

## 小学校算数の授業構成における図的表現に関する研究 — 認識論的三角形を視座とした授業分析を手がかりとして —

柳 健

上越教育大学大学院修士課程 2 年

### 1. はじめに

現在、学校現場では学力低下問題をうけてゆとり教育の見直し、基礎基本の徹底、それに伴う習熟度別学習の実施等、学力向上に向けた様々な改善策が提案され実施されている。学力低下問題をめぐる、こういった現状を受けて学校で起こったことが「百マス計算」をはじめとするドリル学習や、「少人数学習」「習熟度別学習」であると言えよう。

佐藤(2005)は、IEA 調査や PISA 調査などからも明らかなように日本の子どもの学力で低下しているのは「推論的能力」や「科学的思考力」や「創造的思考力」や「表現力」などの高次の知的領域であるにもかかわらず、ドリル学習の普及によりそれほど必要としない低次の基礎技能の反復練習に時間と労力をさくことでかえって学力低下を助長した可能性があることを指摘している。また、「少人数指導」「習熟度別指導」について、

下位グループの子ども達は「習熟度別指導」によって、劣等感と教育内容の低下と引き替えに「わかる楽しさ」という「満足」を与えられ、その結果、ますます「低位」の学力へと押し込まれることになる。

と述べている。こういった動きに対し佐藤(2004)は顧客へのサービスを商品としている塾を引き合いに出しながら、「学校の塾化」を危惧している。

こういった流れの中で現場の教師に求められるのは日々の授業改善に他ならない。

### 2. 研究の目的

筆者は、課題に対し適切な解決の方法を選択し、試行錯誤を重ね、他者とのねりあげを通して自分の考えを深めていけるような問題解決を子ども達が積極的に構成できるような授業が大切であると考えている。具体的には、小学校算数において自分の考えを表現し、他の子ども達に伝え、評価し合えることをその目的とした場合に、全体で共有しやすい図的表現は有効な表現方法の一つである。筆者は特に、数学的な構造を表すことを意図して教師が設定する図的表現の活用を図りながらこれまで授業を行ってきた。

しかし、筆者の意図と子どもの理解との間にギャップが生じる場面がいくつも現れることを授業の回数を重ねていくにつれ感じるようになってきた。端的に言うならば、教師の設定する図的表現が必ずしも有効に機能していないのである。

例えば、6年生の「比例」の単元では二重数直線を用いたのであるが、問題文脈に即した数字や、項目をあてはめることができない、あるいは解釈がつけられないといった子どもが続出した。また、一見、数直線を積極的に活用しているように思われる子どもたちであっても出題の仕方に若干手を加えるだけで太刀打ちができなくなってしまうという状況も生まれた。

図的表現は数学的な構造を端的に表しており、子どもに理解されやすいはずである。そ

れに反してなぜ教師の意図するように機能しないのであろうか。その原因はどこにあるのか。図的表現を介した授業のあり方への疑問が浮かびあがったのである。

先に述べた算数教育の現状をふまえ、筆者自身のこれまでの現場での指導を省みて、「子どもが図的表現を介しながらどのように意味を構成していくのか、その際に図的表現がどのような役割を果たすのかを明らかにすることで授業改善への示唆を得ることが本研究の目的である。

### 3. 写像指導についての考察

例えば、計算のアルゴリズムの理解をねらうにあたり図的表現、あるいは具体物の操作を筆算の過程に対応させるなど算数の意味指導の場面では視覚的なモデルを利用した意味指導が行われている。この背景にあるのが写像理論である。Gravemeijer (2002) は写像指導について以下のように述べている。

その鍵となるアイデアは、数学的概念は触感できる、または視覚的なモデルにおいて具現化され、そして指示された方法によってこれらのモデルを操作することが数学と関係する概念的な理解へと通じるということである。

一方で、同氏は次のように批判もしている。

Cobb その他は、－ Dienes Block －を含む教育的道具は、生徒達がそれらの表す小数位取りシステムを見るように期待される…

熟達した大人にとって、私たちは道具におけるこれらの関係を見ることはできる。なぜなら私たちはすでにこれらの関係を構成しているからである、しかし、これらの関係を構成していない生徒達にとって、Dienes Block は木の一片にしかすぎない。

…教師は、ブロックとアルゴリズムとの間の対応を詳細に説明すること以外にない。その方策の結果は、理解よりもアルゴリズムのより早い暗記となるだろう。

以上のことから、写像指導は学習者の対象に対する数学の意味づけ方に大きく左右され

ることができる。

では、日本における算数指導で具体的に写像指導はどのように行われているのか。

佐々木 (2006) は日本の教科書におけるわり算の筆算の意味指導は具体物とその操作との対応によって説明されている点で典型的な写像理論に基づく指導であることを指摘している。そして、その構成主義的改善を図るにあたり、その背後にある写像理論について Gravemeijer (2002) を引用しながら次のように述べている。

計算の意味と手続きの指導については、さまざまな議論がある。そのなかで、これらの関係や対応を重視した理論であり、情報処理心理学に基づいている。物理的な操作の過程と計算の過程を写像のように対応させて、両者の効果的学習を促すものである。

そして、日本の実践が行動主義、写像理論などの教育文化を前提としてうまく納められているのであり、実は写像指導そのものに問題があると指摘している。そして、Gravemeijer (2002) が述べた写像指導の問題こそ、日本の数学教育が直面している課題そのものであり、何を改革しなければならないかが明確に述べられているとしている。

