

割合の学習における児童の思考過程についての研究

～同種量の割合に焦点をあてて～

溝 口 英 磨

上越教育大学大学院修士課程 2 年

1 はじめに

平成 14 年度からの新学習指導要領の本格実施に伴い、「割合」の学習は、同種量の割合（百分率・歩合）を小学校 5 年、異種量の割合（平均・単位量あたりの大きさ・速さ）を小学校 6 年で指導することになった。この改訂前は、両単元とも小学校 5 年の指導内容であり、異種量の割合を同種量の割合よりも先に指導していたが、改訂後は異種量の割合が小学校 6 年へ移行されたため、同種量の割合を先に指導することになったわけである。

カリキュラム改訂後の筆者自身の指導経験では、同種量の割合を異種量の割合よりも先に指導した際に、「公倍数」、「単位量あたりの大きさ」、「平均」などが、第 5 学年の児童にとっては未習となり、そのような考えが児童からは出ることなく、逆に加法方略を用いる児童が多くなったという事例があった。

本論文の目的は、異種量の割合よりも先に指導することになった同種量の割合に焦点をあて、児童が数量の関係をどのように捉え、解決していくのかという思考過程を分析し、今後の指導における示唆を得ることである。

本稿では、第一に、割合に関わる先行研究を概観し、示唆を得る。第二に同種量の割合における児童の思考過程を捉えるための視点を示し、教授実験を構想する。第三に、実践した教授実験での子どもの活動を分析、考察する。

2 割合に関わる先行研究

2.1 新しいカリキュラムでの指導段階

田端 (2003) は、割合の指導段階を図 1 のように整理している。

～異種量の割合～ (小学校 6 年)

- | |
|---|
| ①一方の数量をそろえて、他方で比較する。
・公倍数の考え ・平均の考え |
| ②一方を単位量として、他方で数値化する。
・等分除的解釈 ・単位量あたりの考え |

～同種量の割合～ (小学校 5 年)

- | |
|---|
| ①一方の数量をそろえて、他方で比較する。
・公倍数の考え ・平均の考え |
| ②一方を単位量として、他方で数値化する。
・等分除的解釈 ・単位量あたりの考え |
| ③一方 (全体) を 1 とみて、他方を測定して数値化する。
・包含除的解釈 ・測定の考え |

図 1. 田端(2003)の割合の指導段階

田端 (2003) によれば、異種量の割合が図 1 の①, ②だけであるのに対し、同種量の割合は、①, ②だけでなく、③の考えにステップアップする必要がある。ところが、新しいカリキュラムでは、同種量の割合を先に指導することに変更され、①の「公倍数の考え」や「平均の考え」、②の「単位量あたりの考え」が未習のまま、③に入ってしまうことになる。①や②の知識が未習の子どもたちが、同種量

の割合で③を学習する際に、どのような考え方をするのかといった点を分析する必要がある。この点について、田端（2003）は、同種量の割合の導入では、①と③を重点的に指導し、異種量の割合の導入で、①と②を重点的に指導すればよいと述べている。具体的には、同種量の割合の導入では、「異なる割合」を比較する問題ではなく、「同じ割合」を考える問題を提案している。

2.2 「同じ割合」をつくるという視点

田端（2003）と同様に、早川（2003）も「同じ割合」に焦点をあて、同じシュートのうまさとして、試投数と成功数の数対をつくる活動を導入時に取り入れている。そして、同じうまさと見た根拠として、基準量に対する比較量の割合を児童に考えさせている。そこでは、倍の見方で、2量の同値の比をつくり、2量の同じうまさの数対を数表に表していくことで、比例の見方を養っている。

	Aさん	Bさん
入った数	10回	12回
投げた数	20回	□回

図2. 早川(2003)の導入問題の事例

早川（2003）は、図2の問題を例とすると、(10, 20), (12, 24)といった一見異なる数対を同じと見たり、なぜ同じなのかを吟味したりすることで、割合の考え方や概念に迫ることができるかと述べている。

この「同じ割合」をつくる導入については、筆者自身も賛同する。第1章において、児童の加法方略の増加の事例について述べたが、同じ割合（シュートのうまさ）をつくるという視点で見れば、(10, 20), (20, 30), …… (90, 100)といった数対を複数つくることによって、「差の考えによる数対は、同じうまさではない。」といった気づきを児童から引き出せると考える（図3, 4）。

また、数表を用いて同じうまさをつくることで、割合の前提となる比例を意識させ、縦の倍

関係から商一定の関係を導くことも可能である。さらに、異なる割合を比較する際にも、公倍数の考えでなく、試投数と成功数の一方が揃った段階で比較できる。子どもが「同じ割合」をつくる上で、数表の活用は有効であると考えられる。

入った数	0	10	20	30	…	90
投げた数	10	20	30	40	…	100

図3. 差の考えによる同じうまさ

入った数	5	10	15	20	…	50
投げた数	10	20	30	40	…	100

図4. 倍の考えによる同じうまさ

2.3 比の三用法との関連

金井（2002）は、割合に関する比の三用法の実態調査研究を行い、比の第2用法の正答率は他の用法と比べて正答率が高く、問題の数値が「基準量」「割合」「比較量」の順に出題されている問題は、比の三用法にかかわらず、正答率が高いことを報告している。

