りにあたる大きさを求める問題。

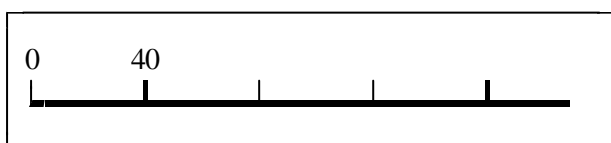
<倍比例(整数倍)問題(1)>



〔図5 5目盛りで1のとき40目盛りは?〕

a目盛りが1のときb目盛りにあたる大きさを求める。(ただし、bがaで整除できる)

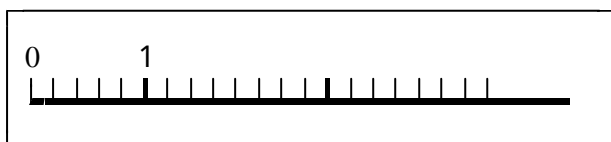
<倍比例(整数倍)問題(2)>



〔図6 1目盛り40のとき4目盛りでは?〕

1目盛りがnのときa目盛りにあたる大きさを求める。

<倍比例(小数倍・分数倍)問題(1)>



〔図8 5目盛りで1のとき13目盛りは?〕

a目盛りが1のときb目盛りにあたる大きさを求める。(ただし、bがaで整除できない。)

<倍比例(小数倍・分数倍)問題(2)>



〔図9 10目盛り40のとき26目盛りでは?〕

10目盛りがnのときb目盛りにあたる大

きさを求める。

4. 数直線の日盛りを読む問題に対する子どもの反応

S県内公立小学校6年生1学級に対して、数直線の日盛りを読む問題等に関する質問紙調査を実施した。ここでは、そのデータの中から、3.4でまとめたタイプの問題を抜きだし、子どもの実際の反応を検討する。

4.1 調査時期と対象

時期：〔第1回調査〕2004年5月18日

〔第2回調査〕2004年6月29日

対象：公立小学校6年生1学級28名

ただし、第1回調査は、1名欠席のため、27名で実施。

4.2 問題の系列

〔第1回調査〕

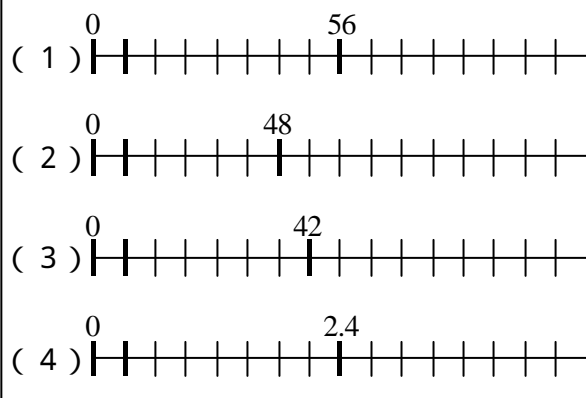
問題は4題。本稿で検討の対象とするのは、その中の1題(小問、2問による構成)である。

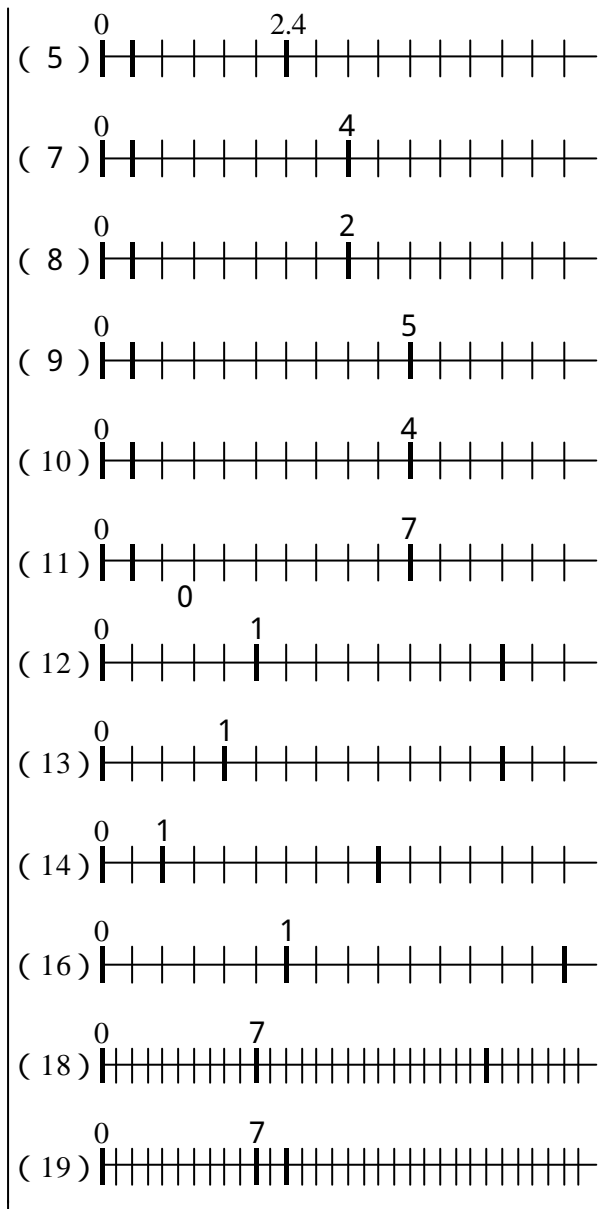
4 5 cmで40 gのはりがねがあります。
このはりがね、20cmの重さは何g
でしょう?
このはりがね、13cmの重さは何g
でしょう。