つまり、Gravemeijer の指摘する問題点を克服するような指導の改革こそが写像指導が中心とされる日本の算数授業における授業改善へつながるものと考えられるのである。

わり算筆算のアルゴリズムに対する意味づけを行うことと、わり算そのものに対する意味づけが別個のものとして扱われ、それぞれの間の関係づけが十分になされていないがため、それらをうまくまとめるために行動主義、写像理論という日本の教育文化が前提とされるという佐々木の指摘は現場の教師にとって実感されることであろう。

図的表現を介した指導とはまさに写像理論を背景とした写像指導そのものである。筆者が現場で抱いた問題意識、図的表現の有効な活用による授業改善という解決の方向性が本

節での佐々木、Gravemeijer らの言葉によって示唆されている。

#### 4.図的表現を介した指導に関する先行研究から

小学校で使用される算数の教科書には子どもの思考、理解を助けるためのたくさんの図が描かれている。数直線、テープ図、線分図等々、学年を越えた単元間の系統性を押さえながら内容の発展にあわせて、図それ自体も系統的に発展している。数学的概念を理解するのにこれらの役割を欠かすことができないことは言うまでもない。

実践レベルでみていくと、図的表現に関する先行研究には教師が与える図（数直線、テープ図等）に関わるものと、子どもが自由にかく図に関するものとの2つに大きく分かれている。

教師が与える図に関わる先行研究として山本(1995)、菊池(1996)を例に考察していく。

山本(1995)は問題解決における数直線や線分図等の図の効果を明らかにするために、乗除法を適用して解く問題と割合の問題について問題場面を文章と図の両方で示したものと、文章だけで示したものと2種類の調査問題を用いて調査を行った。

調査の結果、図が問題解決にプラスに寄与したと思われる問題、逆にマイナスに寄与したと思われる問題が一部に見られたが全体としては際だった違いがみられなかったのである。

この要因について次のように分析している。図を提示するだけでは、問題解決上の効果はそれほど期待できないとしながらも、図がプラスに寄与したと思われる問題については、「問題が『時間』という目に見えなくイメージしにくい数量を扱っているため、図が問題状況をイメージ化しやすくし、立式を容易にするのに手助けになった。」と述べている。

山本の研究からは、図が問題解決にプラスに寄与する面として表現しにくい概念を視覚的にとらえやすくする役割があるという示唆

が得られる。

山本の研究は既習の内容を出題の仕方を変えることで比較を行う調査に基づいている。そのため、新しい内容を学んでいく際の図の役割については言及されていないが、既習知識を活かしながら学んでいくことを考えればその手がかりとしての機能など、図に期待される役割は大きいものと想像される。

菊池(1996)は、どのような図が子どもによる問題解決において役立つのかを明らかにするため、『情景図』、『線分図』、その両方の図の間に位置する『中間図』の3つの図を用いた問題解決の過程を考察している。

その結果、次の2点が明らかになったと述べている。

- ・情景図は子どもに過去の具体場面を想起させて現実的な解法をさせたり、非現実的な形式的計算から現実的な解法に移行させたりしている。
- ・情景図の延長のような中間図は線分図に比べて子どもの構造把握を援助している。

しかし、いずれの図についても教師の側から与えているものであり、子どもの必要感から生まれてきたものではない。つまづきが見られた時に提示した中間図、あるいは線分図がはたして機能したか否かという点と、その要因を探ったものである。

菊池の研究からは子どものつまづきや問題意識がどこにあるか、そしてそれらが子どもの必要感と一致するかどうかによって、教師から与えられる図が機能するか否かは左右されるという示唆が得られる。

子どもが自由にかく図について、田中(2003)、布川(2000)の先行研究を考察する。

田中(2003)は「算数的表現法」として「絵や図にかいて考える指導」を提案し、図の2通りの役割として

その1 わからないことを解決するための図

その2 わかったことを説明するための図と分類し、

この2通りの役割を一緒に指導しようとするから、子どもたちは混乱するのである。(p.60)と述べている。

教科書中の図、あるいは教材解釈の上で教師の想定している図というのは数学的内容をすでに知っている教師の側からの視点でつくられているという点で、教師が「わかったことを説明するための図」そのものであることが言える。

また、図的表現が及ぼすデメリットの部分については次のように述べている。

市販の問題集などでは、関係の読みとりにくい時には、線分図やテープ図がついていることがある。

でもこれは一番考えなければならないところを奪ってしまっている。(p. 60)

特に、『文字→図→式』のステップのうち、『図→式』の場面は比較的、子どもたちも取り組みやすいのだが、『文字→図』の場面は簡単でないこと、そして、そこを教師が意識して指導していかなければならないことを指摘している。「わからないことを解決するための図」をかくということは、実はわからないことの中から「わかる部分」を探して図にかくという活動であり、この「わかる部分」を集めて、その関係を組み立てていくことが、解決していくための図になっていくと述べている

田中の研究からは図的表現を介した指導における教師の陥りやすい誤りと共に、重視すべきポイントについての示唆が得られる。特に図をかくという行為を「わかる部分を探して図にかくという活動」と意味づけ、その関係を組み立てることで図の役割そのものを変化させるという指摘は図的表現を介した指導における根幹に関わる重要な視点であると考えられる。

布川(2000)は、数学的問題解決における図をかくことと情報の生成との関係について考察を行った。その結果、問題を解決しようとするその時点で、学習者が問題場面について

理解していたことを一つの図の中に表していくことにより、要素の組み合わせを通し、新たな要素が現れてくること、図中の新たな要素に着目することは図に対する解決者の向き合い方であることを明らかにした。