割合と乗除との関連は密接であり、比の三用法の指導では、三つの用法を別個に考えるのではなく、互いを関連させながら、他の用法とのつながりをもたせることは重要である。

高橋（2002）は、比の三用法を小数の乗除のフォーマルな知識として位置づけ、小数の乗除における子どもの知識構成の過程から比の三用法を活用していくまでの過程を考察している。高橋（2002）は、比の三用法を活用していった子どもの背景には、解決のための単位を自由に設定することや解決のための単位を1とみなして、その単位と単位あたり量の組を柔軟に利用していく経験が基になっていたことを明らかにしている。

同種量の割合では、比の三用法は第1用法、第2用法、第3用法の順に指導される。子どもが、割合、比較量、基準量の関係をどう捉え、比の三用法をどう活用していくのかという点についても詳細に分析する必要がある。

3 数学的表記への着目

子どもたちが問題解決する際には、式、絵図、数直線、数表、グラフなどの表記を用いる。日野（1997）は、表記の使用について次のように述べている。

人が表記を使う以上は、表記を構成している記号や記号間の関係等を解釈し、操作しなくてはならない。換言すると、表記に対して何らかの心的表象を構成しなくてはならないはずである。また、表記を使うのは、その表記が何らかの目的に対して貢献しているからであり、その人によって表記に重要性が与えられている。

（日野，1997，p. 3）

日野（1997）が述べているように、人が表記を使う以上、そこには表記を使用する人間にとっての何らかの意味や理由が存在するはずであり、子どもたちの思考の内容やその背景を探る上では、子どもたちが用いる表記が重要な手掛かりになる。

日野（2002）は、異種量の割合において、児童が用いた表記に着目し、考察した結果、数学的表記の内化の過程として3つの相を特徴づけている（図5）。

<p>相1：初期の使用</p> <ul style="list-style-type: none"> ● 自己中心的な解釈 ● 社会的ゴール達成のために表記を使う
<p>相2：基準の構築</p> <ul style="list-style-type: none"> ● 表記の意味と規則の認識及び表記を問題に適用する基準の構築 ● 表記を使うこと自体が主要なゴール
<p>相3：目的的使用</p> <ul style="list-style-type: none"> ● 適切な場面での表記の選択 ● 表記を使うことは二次的なゴール。新しいゴールの生成

図5. 日野(2002)による数学的表記の内化における3つの相

日野（2002）によれば、相1は、導入された表記に対する自分なりの見方が投影された段階であり、表記に対する意味づけはまだ浅い。相2は、表記それ自体が明瞭な意味と規則を有することが認識される段階であり、新しい基準が構築される。例えば、「35 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ で420km走る車Aと40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ で520km走る車Bでは、どちらの方が得か？」という問題に対し、35 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ と40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ から「5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ あたり=〇〇km」という任意単位を構築し、比較するようになる。既知量（A-B）と自ら見つけた対応（C-D）との間に、それまでにはなかったつながり（……）が生じ始める（図6）。日野（2002）は、この1つにまとめてとらえた数量間の関係を「2量の対応の表記」（pp. 13—16）と呼んでいる。

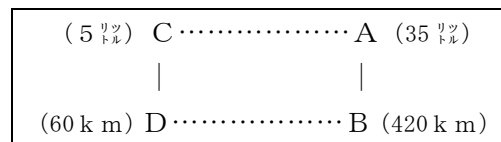


図6. 2量の対応の表記

日野（2002）によれば、相3は、内化の過程がさらに進み、表記の使い方が柔軟になり、適切な表記を選択できる段階である。

日野（2002）の研究では、割合を考える上で、相2における基準の構築が、子どもの思考過程の進展においての重要な役割を担っている。2量の関係を取り直し、新たな基準となる単位（2量の対応の表記）をつくり、表記に対する意味づけを図ることで、子どもの割合に対する理解が進んでいる。この相2における基準の構築は、本研究での同種量の割合の学習を進める上で大きな示唆となり得る。

日野（2002）の数学的表記の内化における3つの相（図5）に照らし合わせ、本研究での同種量の割合において、実際の子どもの活動の姿を次のように想定し、分析の視点とした。（図7）

相1：初期の使用 ・加法方略への依存 ・明確な根拠のない自己中心的な立式による解法
相2：基準の構築 ・累加から倍比例の見方への移行 ・対応の表記間の倍関係，比例関係の把握
相3：目的的使用 ・対応の表記間の倍関係，比例関係の自由な使用 ・数表や数直線などの表記から念頭での数量関係の構造化

図7. 本研究(同種量の割合)において想定した児童の活動

図7の相1は、数量間の倍関係や比例関係の捉えなど、表記に対する意味づけが、まだ曖昧な状態である。例えば、乗法で考える問題に対して加法方略を用いたり、数表や数直線を使用する際には、数量関係が整数倍ならば解決できるが、小数倍、分数倍となったときに解決できなかつたりする。また、立式の際には、以前解けた解法を同じように自己中心的に使用したり、答えの見積もりから加減乗除を考え、消去法的に演算を選択したりする。「よく分からないけれど、これでやるとうまくいくから使っている。」というような面を含んでいる。

相2は、表記に対して新たな基準が構築され、自らの思考と表記の使用との結びつきが、より密接になってくる。数表や数直線の見方では、整数倍から小数倍へ拡張され、倍比例の関係として数量関係を捉えることができるようになる。また、既知量を数表や数直線に表すことで、倍関係，比例関係を把握し、立式の根拠とするようになる。