〔第2回調査〕

問題数は全部で22問。本稿で検討の対象とするのは、3.4でまとめたタイプの16題。

に入る数を求めましょう。





盛りにあたる	8目盛りが2.4	(4)	75
大きさがnの	6目盛りが2.4	(5)	75
とき、1目盛	8目盛りが4	(7)	71
りに当たる大	8目盛りが2	(8)	50
きさを求める	10目盛りが5	(9)	68
タイプの問題	10目盛りが4	(10)	64
	10目盛りが7	(11)	64
倍比例(小数	5目盛りが1	(12)	54
倍)問題(1)	のときの13目		
a(任意)目	盛り		
盛りにあたる	4目盛りが1	(13)	39
大きさが1の	のときの13目		
とき、b目盛	盛り		
り(bがaで	2目盛りが1	(14)	68
整除できない)	のときの9目		
に当たる大き	盛り		
さを求めるタ	6目盛りが1	(16)	36
イプの問題	のときの15目		
	盛り		
倍比例(小数	10目盛りにあ	(18)	32
倍)問題(2)	たる大きさが		
10目盛りにあ	7のとき、25		
たる大きさが	目盛り		
nのとき、a目	10目盛りにあ	(19)	32
盛りにあたる	たる大きさが		
大きさを求め	7のとき、12		
るタイプの問	目盛り		

正答率は、小数第1位を四捨五入

4.3 各問題の意図と正答率

問題の意図	問題番号	正答率(%)
比例する異種の2量で、1あたり量の明示なしの欠損値問題	整数倍 4 小数倍 (分数倍)	70 33
帰一法問題(1)	8目盛りが56 (1)	82
	6目盛りが48 (2)	79
a(任意)目	7目盛りが42 (3)	86

5 子どもの反応の分析

5.1 問題4の正誤の関係

		問題 整数倍		計
		正 答	誤 答	
問 題	正 答	9名 33%	0名 0%	9名 33%
	誤 答	10名 37%	8名 30%	18名 67%
計		19名 70%	8名 30%	27名 100%

ただし、誤答の数には無答を含む。

に正答した19名の内の9名がにも正答した。で誤答又は無答でに正答した児童はいなかった。

5.2 数直線問題のタイプ別全問正答者

問題のタイプ	全問正答者数 全問正答者率
帰一法問題(1)タイプ 問題番号(1)～(11)	11名 39%
倍比例(小数倍)問題(1)タイプ 問題番号(12)～(14)(16)	7名 25%
倍比例(小数倍)問題(2)タイプ 問題番号(18)～(19)	7名 25%

帰一法問題(1)タイプの全問正答者数が一番多い。倍比例(小数倍)問題は、2タイプともに、帰一法問題(1)の全正答者数よりも少ない。

5.3 倍比例(小数倍)問題(1)と、他の問題との関連

数直線の欠損値問題で、a(任意)目盛りにあたる大きさが1のとき、b目盛り(bがaで整除できない)にあたる大きさを求めるタイプの問題、(12)～(14)と(16)の計4題の反応に着目し、4や、他のタイプの数直線問題との関連を分析する。

ア) 帰一法問題(1)タイプとの関連

倍比例(小数倍)問題(1)タイプ全問正答者7名中6名が、帰一法問題(1)タイプに全問正答している。また、全問正答できなかった1名は、問題番号(2)だけ誤答であったが、残りは全問正答している。得られたデータからは、倍比例(小数倍)問題(1)タイプができる児童は、帰一法問題(1)タイプができると言える。