そして、これらの着目を支える要因として次の3点をあげている。

第1に、図の中に新たな要素を見て、情報の生成につなげるには、それまでの意図を離れることが必要となるといういわゆる構えをはずすことの大切さである。

第2に、当該要素のもつ発展性である。情報の生成につながる可能性があるからこそ、当該要素への注目がなされる。それによって新たな情報が生成されるというものである。

第3に、問題場面についての情報やその探究である。以前の探求の中で変形等のイメージをもっていたなど図中に適当な要素の組み合わせが生じてから、その中に新たな要素が認められるまでに、こうした場面の探求が行われていたことである。

図の有効な利用を考えるにあたっては、新たな要素を生じうる情報の組み合わせに注意を払うこと。そして、問題の解決に必要な知識や、問題場面についての他の情報をも視野に入れながら、考えていくことが大切であると指摘している。

布川の研究は、図的表現に関わる際の学習者の認識について情報の生成がいかななされていくかという視点から考察している。図から生成される情報へ着目することはまさに学習者の理解の仕方を重視した授業構成のにおける教師側の重要な視点であると考えられる。

## 5. 視座としての認識論的三角形

図的表現を介した授業において、それらが子どもにとって機能しているか、教師の意図するような理解がなされているかどうかを知るためには何らかの手がかりとなるような視点が必要であると考えられる。授業を行っていく

うえで教師は、それらを手がかりにしながら次の手をうっていかなければならない。

そこで、本研究における授業分析の視座として、学習者が概念を獲得する思考過程を対象とそれを表す図的表現との関係から分析をすることができるという関係性を重要視し、Steinbring の認識論的三角形を用いることとした。

### 5.1. 認識論的三角形について

Steinbring(2002)はその著書の中で

記号なしに、人間の考え方や内の一般化は存在しないだろう「私達は記号なしに考える能力をもたない(peirce1991)」は Charles Peirce によって言われた名言である (p.1)

とし、記号の重要性を述べている。Steinbring は特に数学的記号の2つの機能として(a)「何かの代わりをする何か」としての数学的記号の役割：記号的機能と、(b)数学的知識の認識論的解釈の枠組みにおける数学的記号の役割：認識論的機能をあげている。

記号は指示の文脈との関係のもとで意味をもつものとしている。

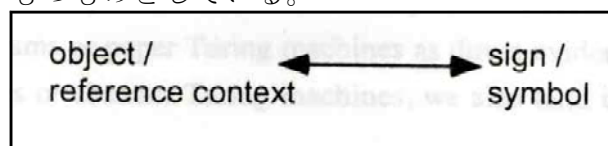


図1: 記号と指示の文脈の関係性

また、数学的記号の認識論的機能として次のように述べている。

数学的知識の本性をどう捉えているかによって数学的記号に対する解釈は異なってくる。数学的知識のよりどころとなる経験によって、例えば、数学的知識の論理的なとらえ方ではなく、数学的記号に対して別の地位が定まるのである。(p.2)

これら2つの接続における数学的記号の特殊性を解決するのが認識論的三角形である。

数学は知識を記録したり、符号化したりするために確かな記号や記号体系(certain sign on symbol systems)を必要とする。…まず第一に、これらの記号はそれら固有の意味をもたない。意味は適切な指示の文脈との仲介を確立することで認識主体によっ

て生み出されなければならないのである。(p.2)

Steinbring はこのように述べ、認識論的三角形により記号と数学的知識の認識論的状态によって影響される指示の文脈との仲介をモデル化した。

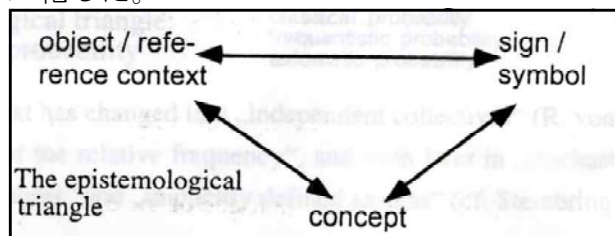


図2: 認識論的三角形

そして数学的知識や、数学教育学上の問題という視点からも認識論的三角形に関する欠くことのできない項目として次の2点をあげている。

- ・ 数学的概念は対象／指示の文脈、記号から独立している。
- ・ 数学的知識の発展過程や学習過程で、具体的な対象は指示の文脈の側の心的対象及び構造によってどんどん置き換えられていく。(p.4)

### 5.2. 構造の具体化としての数学的記号と指示の文脈

社会的文脈 (social context) において、子ども達は典型的な方法で記号と指示の文脈とを仲介する能力を得ている。それが記号の記号的機能である。

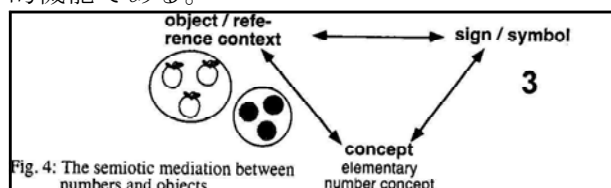


図3: 数と対象の間の記号的仲介

図3の例は具体的対象物(object/reference context)とそれを象徴する記号(sign)3との関係づけによって意味をもつようになることを表している。

もう1つが認識論的機能である。

数学的な記号体系は対象(何らかの抽象的な種類のもの)に対する単なる名前または省略形ではない、むしろそれらは構造、パターンや関係それ自体を含

んでいる。(p.7)