相3は、表記の使い方が柔軟になり、適切な表記を選択できる段階である。問題の数値によって、新たに任意単位や下位単位をつかって解決したり、対応の表記間の倍関係や比例関係を柔軟に使用したり、数量間の関係が構造化し、念頭操作によって解決したりする。

以降、本研究の分析をこの枠組み(図7)

に照らし合わせて行うこととする。

4 教授実験

4.1 概要

2005年2月21日から3月18日までの期間に、N県内の公立小学校5学年の1学級31名を対象にして、筆者自身が同種量の割合の授業を16時間行った。授業の様子は5台のVTRで記録(全体記録2台，抽出児童記録3台)し、授業後には、抽出児童への個別のインタビューを行い、個々の思考の様子をデータとして集積した。

4.2 授業設計

子どもたちは、「倍」という言葉から数量が大きくなると考えることが多く、純小数倍の関係では、「倍」という言葉をあまり使わない傾向がある。導入では、子どもたちがもつ倍の考えを引き出すためにも、1より小さい割合でなく、1より大きい割合の問題を取り上げる。また、中村(2002)が差と倍の考えとの結果や方法が対立するとして提案している「ゴムの伸び方」を扱うことと先行研究から得た「同じ割合」をつくるという知見とを兼ね合わせ、図8の問題を構想した。

ある会社で作った8 cmのゴムがあります。このゴムの伸ばすと、12 cmになりました。

8 c m → **12 c m**

	もとの長さ	伸びた後の長さ
A	10 cm	14 cm
B	10 cm	15 cm

さて、次の2つのゴムのうち、この会社で作ったゴムはどちらでしょうか？

図8. 同種量の割合における導入問題

「同じ割合」をつくる際や百分率の導入に関しても、数表を活用し、児童が数表に書き込む数値がどのようなもので、児童の思考が累加，整数倍，倍比例のどの見方に依存しているかを分析することができる。また、一方

を1とみたときに、他方がその何倍にあたるかという包含除の考えや1あたりを求める等分除の考えなど、児童がどの考え方をを行い、さらに、考え方がどう変容していくかに注目した。

4.3 授業計画

教授実験における授業概要は次の通りである。

<第1次>割合の意味（第1時～第3時）

- ・ゴムの伸び方から同じ伸び方（割合）を考える。
- ・バスケットボールのシュートの同じうまさ（割合）を考える。

<第2次>百分率（第4時～第7時）

- ・シュートのうまさを百分率に表す。
- ・小数で表した割合と百分率の変換をする。
- ・異なる2つの事象を割合を求めて比較する。

<第3次>割合の文章題（第8時～第10時）

- ・比の第2用法，第3用法の問題を解く。

<第4次>割合を表すグラフ（第11時～第12時）

- ・帯グラフ，円グラフの数値を読んだり、割合を求めて帯グラフや円グラフをかいたりする。

<第5次>まとめ（第14時～第16時）

- ・まとめの問題やワークテストをする。

5 授業の実際と児童の思考の分析

教授実験において、児童がどのように対応の表記による基準を構築し、割合を考えていたかを分析する。本稿では同じ割合を考える導入場面と抽出児童として選出した5人の活動を取り上げ、以下にその詳細を述べる。

5.1 「同じ割合」を考える場面

第1時の導入では、4.2で述べた問題(図8)を取り上げた。解決当初、31人中24人の児童は差の考えを用い、「+4cm」の伸びが同じであるとしてAのゴムを選んでいった。一方、3人の児童が倍の考えで「1.5倍」の伸びが同じであるとしてBのゴムを選び、「もとの長さ

が長くなれば伸びる長さは4cm以上になる。」として、反論した。互いの意見交換後は、「言われてみればそう。」「Bかもしれない。」とBのゴムを選ぶ児童が3人から15人に増え、Aのゴムを選ぶ児童は24人から7人に減った。しかし、まだ、「+4cm」の伸びが同じであると強固に主張する児童も2,3名見られた。

その後は、1cmと2mのゴムを提示し、「この2つのゴムも同じ会社が作りました。伸びたら何cmになりますか。」と新たな問題を投げかけ、同じ伸び方としての対応の表記を構成する活動を展開した(図9, 図10)。

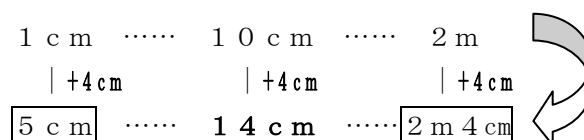


図9. 差の考え方による対応の表記

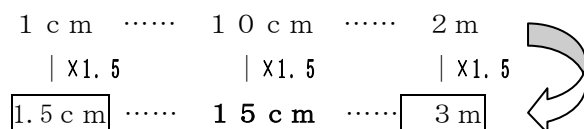


図10. 倍の考え方による対応の表記

同じ伸び方として、□にあてはまる数を考え、対応の表記を構成していく中で、児童からは、「この小さいの(1cm)も大きいの(2m)も4cm伸びるというのは、同じじゃない。」「もとの長さの半分伸びている方だ。」という発言が出始め、「1.5倍」伸びているBのゴムが「同じ伸び方」であるとして共通確認された。

5.2 抽出児童5名の活動

5.2.1 hiroの活動

第2時から、対応の表記をつくる際に、数表(図11)を活用して、同じシュートのうまさ(割合)をつくる活動を行った。

入った数	4	8	12	...	
投げた数	10	20	30	...	

