上越数学教育研究，第 24 号，上越教育大学数学教室，2009 年，pp.21-30.

単位量あたりの大きさの概念形成における記号論的連鎖に関する研究

稲田　直人

上越教育大学大学院修士課程 3 年

1. はじめに

平成 10 年に公示された小学校学習指導要領解説算数編では，異種の 2 つの量の割合の内容について,「異種の二つの量の割合としてとらえられる数量について，その比べ方や表し方を理解し，それを用いることができるようにする」(文部科学省,1999,p.156)ことが明示されている。また，単位量あたりの大きさの指導については,「二つの量の組み合わせによらなければとらえることができない量があることを知らせる」(文部科学省,1999,p.156)ことがねらいとされている。

教科書では，単位量あたりの大きさを理解するために，情景図や表，二重数直線やテープ図，線分図等の様々な表現が利用されている。しかし，それでも割り算で得られた結果が何を表しているか, なぜ割り算をするのか, 異種の 2 量のどちらで割り算をすればよいのか，割合と基準量と比較量にあたるものが何かなど，単位量あたりの大きさの概念を理解するのに伴う難しさは多い。その理解を助けるはずの数直線の意味の理解に困難をきたす子どもも少なくないようである。

そのために，まず，単位量あたりの大きさの単元において，そこに現れる表現がどのようにつながっているのかを吟味していきたい。中原(1995)の表現体系，Saenz-Ludlow(2006)や Presmeg(2006)の記号論的連鎖に着目して，単元に現れる表現の連続性について詳しくみていきたい。その後，表現のつながりに着目して，こみぐあいの問題を教材化した新堀(2000)の研究をベースに，筆者が行った調査における児童の学習過程を記述し，分析を行っていきたい。

本稿は，単位量あたりの大きさの単元において，児童の思考がどのように進むかということを観点にしながら，単元を通して表現が連続的につながっているのかを問い直し，表現を連続的に進めることができるような教材構成や学習過程の改善を目指すものである。単位量あたりの大きさの概念を形成していく上で，どのように表現が連続的に結びつき，最終的に単位量あたりの大きさの概念の理解へと至るのかを探ることを目的とする。

2. 表現と記号論的連鎖について

2.1. 中原の表現体系

中原(1995)は，算数・数学教育の授業における様々な表現様式を現実的表現，操作的表現，図的表現，言語的表現，記号的表現の 5 つに類型化し，それに基づいて表現体系を構築した。

中原の表現体系には, 同じ表現間での変換, 以前のものへもどるプロセスなども想定されている。これらを含めて，表現体系を検討していく必要がある。

2.2. 記号論的連鎖

Ludlow(2006)は，「複数の記号論のシステム（例えば，言語，数学的な記号，ジェスチャー）は，連続的で進化している数学的な意味の解釈を確立することと結合する」(p.183)と述べている。数学の学習は，コミュニケーションを通して，数学的記号の解釈と数学的な意味を相互的に構成していくことであると捉えている。

また，Presmeg(2006)は「記号論の枠組み，記号論の連鎖の使用は，重要な連鎖のプロセスを通して，明白なギャップを越えるための橋渡しの能力を持つ」(p.164)と述べている。その記号論の枠組み，記号論の連鎖のモデルとして Presmeg(2006)は，図 1 のような入れ子式モデルを考えている。そのモデルは「記号内容」と「記号表現」，「解釈項」から成り立っている。記号内容を何らかの形で表現することによって，新たな解釈を生みだす。表現したものを記号表現，生み出される解釈を解釈項とする。また，図 1 でいう記号内容 1，記号表現 1，解釈項 1 を新たな記号内容 2 として，次なる記号表現 2，解釈項 2 を生み出していく。表現することを通して，解釈が進み，表現が段階を重ねて高度になる。そういった表現の連鎖を考えていくのが Presmeg の入れ子式モデルである。

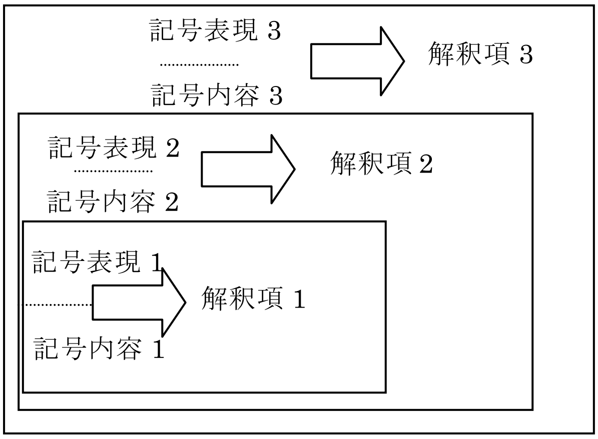

図 1. Presmeg の入れ子式モデル.