記号(sign)が含んでいる構造やパターンを指示の文脈との関係づけによって意味づけられるという機能である。

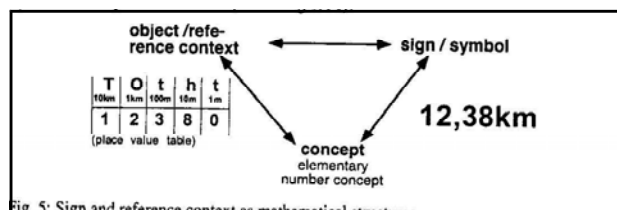


図4：数学的構造としての記号と指示の文脈

したがって量》12,38km《は、例えば小数の位取り表によって表すことができる構造をもった数学的記号なのである。(p.7)

図 2.1.4 は 12.38km と表記された記号体系に対し、位取り表を指示の文脈としながら2つの関係の意味づけを行うことで小数の構造的な理解を行っている例である。

また、記号論的視点からすると、与えられた記号が何かを象徴しているという考えは、記号と指示の文脈との役割があらかじめ決定されるのではなく、数学的な本質を生じさせる主題によって指定されなければならないことと矛盾していることを指摘している。

一方、同氏は数学的知識の焦点が関係や構造であるという認識論的特異性に着目すれば次のような問題が表れることも指摘している。

比較的親しみのあるものとして与えられるものについての不確かさと新たな記号が、その親しみのあるものによって、部分的側面において説明される不確かさは、記号と指示の文脈において想像され、具体化されると想定される構造がまさしく原因でしばしば生じるのである。(p.8)

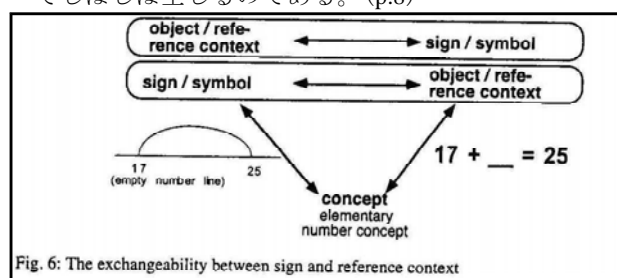


図5：記号と指示の文脈の間の交換可能性

上の図は算数の概念を学んでいく過程にお

いて、数直線が指示の文脈から記号へと変わる様子を表している。Steinbring はこれを「記号と指示の文脈の間の交換可能性」と呼び、認識論的三角形の重要な性質としている。

認識論的三角形の有効性については Steinbring の次の1文に集約される。

認識論的三角形は1つのモデルである。それは、目に見えない数学的知識をその構造的な性格に近づけるためのものであり、その特殊性を記述することができるようにするためのものであり、数学的知識—したがって典型的な文脈と活動において具体化されるような目に見えない関係—の相互作用的構成過程を分析するためのものである。(p.9)

### 5.3. 視座としての認識論的三角形の有効性

岩崎(1998)はこの認識論的三角形における指示の文脈と記号について次のように述べている。

この「指示の文脈」は、認識主体の意識、あるいは見方の変化によって様々なものに変化するという意味で主観的であると同時に、変更しえない実態としての特質によって、その主観的変化は、ある程度制約を受けることになるという意味で客観的であるといえよう。

これを本稿における図的表現にあてはめて考えた場合、筆者の現場における問題意識に対する一つの示唆を与えている。また、

結局「指示の文脈」と「記号体系」との区別は、実体の違いとして客観的に区別できるのものではなく、認識主体にとって「親しみのあるもの」と比較的「親しみのない(新しい)もの」という程度の区別にすぎないものとなってしまったということである。

と述べ、「指示の文脈」と「記号体系」とは認識主体、つまり学習者の認識によって決定されるものであり、表現の客観的特徴によって区別できないことを指摘している。

以上のことから概念(数学的知識)を獲得するにあたっては『対象／指示の文脈』(以下、指示の文脈)と『記号』との関係づけによる意味の構成が行われなければならないと

いう前提に立つ。そして、この前提に立って授業を構成、実践し、さらに分析の視座として、この認識論的三角形を用いることとした。

本研究における図的表現を介した指導とは、算数の学びの中で図的表現が時には指示の文脈として、時には記号としてその役割を頻繁に変えながら子どもが意味を構成していく指導とみることができる。

## 6. 授業実践

本授業実践では、逆思考を要する加減法を学習する際、その構造的理解を得る過程に着目をする。その際、子どもが自由にかく図をテープ図へと発展させていくという図的表現を介した指導を具体的方策として取り入れ、授業として展開する。それにより、図的表現を介した指導が子どもの意味を構成する過程へどう影響を及ぼすのかを明らかにする。

授業は2006年2月28日から3月7日までの期間に、新潟県内の公立小学校2学年の1学級を対象にして、筆者が「たしざんとひきざん(2)」の授業を6時間行った。授業の様子は3台のビデオカメラと1台のICレコーダーで記録し、これらのデータから詳細なプロトコルを作成した。

### 6.1. 分析

#### 場面1：学級全体で問題を共有する場面

ここでのやりとりは全て、会話のみになっている。従って、問題をどのようにとらえ、なぜそのような立式を行ったのかという根拠は子どもの説明に頼るのみである。指示の文脈は視覚的に表現されないため、これを探るには子どもと教師との適切な対話が必要となる。