図11. 第2時で用いた数表「10本中4本入るうまさ」

第4時では、同じように数表を使って百分率を導入した(図12)。

	割合(小数)		割合(%)	
入った数	<input type="text"/>	6	<input type="text"/>	
投げた数	1	10	100	

図12. 第4時で用いた数表「10本中6本の割合」

数表内の□を求めるにあたり、hiroは、様々な見方を行っていた(図13, 14, 15)。

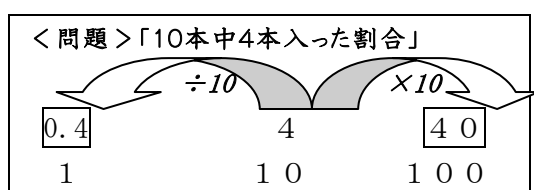


図13. hiroの数表を活用した対応の表記の例

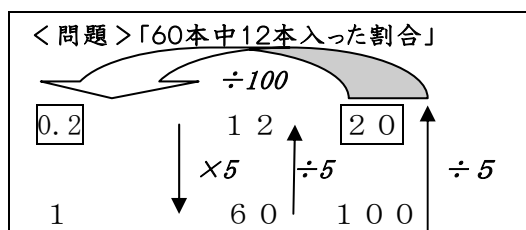


図14. hiroの数表を活用した対応の表記の例

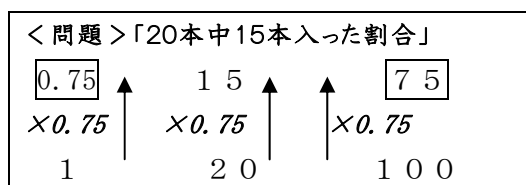


図15. hiroの数表を活用した対応の表記の例

「10本中4本の割合」(図13)では、数表の横の比例関係を使って、「10本中4本」を $1/10$, 10倍して、「0.4」, 「40%」を求め、「60本中12本の割合」(図14)では、縦の倍関係を使って「20%」を求め、それを $1/100$ にして小数で表した割合の「0.2」を求めるなどしていた。hiroは、数表内の数値の縦の倍関係や横の比例関係を自由に見ており、整数倍の関係を優先して用いるなど、問題の数値によ

って、その都度、簡潔な倍関係を選択していた。第5時~第7時の第1用法の問題では、割合である数表内の□を求めるためには、「20本中15本の割合」(図15)を例とすると、簡潔性からして、比較量÷基準量($15 \div 20$)をして求めた縦の倍関係(0.75倍)を1や100の場合に適用した(↑)の見方を選択するようになった。

第8時の比の第2用法の問題でも、「比較量÷基準量」で求めた数表内の縦の倍関係を同様に解決に用いていたが(図16)、第9時の比の第3用法の問題では、数表内の求める□の位置が替わったことにより、同様な考え方では、逆演算が必要となったことから思考の混乱を見せた。「当たりくじを15%にします。当たりくじを30本にすると、くじ全部の数は何本になるか?」という問題(図17)では、 $15 \div 100$ をして、数表内の縦の0.15倍の関係は求めることができたが、未知数である□を求めるにあたり、何を0.15倍すれば30になるかが分からず、未解決に終わった。

当たりくじ	0.05	<input type="text"/>	4	5
くじ全部	1	$\times 0.05$	80	100

$$5 \div 100 = 0.05$$

$$80 \times 0.05 = 4 \quad \underline{4 \text{本}}$$

図16. 比の第2用法(第8時)でのhiroの数表の見方

当たりくじ	0.15	<input type="text"/>	15	?	30
くじ全部	1	$\times 0.15$	100	<input type="text"/>	

$$15 \div 100 = 0.15$$

$$? \times 0.15 = 30$$

図17. 比の第3用法(第9時)でのhiroの数表の見方

第14時には、数直線上の左向き矢印の純小数倍の見方(図18)が話題になったが、これについては、教師とhiroとの間で次のようなやり取りがあった。

<第14時での教師とhiroとの発話>

（「3600冊の40%」を数直線を使って考える場面）

T 1 : 1と0.4の関係っていうのはどういう関係ですか？・・・この関係（図18の左向き矢印）は？

h 1 : $\div 0.4$ かな？・・・分かんない。

T 2 : 1は、何倍すれば0.4になる？

h 2 : 0.4倍。

T 3 : 0.4倍。1 \times 0.4というのが0.4だよな。そうすると、この1と0.4の関係というのは、 $\times 0.4$ の関係でしょ。そうすると、この3600も同じように、ここ（※図18の数直線上の□）にもってくるには、 $\times 0.4$ をして出せますね。