3. 先行研究

3.1. 異種の割合について

日野(1997)は，異種の量の除法における数学的表記に着目し，児童の知識構成の様相をまとめている。日野(1997)の研究は，異種の量の割合を理解するためには，比例的推論が重要な鍵であり，児童自身が表記したものへの意味づけを考えることが重要であることを主張している。

筆者は数直線や式に直接焦点をあてるのではなく，問題場面から児童がどのように表現を生成し，意味づけ，表現をつなげていくかを考える。そのプロセスの中で，特に数直線の使用前後のプロセスに着目していきたい。

3.2. 数直線について

白石(2005)は「数直線に比例的な見方を操作することで，比例的推論が促され，その発達した比例的推論を数直線に持ち込み，操作することによって，数直線への比例的な見方をより効果的なものにしていく」(p.166)と述べている。また中村(1996)は，割合や比例関係を数直線で表すことで，同数累加から割合へと広げることができ，小数の乗法の意味づけをすることができることを示唆している。

本稿では，表現の連鎖として二重数直線を使用して，場面から操作を活かしながら，単位量あたりの大きさの概念形成にどのような影響を及ぼすのかを検証していきたい。稲田(2008)で構想した調査の学習過程を実施し，記号論的連鎖の観点から，その過程において表現がどのようにつながっているのかを分析する。そして，単位量あたりの大きさの概念形成に構想した学習過程が有効であるのかを考察していく。

4. インタビュー調査

4.1.インタビュー調査における学習過程の構想

本調査は，表現のつながりに着目して，こみぐあいの問題を教材化した新堀(2000)の研究をベースとした。稲田(2008)の学習過程の

構想は，導入でこみぐあいの学習を行うことにしている。こみぐあいの学習において，枠の教具を利用することで問題の図を均等化する場面を取り入れ，さらに児童が比例的推論を可能にするために均等化する図の下に二重数直線を用意することにした。そして，児童が均等化の活動で操作した図と，人数と面積を記録した二重数直線を結びつけることを考えた。さらに，二重数直線と式を結び付けることにより，こみぐあいの問題を理解することをねらいとした。その後，図を示すことが困難である速さの問題において，児童がこみぐあいの学習で使用した二重数直線を利用して問題を解決していくという学習過程を構想した。

4.2. データ収集と分析の方法

調査は平成 20 年 1 月 15 日から平成 20 年 2 月 7 日までの期間に計 6 時間，新潟県内の公立小学校第 6 学年(3 名，Ishi，Yoshi，Oku)を対象に実施した。調査対象児童 3 名は，単位量あたりの大きさの単元は既習事項である。授業者は,筆者自身である。毎時間の授業は,1 台のビデオカメラと 1 台の IC レコーダーによって記録した。これらの記録をもとに，調査授業分析のための詳細な筆記録(プロトコル)を作成した。本調査は，第 1 時から第 3 時まではこみぐあいの問題，第 4 時はじゃがいもの取れ高と作付面積の問題，第 5 時と第 6 時で速さの問題を行った。

まず，本研究の調査においては，表現がどのようにつながっているのかを記号論的連鎖の観点から分析する。そして，調査の学習過程が単位量あたりの大きさの概念形成に有効であるかを考察していくことにした。

4.3.授業分析

4.3.1. こみぐあいの問題

第 2 時と第 3 時のこみぐあいの問題では，図 2 の図を記載したプリントを与え，3 つのプールではどのプールがこんでいますか？という問題を出題した。面積と人数は，それぞれ A プールは 20 ㎡で 40 人，B プールは 25 ㎡で 45 人, C プールは 20 ㎡で 45 人である。

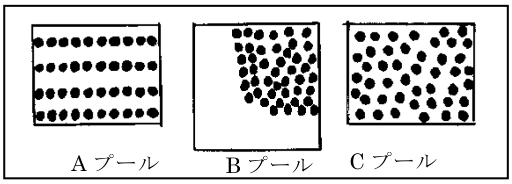

図 2．第 2 時，第 3 時の問題場面の図.

プールの人を均等化しやすくするために，マスのある面積図を用意し，マスのある面積図の下部には二重数直線を記した。第 2 時で，人を均等化する場面において，Ishi は A プールの人を均等化する際に，「(人数)÷(面積)」は 1 ㎡あたりの人数と発言した。その意味の説明や図示はできなかった。

Ishi は 1 マスに 2 人ずつ配置した。その理由を次のように述べた。

T	Ishi はこうやってくれたんだって。40÷20 これって何？
Ishi	40 は人数で、20 は面積。(人数)÷(面積)で。
T	(人数)÷(面積)？
Yoshi	うん。そう。
Ishi	で、1 マスで 2 人と。

均等化の活動で, この「(人数)÷(面積)」の言葉の式が Ishi にとって記号内容となり，人のチップを 1 マスに 2 人ずつ配置した図 3 を記号表現と捉えられる。これらから，1 マスに 2 人ずつ配置することの意味を解釈項と捉えることができる。

図 3. Ishi が均等化した図.