逆に、帰一法問題(1)タイプに全問正答している児童11名に着目すると、6名は倍比例(小数倍)問題(1)タイプに全問正答しているものの、残りの5名に関しては、4

問中、3問正答が3名、1問正答が1名、1問も正答できなかった児童が1名いた。つまり、1目盛りにあたる大きさが求められても、すぐにn目盛りにあたる大きさを求めることができるとは限らないことを示唆しており、この問題を通して、そのような子どもが顕在化した。

イ) 倍比例(小数倍)問題(2)タイプとの関連

倍比例(小数倍)問題(1)タイプの全問正答者7名中5名が、倍比例(小数倍)問題(2)タイプに全問正答している。残りの2名のうち1名は、倍比例(小数倍)問題(2)タイプの2問中、1問に正解しているが、1名は、1問もできていなかった。

逆に、倍比例(小数倍)問題(2)タイプに全問正答している児童7名中、5名は倍比例(小数倍)問題(1)タイプで全問正答しているが、残りの2名のうち1名は4問中3問に正答したものの、後の1名は1問しか正答していなかった。

つまり、どちらかのタイプが全部できたとしても、もう一方のタイプができるとは限らない過渡的状況の子どもが見出された。

ウ) 問題4との関連

倍比例(小数倍)問題(1)タイプの全問正答者7名中6名は、問題4を共に正答している。残りの1名は、のみ正答している。

逆に、問題4共に共に正答した児童9名中6名は、倍比例(小数倍)問題(1)タイプの問題に全問正答した。残り3名のうち、1名は4問中3問、1名は4問中1問正答し、後の1名は1問も正答していなかった。つまり、文章で提示された問題は解けるが、数直線を用いては解釈できない可能性のある児童が顕在化した。

5.4 問題 4 の方略と、倍比例(小数倍)問題(1)(2)タイプの正誤パターンとの関連

ここでは、問題 4 を共にに正答した 9 名の児童を対象にして、そのときの方略と倍比例(小数倍)問題(1)(2)の正誤パターンとの関連について検討する。

児童	倍比例(1)タイプ				(2)タイプ		整数倍	小数倍
	12	13	14	16	18	19	4	4
A							倍比例	倍比例
B							倍比例	倍比例
C							倍比例	帰一法
D							倍比例	帰一法
E							倍比例	帰一法
F				×	×		外比	帰一法
G					×	×	倍比例	倍比例
H	×	×		×	×	×	倍比例	帰一法
I	×	×	×	×	×	×	倍比例	判断確

倍比例(小数倍)問題(1)タイプ、(2)タイプ共に全問正答で、数直線の見盛りがよく読めると想定される児童も、C、D、Eの様に整数倍の場合 4 では、倍比例の方略を使いながらも、小数倍の問題 4 では、帰一法を採っている。一方で、倍比例(小数倍)問題(2)タイプが全くできていなくとも、4 で倍比例の方略を用いる G の様な児童も存在する。

自由に問題を解決した 4 の様な問題では顕在化しない数直線に関する比例や割合についての認識の違いが、倍比例問題(1)(2)によって顕在化した。

6 研究のまとめ

本稿の目的は、子どもの数直線に対する認識の様相の一端を顕在化させるための、問題を開発し、それについて検討することであった。

まず教材研究的な立場から、比例する異種の 2 量で、1 あたり量が示されていない欠損値問題の解決過程を、単一の数直線の欠損値問題に置きかえ、6 パターンの問題を提案した。それらの中から、2 つのパターンの問題に関して、6 年生を 28 名を対象にした質問紙調査の反応を分析した。その結果、提案した著査問題を行うことによって、4 の様に自由な問題解決では見ることができない、数直線に関する割合や比例の概念が顕在化させることができた。

倍比例問題(1)はできるが、(2)はできない、逆に(2)はできるが(1)はできないなどの児童が見いだされた。また、同じパターンの問題としてカテゴライズした問題間にも、個人毎にできるできないの差が見出された。それらについて考察するには、個人の行為に着目した研究を待たねばならないことが明らかになった。

<引用・参考文献>

- 加藤康順. (1980). 割合の指導についての一考察：2 本の数直線を組み合わせた図の利用. 日本数学教育学会誌, 62(10), pp.25-30.
- 榎園高士. (1983). 関数の考えを用いた乗法の指導：数直線を使った指導を通して. 日本数学教育学会誌, 65(6), pp.34-38.
- 中村享史. (1996). 小数の乗法の割合による意味づけ. 日本数学教育学会誌, 78(10), 7-13.
- 白井一之. (1997). 乗法・除法の演算決定に有効にはたらく数直線の指導. 日本数学教育学会誌, 79(6), pp.51-56.
- 田端輝彦・市川啓. (2001). 小数倍の意味指導の改善 - 数直線に目盛りを書く活動を通して -. 学芸大学数学教育研究, 13, pp65-74.