h 3 : あー・・・うん。

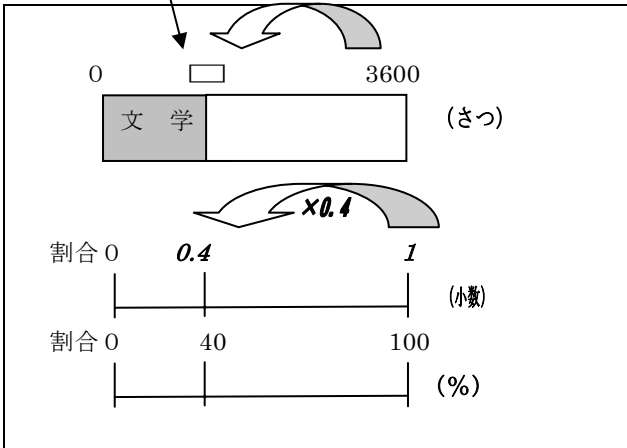


図18. 第14時に用いた数直線

子どもたちには、右向き矢印の関係は乗法、左向き矢印の関係は除法という暗黙の意識が内在している。それが、顕著に表れたのは、h 1「 $\div 0.4$ かな。」の発話である。授業中には、他の児童からも「0.4倍」という反応はすぐにはなかった。やや強引ではあったが、教師の発話T 2「1は、何倍すれば0.4になる？」により、hiroは、左向き矢印も倍（純小数倍）の見方ができることを知り、矢印の向きに惑わされることなく、数直線上の縦や横の数量間の倍関係を以後、使用することとなった。第15時では、図19, 20のような記述を行い、未知数である比較量や基準量を求めていた。hiroに内在していた数直線上の「右向き矢印の関係は乗法」、「左向き矢印の関係は除法」

という意識を「左向き矢印の関係は純小数倍」と修正することで、数直線の使用が進展し、解決につながった。

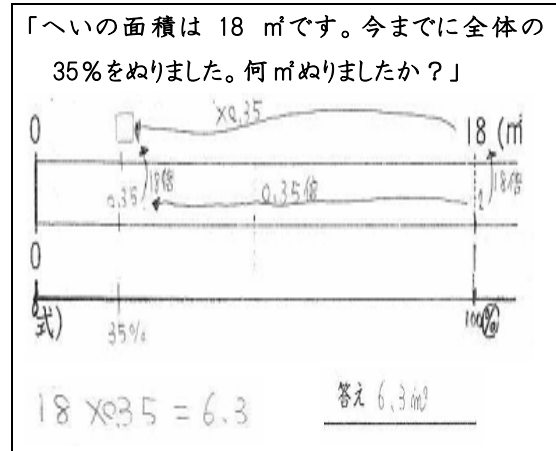


図19. 第15時のhiroの学習プリントへの記述

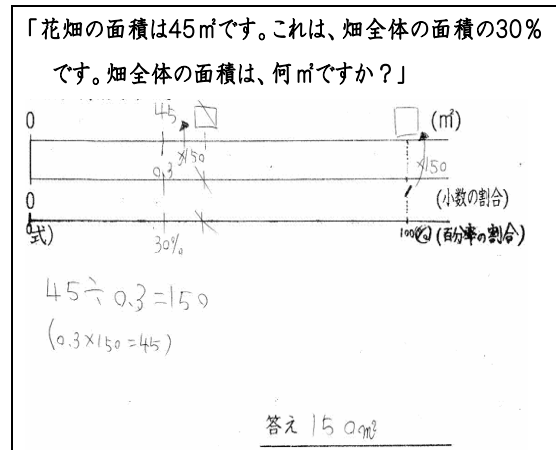


図20. 第15時のhiroの学習プリントへの記述

5.2.2 kuroの活動

前述の5.2.1 hiroと同様に、kuroも割合を求める比の第1用法では、表内の数値の縦の倍関係や横の比例関係を自由に見ていた。第5時の授業後のインタビューでは、問題を解決する際のkuroのこだわりが表れた。

<第5時後のインタビュー>

T 1 : 授業で、こっちを見る見方（↑；比較量÷基準量）と、こっちを見る見方（↓；基準量÷比較量）と両方あるというのをやったけども、どちらの方がいいですか？

k 1 : こっちの見方（↓）。それができなったら、こっちを見る見方（↑）。

T 2 : じゃあ、この問題 (図 21) だったら？

入った数	0.75	$20 \div 15$	15	↑	75
投げた数	1	↓	20	$15 \div 20$	100

図 21. 比の第1用法(第5時)でのkuroの数表の見方

k 2 : えーっと、・・・これ (図 21) だったら、これ (↓ ; $20 \div 15$) ができないので、

T 3 : ・・・じゃあ、最初に考えるのは、 $20 \div 15$ ？

k 3 : はい。それで、割り切れなかったら、 $15 \div 20$ をする。

T 4 : ・・・それは何か理由はありますか？

k 4 : 何となくこっち (↓ ; $20 \div 15$) の方がちょっと自分的にやりやすい。・・・ $15 \div 20$ をやると、一発で 0.75 とか出るけど、それは、あまり、普段はしない計算だと思うんですよ。・・・だから、何か、やっぱり、こっちの方 (↓ ; $20 \div 15$) がやりやすいです。

kuro は、比較量 ÷ 基準量である「 $15 \div 20$ 」(小 ÷ 大) の計算を用いた方が、□を求めるために逆算する必要がなく、簡潔であることを認識しながらも、自分の中で考えやすい基準量 ÷ 比較量である「 $20 \div 15$ 」(大 ÷ 小) の除法を選び、逆算して□を求める解法を優先した。この思考は第6時以降も同様に見られ、kuro が解決に際して最初に用いる解法であった。