#### 場面1.1：問題把握の場面における子どもの指示の文脈(1)

ここで子ども達に示されたのは『バスにおきやくが27人のっていました。あとから何人かのってきたのでお客はぜんぶで34人になりました。』である。事実経過文のみで、求

答指示文が欠けている。これは後の□の導入を意識し、子どもが問題解決の際に順思考を行うであろうことを前提にしながら問題の不備に気づかせることで、□の必然性を生み出させたいというものであった。しかし、子ども達の意識は問いの不備に気づくのではなく式が加法となるか、減法となるかという方向へ向いていったのである。次に示すプロトコルは立式が加法となることを主張する子どもの発言である。

27	kazu	そこ(問題を指差して)に全部って書いてあるからさ。
28	yuki	全部で34人で書いてある。
29	maho	答え書いてあるよ。
30	T	たしざんって言った人だれだったっけ?
31	C	kazuさんと、masaさん。
32	T	kazuさん、たしざん、ひきざんどっち?
33	kazu	たしざん
34	T	何でそう思ったの?
35	kazu	え、全部でがあるから。
36	T	全部でがあるから。(板書する)

不備の問題を前に、yuki、miho、kazuの3人は立式が足し算であることを当然とするかのような発言をしている。yuki、kazuの発言からも明らかのように「全部で」という言葉を問いが含んでいれば、その問いの式は自動的に足し算になるという思考パターンがすでにできてしまっていることが推測される。問いの文脈よりも字面が優先されている子どもの思考であることがうかがえる。

こうなるとはじめに加法ありきで、それにあてはめるような立式を形式的に行う可能性が生じることとなる。

これに対し、次のtomoは減法で立式を行い、有意味な解釈を示した。

#### 場面1.2：問題把握の場面における子どもの指示の文脈(2)

41	tomo	27人乗っていて、何人か乗ってきて34人だから、34-27だから、そうすれば答えが出る。
42	T	34-27で答えが出る?(板書する)
43	T	tomoさん、もう一回、答えって何?
44	tomo	答えが7
45	T	え、答え?答えが7?(板書する)
46	T	これは何の人数?
47	moto	乗ってる人数。
48	nozo	乗ってるお客さん。
49	moto	乗ってきた。乗ってきた人数。
50	mako	あ、乗ってきた。
51	T	これ乗ってきた人数?
52	C	うん。

tomoは自分の中ですでに問題文を完成させ

ている。問題文脈もそれに合うようにつかめている。求めるものは『何人乗ってきたか』であり、それを前提とした立式をすでに行っている。立式の根拠も明らかとなっている。

kazu らの発言をもとにした場面 4.1.1 では問題文中の単語を、tomo らの発言をもとにした場面 4.1.2 では問題文脈を指示の文脈としながら記号である式に対し、意味づけを行おうとしたことがうかがえる。

立式の根拠を明らかにするのに自由にかく図、テープ図をもとに指示の文脈を探った前時までの授業では視覚的にとらえることができたが、ここではそれをするにはできない。したがって、子どもとの会話の中からそれぞれの子どもの指示の文脈を推測するしか方法はない。

kazu らと、tomo らの発言内容から、ここで子ども達が共通の土台の上にはいないという問題が明らかとなった。この段階において、学級内で問題はまだ共有されていないのである。このことから、それぞれの指示の文脈を推測しつつ学級内で共有されるような形で明確にした上での修正を教師は行っていかねばならないのである。

そこで、実際の授業では、授業開始間もなく1人の子どもが問題の不備に気づきそれを指摘していたことから、これを生かすこととした。

### 場面1.3: 問題の再把握

97	T	なんかおかしくない、これ(問題をさして)?
98	kazu	なんかおかしい!
99	maho	はんばだよ。
100	maho	それで終わるわけないもん。
101	T	mahoさん言うて。
102	maho	あのねえ、なんだっけあれ。
103	maho	バスにおきゃくさんが27人のっていました。あとから何人かのってきました。お客さんは全部で34人のっているんだから、たしたら、答えがもうわかってるんだよ。
104	maho	でも、何人かって、何人乗ってきたかわからないんだよ。
105	T	そうだよな。何人乗ってきたかわからないんだよな。
106	maho	途中で切れてる。
107	T	途中で切れてる?
108	maho	うん。
109	T	mahoさんこれどうやって直せばいい?
110	maho	わかんない。

問題文の不備に気づいてもらいたいという当初の教師側の意図ははずれ、プロトコル

No.97 に至るまでの内容は別におかれたまま、教師の投げかけによる新たな問題提起という形をとらざるをえなくなってしまった。

maho は問題の不備に最初に気がついた子どもでもある。maho 自身はどう直せば良いのかまでは答えることができなかった。そこで、他の子ども達とのやりとりからようやく問題文が完成し(バスにおきゃくが27人のっていました。あとから何人かのってきたのでお客はぜんぶで34人になりました。のってきたお客さんの数はぜんぶで何人ですか)、学級全体が取り組む課題は明確になった。

ここで続けざまに次のような興味深い発言が出された。

133	masa	たしさんになっちゃうよ。
134	yuki	たしさんになっちゃう。
135	kazu	よっしゃ!