k4「・・・普段はしない計算だと思うんですよ。」とあるように、解が純小数になる除法は、5年生の小数の除法で初めて学習し、それまでは整数の除法として解が1よりも大きくなる「大 ÷ 小」の計算を子どもたちは経験してきている。kuro 自身は計算を得意としている児童であるにもかかわらず、解が純小数になる「小 ÷ 大」の除法を避け、なじみのあるものとして「大 ÷ 小」の除法を選択する結果となった。

kuro の数表の使用は、初期の除法学習の影響を受け、小 (比較量) ÷ 大 (基準量) の演算を

避け、大 (基準量) ÷ 小 (比較量) の除法を行い、逆算することで割合を求めるものであったが、対応の表記間の倍関係や逆算の関係を捉えており、比の第2用法、第3用法において、数表内の未知数の□の位置が替わっても、さほど戸惑うことなく解決した。この数表での自由な見方が、数直線での数量の対応関係を見る上でも有効にはたらき、2量の倍関係や比例関係、逆演算の関係を把握し、立式の根拠としていた。

数表や数直線による数の対応付けは、kuro にとってはなくてはならないものであり、数表や数直線が明示されていない文章題でも、自ら数表や数直線をかき、求めたい箇所に□を置き、既知の2量との倍関係や比例関係を照らし合わせて解決していた。

5.2.3 waka の活動

多くの児童が数表内の数値の縦の倍関係や横の比例関係を使って解決している中、waka は、0.1 や 20% などの単位あたりや任意単位あたりの基準を構築し、そこから比較量との関係を照らし合わせていた。例えば、「75 本中 15 本の割合」では、「15 が 5 つで 75」になるから、「5 つで 100% (1) になるもの」として、「20% (0.2)」を求めていた。

第7時では、waka の下位単位の新たな構築の場面が見られた。「定員 520 人の大型飛行機に、乗客が 442 人乗っているときの混み具合は？」という問題に対して、授業後のインタビューでは、以下のように述べた。

<第7時後のインタビュー>

T 1 : 大型飛行機 (520 人中 442 人の割合) は、どうやって出しましたか？

W 1 : えーっと、これ (520 人中 442 人) を半分にして、0.5 は、50% は 260 (人) で、0.1 のやつは 52 (人) だから、増やしていくと、えーっと、0.8 で、416 (人) だけかな？・・・そうやって、で、・・・で、52 (人) の半分は 26 (人) で、これは、0.05

だから、それを足すと 442 (人) になって、
0.8 に 0.05 を足したことになるから、ここ
(百分率) は 85 (%) になって、で、これ
(小数で表した割合) は 1/100 にすると、
0.85 になる。

T 2: あー、なるほど。そういうふうな考え方ね。

waka は第 7 時の問題 (520 人中 442 人の割合) では、「0.5=260 人」と「0.1=52 人」の基準を設け、「0.8=416 人」までは考えることができた。しかし、「0.9=468 人」となるため、「0.1 あたりの基準」では解決できないことに気づき、「0.8=416 人」と 442 人との 26 人の差を考える中で、26 人は「0.1=52 人」の半分であることから、下位単位となる「0.05=26 人」を導き出し、これらを組み合わせて「0.85=442 人」と解決した (図 22)。

520人……… 1	520人……… 1
÷2	÷2 ÷10 ÷10
260人………0.5	52人………0.1
	÷2 ÷2
	26人………0.05

図 22. 第 7 時の問題における waka の下位単位の構築

前時までは、0.1 あたりや任意単位あたりの基準であったものが、第 7 時では、さらに下位単位である 0.05 あたりの基準を構築し、任意単位量あたりの思考を進める waka にとっては新たな見方が広がった 1 時間となった。waka は、その後の比の第 2 用法、第 3 用法の問題においても、簡潔に解決できるように任意単位や下位単位をつくり、答えを導き出していた (図 23, 24)。

waka は数表や数直線といった図式や公式に頼ることなく、問題の数値によって、自由に基準となる新たな単位をつくり、さらに基準となる単位を合成、分解することによって、いとも簡単に解決していた。

「当たりくじを全体の 5% にします。くじを 80 本作ると、当たりくじは何本ですか？」

$80 \div 2 = 40$
~~40~~
 $40 = 50\%$
 $50 \div 10 = 5$
 $40 \div 10 = 4$

答え (4本)

図 23. 比の第 2 用法 (第 8 時) での waka の記述

「当たりくじを 15% にします。当たりくじを 30 本にすると、くじ全部の数は、何本になるでしょうか？」

$5 \times 6 = 30$ $30 \times 6 = 180$
 $180 = 90\%$ $5/6 = 10$
 $10/6 = 20$

$90 + 10 = 100\%$
 $180 + 20 = 200$

200本

図 24. 比の第 3 用法 (第 9 時) での waka の記述

5. 2. 4 jin の活動

前述の 5. 2. 1 hiro と同じく、jin も比の第 1 用法では、図 15 と同様な数表内の縦の倍関係を使って解決していた。

第 8 時の比の第 2 用法の問題「くじを作っています。当たりくじを全体のくじの 5% にします。くじを 80 本作るとすると、当たりくじは、何本にすればよいでしょうか?」という問題に対しては、数表をかいたり、比較量 ÷ 基準量の除法を用いたりせず、すぐに「 80×0.05 」と立式した。授業中の発話 8154「5% は、小数に直すと、0.05 だから」、8156「だから、 $80 \times 0.05 \dots$ で 4 本になりました。」からすると、jin の頭の中では、数表に 2 量の関係を表さなくても、図 25 のような図式が描かれていると推察する。授業後の jin とのやり取りの中でも、T「もし、これが 40% だったら?」という問いには、jin「 $\times 0.4$ をする。」と即答しており、百分率を全体を 1 とみたときの小数に表すことで、縦の倍関係を把握し、解決につなげていた。