先に示したプロトコル No.35 で kazu は『『全部で』があるから』と発言していた。完成した問題文にも同様の表現があることからここでの masa,yuki も同じように考えているものと推測される。

つまり、立式の根拠について、この学級内には少なくとも2つの傾向がうかがえることがわかった。

- ・問題文の表現(単語)を根拠とする。
- ・問題文脈を読みとって根拠とする。

この後、立式を行い、その根拠をテープ図に示す個別活動へと移った。

子どもは立式の根拠をテープ図に対して意味づけを行うことで示さなければならないため、式と矛盾するようなテープ図になってはならない。したがって必然的にはじめに式ありきの説明となることが予想される。

### 場面2: 個別表現の発表

全体の前で発表をする場面であり、ここでの文法は「～(テープ図による説明)だから(式)になる。」である。従って、テープ図を指示の文脈としながら式に対し、意味づけを行う必要が暗黙的に生じることとなる。『記号と指示の文脈の交換可能性』が示される場



面である。

## 場面2.1:mituの発表

203	mitu	(ノートをスクリーンに投影)
204	mitu	(テープ図左側を指して)さいしよに、27人のってて、 (テープ図右側を指して)後から7人来て、で...
205	mitu	あとから来たお客は、何人か、聞いているから、引き算だと思います。
206	T	mituさんは $34-27=7$ ね。
207	T	34てどこ？
208	mitu	34...えっと...
209	mitu	こっから(テープ図の左端をさして)、ここ(テープ図の右端をさして)。
210	T	そこが34ね。
211	T	ここから(テープ図の左端をさして)、ここ(テープ図の右端をさして)までが34。
212	mitu	うん
213	T	(テープ図の左端をさして)この27って何だったっけ？これ。
214	mitu	最初乗った人数。
215	T	最初乗った人数がこっから(テープ図の左端をさして)、ここ(テープ図の右端をさして)まで。
216	T	じゃ、こっち(テープ図の右側を指して)は？
217	mitu	後から乗った人数。
218	T	乗った人数。だから式は？
219	mitu	$34-27$

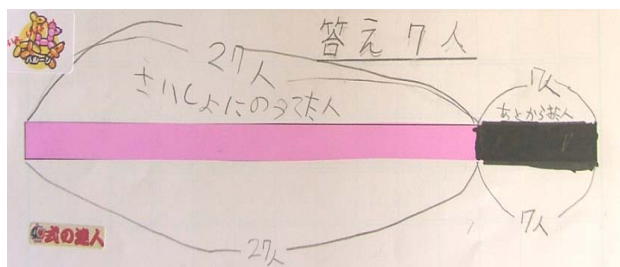


図6:mituのテープ図

$34-27=7$ と立式をした mitu の図には34という数がかかれていないが、『あとからきた人』という言葉はかかれている。教師からの「34てどこ」(プロトコル No.207)の質問に対し若干の間をおいて答えていることから立式をした段階では全体の数をあまり意識していなかったことがうかがえる。

mitu は立式の結果出てきた数、27、7を問題文脈にそうようにテープ図に表したと考えられる。

ここで次のような疑問点が浮かび上がる。mitu のテープ図になぜ34がテープ図にかかれていなかったのか。これについては次のように解釈することができる。これまでの順思考の問題では式の左辺をテープ図に意味づけていけば、右辺にあたる数は自動的に決定していた。しかし、今回の問題のように順思考で立式を行うと左辺に求める数、右辺に明らかな数が来てしまう( $27+?=34$ )こ

とからこれまでとのギャップが生じたのである。mitu は式に対して=をはさみインプット、アウトプットのとらえが強いことから問題文ですでに明らかとなっている34についてはテープ図に表現することをしなかったのである。

mitu が発表の際に説明に用いるのは式ではなくテープ図である。ここでのテープ図は mitu の理解の状況を表しているものであるから mitu の指示の文脈である。発表での教師とのやりとりの中から式にある3つの数に意味づけをあらためておこなっていることから式は記号である。その結果、 $34-27=7$ という立式の根拠が明らかとなり、この問いの構造は mitu に理解されたのである。

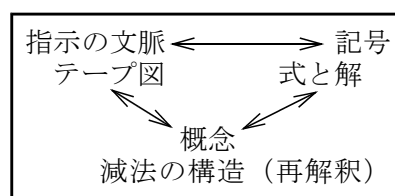


図7:mituの認識論的三角形②

しかし、ここでの教師と mitu とのやりとりは mitu の理解を促すような感が強く、mitu の立式の根拠を明らかにするようなものにはなっていない。最初に mitu 自身が立式の根拠を明確にもっていたかどうかは不明のままである。ここでのやりとりの結果として立式の根拠があらためて確定されたと言える。

## 場面2.2:kazuの発表

kazu は先に述べた問題文の表現「ぜんぶで」を根拠に立式を行った子どもである。

226	kazu	(ノートをスクリーンに投影)
227	kazu	(テープ図左側を指して)最初に27人いて、(テープ図右側を指して)次に34人いて、合わせて53人。
228	T	最初、乗ってたのがこれ(テープ図左側を指す)だって、最初乗ってたのが27人、で後から乗ったのがどこ？
229	kazu	(テープ図右側を指す)
230	T	後から34人乗ったの？
231	yuki	ほほ！
232	mako	あれー？
233	C	は？
234	T	後から乗ったのは34人だったっけ？
235	C	ちがーう。
236	T	後から乗ったのは？何人？何人なの？
237	C	7人。

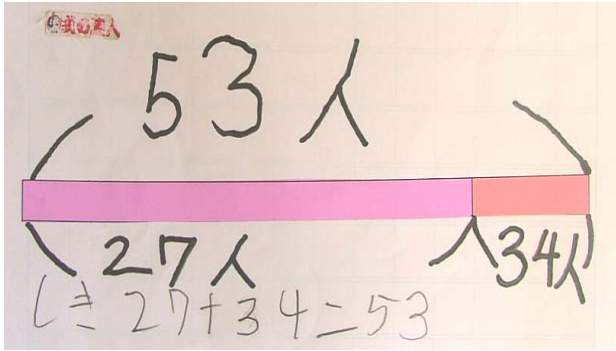


図8:kazuのテープ図

テープ図に表すことでその矛盾が見えてくるはずだが、それに気がつくことはなかった。プロトコル No.227 で「～次に34人いて～」と発言し、教師からの「～後から乗ったのがどこ？」に対してテープ図の右側を指している。このことから34という数に対するとらえそのものが誤っていたということは明らかである。

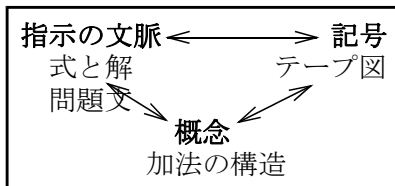


図9:kazuの認識論的三角形

kazu は問いに対して誤った解釈を示しているが、立式とテープ図は整合している。kazu がこの問いをどのようにとらえているかがここで明らかになったのである。しかし、授業ではこのまま、次の発表へ移っており、kazu の発言に対する批判や共感を取りあげていないため、kazu のとらえを他の子ども達が共有する所には至っていない。

### 場面2.3:makoの発表

246	mako	(ノートをスクリーンに投影)
247	mako	はじめに乗っていた人がここ(テープ図左側の左端を指す)からここ(テープ図左側の右端をさす)で...
248	T	最初に乗ってきた人数が27人で、それで?
249	mako	ここが(テープ図右側を指す)、何人乗ってきたかっていうところだから...34-27で...
250	T	で、最後あわせた数は?
251	mako	(テープ図の両端を両手で押さえる。)
252	T	はい。で、式は?
253	mako	34-27
254	T	34から27をひけば、何が出るんだっけ?
255	mako	(テープ図右側を指す)

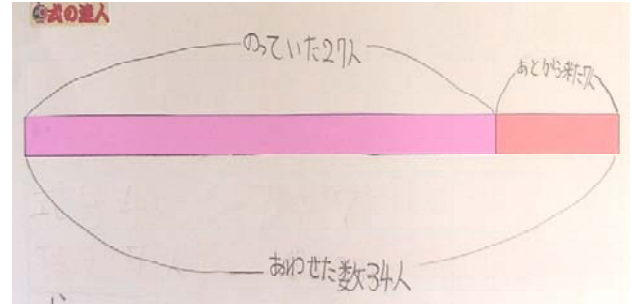


図10:makoのテープ図

mako のテープ図には『のっていた27人』、『あとから来た7人』、『あわせた数34人』とかかれている。テープ図の表現からは関係を正しくとらえていることがうかがえる。プロトコル No.249 の「ここが(テープ図右側を指す)、何人乗ってきたかっていうところだから…」の発言から問われていることが何かをつかめていることも明らかである。テープ図の表現、発表の内容から mako がこの問いを正しくとらえていることがわかる。

mako は問題文を読んだだけで問題の構造を正しくとらえていたものと思われる、それを前提とし認識論的三角形にあてはめてみる。

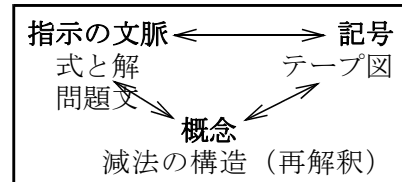


図11:makoの認識論的三角形

mako は立式によって得られた解も含めた部分と全体を指示の文脈としながら、それらをあらためて記号であるテープ図に対し、意味づけを行った。この意味づけにより mako にとってのテープ図は記号から指示の文脈へと移り変わっていくものと推測される。

### 場面3：学級全体での解決をはかる場面

3人の発表を終えた段階で学級全体での解決へと向かう。3人の発表から学級全体としての子どもの理解の状況はおおよそ上記の認識論的三角形にあてはめた3つと考え、子ども達の間でもすでにこれは発表を通して共有されている。これまでの授業の流れからこの段階でのおさえるべきポイントは

- ①部分と全体との関係
- ②テープ図と言葉、数との対応
- ③数と言葉の対応

この3点である。

この後、教師と子どもとのやりとりから2つの部分にあたる『はじめにのっていた人数』『27人』『あとからのってきた人数』『7人』この4つの言葉と数の対応づけをおこない、同様に全体を確定させた。子どもからは『人数ミックス』『合わせた数』『乗っていた人』『乗っている人』と5種類の言葉があげられた。これは子どもの解釈が表現された言葉であるとも受けとられる。

そして、問いとしてたずねられている部分を確定させ、ようやくこの問題の構造がテープ図上で明らかになった。最後に式、答え、テープ図の3つの関係が結びつけられ問題は解決された。

## 6.2. 考察

問題4では、問題場面を自由に図で表すことはせず、テープ図に同じ役割を与えることとした。問題3まで行っていた自由に図をかくという活動は、教師の側から制限付きの指示の文脈を与えていたと見ることもできる。しかし、それさえもなくした今回のような形をとった授業では指示の文脈を子どもがいかにしてつくるか、あるいは選択するかが子どもにとっての大きな鍵であり、教師にとってはそれらを特定することが重要である。

問題4では、記号としての役割を意図して教師がテープ図を子ども達に与えている。これに十分な意味づけが行われることで、テープ図は記号から指示の文脈へと立場の交換が行われ、新たな記号が生まれると共に再解釈を含めた新たな意味づけが行われる。