当たりくじ	0.05	4	5
	$\times 0.05$		$\times 0.05$
くじ全体	1	80	100

図 25. 比の第 2 用法 (第 8 時) における jin の思考

しかし、数表内の求める□の位置が替わった比の第3用法の問題では、うまく解決できない様子が見られた。「当たりくじの割合が15%のくじを作っています。当たりくじを30本にすると、くじ全部の数は、何本になるでしょうか？」という問題に対して「 $15\% = 0.15$ 」と記述した後、1分ほど考え、「 $30 \div 0.15 = 200$ 」と解決した(図26)。

「当たりくじを15%にします。当たりくじを30本にすると、くじ全部の数は、何本になるでしょうか？」

$15\% = 0.15$

$30 \div 0.15 = 200$

答え 200本

$\square \times 0.15 = 30$

図26. 比の第3用法(第9時)でのjinの記述

立式に至るまでの1分間で、どのような思考をしたのかは定かでないが、短時間で解決しているにもかかわらず、学習プリントの感想欄に「とき方がよく分からなかったけど、友達の見聞聞いて、少し理解できた。」と記述していることから、くじ全部の本数が30本より多くなると判断し、演算としては、加法、減法、小数倍の乗法は不適切で、除数が純小数の除法が適切であると判断して、「 $30 \div 0.15$ 」を用いた可能性もある。比の第1用法や第2用法では、2量の倍関係を数表の中で捉え、立式の根拠にしていたのに対し、第3用法では、第1用法と第2用法での縦の倍関係の見方では、求める□の位置が数表の下段になるために、逆算する必要があり、さらに、その逆算に対する理解が確かでなく、答えの見積もりから演算を消去法的に選択したと推察する。

その一方で、授業終了間際には、自分の第8時の第2用法における思考(図25)と結びつけようと、未知数である基準量を□とおき、「 $\square \times 0.15 = 30$ 」と乗法の式に表してから、式変形による解決として式を捉え直していた。

第10時以降、jinは、比の第2用法で自らが気付いた「比較量=基準量×割合」という既存の知識から、未知数を□と置き、乗法から除法へと式変形することで、割合、比較量、基準量の3量の関係を把握し、解決した。数表や数直線上の数量関係を見るよりも、第8時での第2用法の問題において自らが発見した「比較量=基準量×割合」(図25)という数式がjinの思考に大きく影響していた。

5.2.5 yamaの活動

yamaは、数表の使用において、比の第1用法では、図15と同様に数表内の縦の倍関係を用いて解決することができたが、比の第2用法、第3用法では、第1用法で使用した倍関係を適用できず、問題文中の数値を使って、演算を選んで解決しようとした。例えば、「80本の5%は？」という比の第2用法の問題に対しては、答えが80本よりも小さくなると判断し、「 $80 \div 5$ 」や「 $40 \div 5$ 」という除法を用いたり(図27)、「30本のあたりくじが全体の15%になるようにするには、くじは全部で何本必要か？」という問題に対しては、答えが30本よりも大きくなると判断し、「 30×15 」や「 30×0.15 」という乗法を用いたりした。

「当たりくじを全体の5%にします。くじを80本作ると、あたりくじは何本ですか？」

$80 \div 5 = 16$ $40 \div 5 = 8$

~~$40 \div 5 = 8$~~

図27. 比の第2用法(第8時)でのyamaの記述

その後の授業で導入された数直線に対する見方も、数表と同様であり、比の第1用法は解決できたが、比の第2用法、第3用法では、倍関係や比例関係をうまく使うことができなかった。yamaにとっての数表や数直線など

の表記の使用は、倍関係や比例関係を捉えるというよりも、既知量と答えとの大小を判断し、演算を選ぶための表記であった。

6 考察

教授実験において、児童が用いた表記は、数表や数直線、式、任意単位あたりの対応の表記など、様々であった。個々の児童が用いた表記には、解決のための意図があり、かつ、使用した表記に対する意味づけの進展が個々の思考過程に多大な影響を与えていた。

waka は、「0.1 あたり」の単位だけでなく、問題の数値によって、「0.2 あたり」、「0.25 あたり」などの任意単位や「0.01 あたり」、「0.05 あたり」などの下位単位の基準をつくり、答えを簡潔に導き出した。同種量の割合であるが、等分除の考えで、異種の2量の割合(例えば、10% = 8本)を考えていた。問題の数値によって、自由に基準となる新たな単位をつくり、さらに基準となる単位を合成、分解することによって、難なく解決しており、waka の表記の使用は、相3「目的的使用」の段階にあるといえる。