その際、子どもが見ている図(=教師が見せている図)は何なのかがとても重要である。

例えば、kazuの図を見て「何それ？」と

疑問を思った子どもがいる。

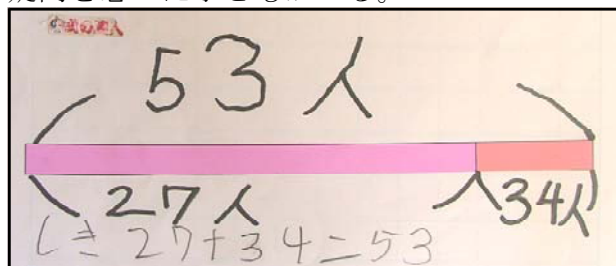


図12:kazuのテープ図

それが学級内で共有された場面である。ここでは kazu の図が新しい対象となっている。ここで kazu が参照しているものは何なのか。これを他の子どもは何を手がかりに批判したり、共感したりしているのか、それが指示の文脈である。他の子どもの発言にうなずけたり、批判できたりする子どもは、その子どもなりの指示の文脈をもっていると考えることができる。教師は、それらを参照することで子どもがどういう意図で表現しているかがわかり次の手を打つことができるのである。

kazu 個人に着目すれば、kazu は問いに対して誤った解釈を示しているが、立式とテープ図は整合している。34という数何を表しているのかを問題文に立ち返らせ、さらにテープ図に対する意味づけを修正することで改善されるものと思われる。

## 7. 成果と課題

今回取り上げた問題では、問題解決の前に問題場面を自由に図で表すことはせず、テープ図に同じ役割を与えることとした。このような形をとった授業では指示の文脈を子どもがいかにしてつくるか、あるいは選択するかが子どもにとっての大きな鍵であり、教師にとってはそれらを特定することが重要である。

また、記号としての役割を意図して教師はテープ図を子ども達に与えている。これに十分な意味づけが行われることで、テープ図は記号から指示の文脈へと立場の交換が行われ、新たな記号が生まれると共に再解釈を含

めた新たな意味づけが行われる。その際、子どもが見ている図（＝教師が見せている図）は何なのかがとても重要である。

上記の授業分析から授業改善へのいくつかの示唆が得られた。

1 点目に図的表現の限界についてである。テープ図それ自身は意味をもっていない記号体系である。子どもがこれに解釈を与えることで増加の加法という意味づけを行っている。逆に言えば、それらの意味づけがなされなければ加法構造であることはつかめても増加という概念の理解には至らないのである。

2 点目に認識論的三角形の有効性についてである。認識論的三角形を授業の視座として用いることの良さは、子どもが何を考えているのかに合わせて、指示の文脈に何を与えるのかを教師の側で特定できることである。しかし、注意しなければならないのは、教師にとって想定する認識論的三角形と、実際に子どもがつくりあげる認識論的三角形との間にはギャップがあるということである。これを前提に、手をうつことが必要である。

子どもが自由にかく図であろうとも、教師の側から与える図であろうとも図的表現を子どもどのようにとらえているかを見極めることで、教師が次にどんな手を打つべきかを決定することができる。それは個人を対象としても、学級全体を対象としても共通である。時には指示の文脈を提示することで子どもの意味の構成を助け、時には記号を焦点化することで問題を明らかにし、意味づける対象を明確にしながら授業を展開することが重要である。

今後の課題として、図的表現の発展性があげられる。今回の授業実践では、問題場면을描写すること、あるいは自らのとらえを表現することを図的表現の役割として期待したため、表現した段階で完結するに終始した。

図的表現それ自体を発展的なものととらえれば、子どもが意味を構成し、概念を拡張して

いく際、図的表現に対する意味づけの変化と表現にも表れてくるはずである。これは指導法の改善へ直結する課題とも言える。

## 8. 引用参考文献

- Gravemeijer,K.(2002).Preamble:From models to modeling.In  
K.Gravemeijer,R.Lehrer,B.van Oers,& L.Verschaffel  
(Eds.),Symbolizing,Modeling and Tool Use in  
Mathematics Education (pp.7-22).Dortrecht,The  
Netherlands:Kluwer Academic Publishers.
- Heinz Steinbring.(2002).What makes a sign a mathematical  
sign?-an epistemological perspective on  
mathematical interaction paper presented at the discussion  
group semiotics in mathematics education research  
PME26 ,Norich,UK,2002.
- 岩崎浩.(1998).「メタ知識」を視点とした授業改善への  
アプローチ～「指示の文脈」と「記号体系」との  
間の相互作用～.全国数学教育学会誌数学教育学研  
究,第4巻.全国数学教育学会.
- 菊池光次.(1996).算数数学の問題解決における図的表  
現の働きに関する研究.上越数学教育研究,第11号  
,pp.51-60.
- 佐伯胖.(1982).教育学大全集16.学力と思考.第一法規.
- 佐々木徹朗.(2006).割り算指導の構成主義的改善.全国  
数学教育学会誌. 数学教育学研究,第12巻,pp.13-21.
- 佐藤学.(2004).習熟度別指導の何が問題か.岩波ブック  
レット,No.612.岩波書店.
- 佐藤学.(2005).「劣化する学校教育をどう改革するか  
上すべりの「学力低下」論はもうやめよう」,『世界  
SEKAI2005.5』, No.739, 岩波書店, pp.110-120.
- 布川和彦.(2000).数学的問題解決における図と情報の  
生成.上越数学教育研究.第15号,pp.9-18.東洋館出版  
社,p21.
- 田中博史著.(2003).使える算数的表現法が育つ授業.東  
洋館出版社.