kuro は、数表の使用においては、初期の除法学習の影響を受け、小(比較量)÷大(基準量)の演算を避け、大(基準量)÷小(比較量)の除法を選び、逆算することで割合を求めていたが、対応の表記間の倍関係や逆算の関係を捉えていた。kuro は対応の表記の使用目的を明確にもっており、数表や数直線が明示されていない問題でも、自ら数表や数直線をかき、既知量と未知数を対応させて、数量の倍関係、比例関係、逆算の関係をを用いて解決した。問題の数値によって、整数倍のような簡潔な倍関係を用いたり、逆演算になることを承知で、自らが「考えやすい」と述べた「大÷小」の除法を優先したりしており、相2「基準の構築」から相3「目的的使用」へと移行した段階にあるといえる。

jin と hiro は、比の第1用法、第2用法の

問題では、共に数表内の縦の倍関係を解決に用いたが、比の第3用法では、数表内の求める□の位置が替わったことにより、逆演算が必要となったことから思考の混乱を見せた。

jin は、比の第2用法で自らが気付いた「比較量=基準量×割合」という既存の知識から、未知数を□と置き、乗法から除法へと式変形することで、未知数である□を求めた。jin にとっての数表の使用は、逆算の関係を見いだせず、対応の表記間の倍関係全てを柔軟に見ることはできなかったが、既知の倍関係から未知数に□を置いた乗法に置き換えて、解決につなげていたことから、相2「基準の構築」の段階を超え、相3「目的的使用」に移行しつつあるといえる。

一方、hiro は、授業で導入された数直線の使用において、右向き矢印でも、左向き矢印でも、「倍」と認識してからは、矢印の向きに惑わされることなく、倍関係や比例関係を自由に使用した。同種量の割合の学習以前のhiro は、数量間の関係や基準量のとらえが曖昧であり、解決に困ったときには、問題文中の数値を使った自己中心的な立式も見られた。しかし、数表や数直線を解決のために使用することで、既知の2量と対応する数量との倍関係や比例関係をつかみ、解決に役立てていたことから、相1「初期の使用」から相2「基準の構築」へと移行した段階であるといえる。

yama は、数表、数直線の使用においては、比の第1用法は倍関係を用いて解決することができたが、比の第2用法、第3用法は、第1用法で使用した倍関係を適用できず、答えの見積もりから演算を選び、問題文中の数値を使って解決しようとした。yama の表記の使用は、まだ一面的なものであり、相1「初期の使用」の段階にとどまっていた。yama にとっての数表や数直線は、倍関係や比例関係を捉えるための表記というよりも、既知量と答えとの大小を視覚的に判断し、演算を選ぶための表記となっていた。

日野 (1997) が、「表記に対して児童による独自の言葉の開発など、参照物を見出すことに関して児童の積極的な思考活動が行われることによって、数学的表記の内化の過程が進展する。」(p.9) と述べているように、子どもが用いる自己の表記に対する意味づけの進展が個々の児童の思考に影響を与えていた。

7 本論文のまとめ

本論文では、次の指導への示唆を得た。

まず、対応の表記を用いて同じ割合をつくることで、割合の前提となる比例関係を顕在化することができ、子どもは、数量間の倍関係や比例関係を把握した。子どもにとっては、差による比較は根強いものがあるが、同じ割合の数対を複数つくることで、2量の比例関係や商一定の関係が明らかとなり、子どもは、差の考えから倍の考えと移行した。公式を早期に導入しなくとも、児童がもつ既習の知識を土台にした学習過程の可能性の一端が示された。

次に、子どもの思考や解法の変容には、問題の数値や表記に対して個々が行う意味づけが影響を与えていた。子どもは、自然に簡潔に解決できる方法を模索しており、問題文中の数値によって、解法を使い分ける児童の姿があった。また、表記に対して矢印や乗除の関係を書き込むことで、意味づけを図り、表記の使用が進展する子どもの姿があった。

さらに、割合に関わる純小数の乗除は、「乗法は大きくなる」、「除法は小さくなる」と考え、演算を決定しようとする児童の思考を困惑させていた。この期の子どもの比例的推論は、整数倍に強く依存しており、さらなる思考の進展を図る上でも、割合の学習以前に純小数の乗除に対する意味づけを図る必要がある。

引用・参考文献

- 早川 健. (2003). 「同じ割合」に焦点を当てた割合指導の導入. 日本数学教育学会誌, 第 85 巻, 第 12 号, 23—30.
- 日野圭子. (1997). 一人の児童を通してみた数学的表記の内化の過程の分析—比例的推論との関わりにおいて—(1). 日本数学教育学会誌, 第 79 巻, 第 2 号, 2—10.
- 日野圭子. (2002). 授業における個の認知的変容と数学的表記の役割: 「単位量当たりの大きさ」の授業の事例研究を通して. 日本数学教育学論究, 第 79 巻, 3—22.
- 金井寛文. (2002). 割合に関する児童・生徒の理解の実態についての一考察. 日本数学教育学会誌, 第 84 巻, 第 8 号, 3—13.
- 中村享史. (2002). 書く活動を通して数学的な考え方を育てる授業. 東洋館出版.
- 田端輝彦. (2003). 同種の量の割合の導入に関する一考察. 日本数学教育学会誌, 第 85 巻, 第 12 号, 3—13.
- 高橋裕樹. (2002). 比の三用法を伴う小数の乗法及び除法における子どもの知識の構成過程について. 上越数学教育研究, 第 18 号, 101—110.