T	じゃあこれさ、B プールこれどう？これ何人？（9 ㎡枠を B プールにあてる。）
Yoshi	なんだったっけ？15だ！
Ishi	15とちょっと。
T	15とちょっと?ちょっとってどれくらいなの?これ?
Yoshi	えーと、ちょっと。

第 3 時において，均等化した図にいくつかの面積の枠をあてはめ，（次項の図 4 に示す）枠の中の人数と枠の大きさを，二重数直線に

記録する活動を行った。Yoshi は B プールの人がおおよそ均等化された図に，筆者が 9 ㎡枠をあてはめたとき，人数を答えることができなかった。

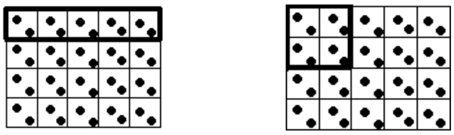

図 4. 枠をマスにあてはめる活動.

筆者が 1 ㎡の枠をマスにあてはめると次のような会話がなされた。

T	これは（1㎡枠をＢプールに）どう？これ何人?
Yoshi	あれ間違っちゃった。反対だ。
Yoshi	１．８！
T	１．８？じゃあ‥
Yoshi	だってそこ（黒板）に書いてあるもん。
T	じゃあこの１．８って。
Yoshi	その１．８！（枠の中にある人数）

Yoshi は，B プールに 1 ㎡枠をあてたときの人数が，「(人数)÷(面積)」の計算結果に基づいていると考えた。Yoshi にとって，記号内容は「(人数)÷(面積)」は 1 ㎡の人数の言葉の式であり，1 ㎡枠を面積図にあてた図が記号表現となり，解釈項は 1 ㎡枠の中のチップのはみだした部分を含めて 1.8 と解釈したものと考えられる。

Yoshi は 1 ㎡枠の人数をもとに B プールに 9 ㎡枠をあてたときの人数について説明した。

T	１６．２。なんで？なんでそうなったの？
Yoshi	掛け算して。
Ishi	その1マスが、そのちっちゃい１つで1．8だから、それが。
Yoshi	それが（1㎡枠）9個分だから。
T	これの9個分？

1 ㎡枠の中の人数を次なる記号内容として，B プールの 9 ㎡枠をあてたときの図を記号表現とし，解釈項は 9 ㎡枠の中には 1 ㎡枠が，9 個分あると解釈したことであると捉られる。児童は枠の中の人数を数え，面積と人数を二重数直線に記録する活動をした。

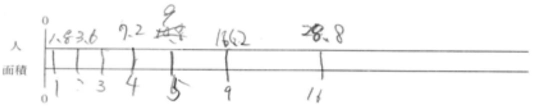

図 5. Yoshi が表記した二重数直線.

図 5 は, Yoshi のかいた二重数直線である。筆者が，二重数直線を見て気づくことはあるかと質問をすると，次のように答えた。

T	枠やってもらったやつ書いていったんだけど、なんか気づくことある？これ（二重数直線）みて。
Ishi	比例。
T	比例？どういうこと、比例って？
Yoshi	倍になれば上も倍になる。
Ishi	うん。そういう。同じ分だけ。
T	倍になる？例えばは？じゃあ。
Ishi	えーと、例えばＢで1から9の、（二重数直線の面積を1から9に動かす）そこになったときに、掛ける9で。

第 3 時において，Ishi は人数と面積を記録した二重数直線を記号内容にして,「例えば B で 1 から 9 の･･･」の指で動かす表現をした。これを記号表現とすると，解釈項は二重数直線から比例の解釈と捉えることができる。また，1 ㎡でこみぐあいを比べることがなぜ便利かを問うと，次の会話がなされた。

T	ここ、5だと比べやすいっていってたね。で、1がなんで便利なの？
Yoshi	なんか一番なんかあれ。
Ishi	基本なんだよ。
Yoshi	だから45÷25だと1のやつがでるから、うん。
Ishi	そうそう。
T	うん。45÷25は。
Yoshi	自然的に1が出るから。
Ishi	なんでも割れる。なんでも割れるから。掛けれるんだよ。うんうん。

Ishi は数値の記録の二重数直線を記号内容として，記号表現として比例の解釈をした二重数直線を表現した。解釈項は，記録した数値のどこでも，何で割っても 1 ㎡あたりの人数を求めていると解釈したことであると考えられる。

4.3.2.速さの問題

児童たちは，速さに関する知識として，距離と時間が関係していることを捉えていた。速さに関する問いに対して言葉の式に依存する発言があった。「道ははじをかけろ」や「みはじ」は，速さを求めるための言葉の式である。（みはじとは,「み」は道のり,「は」は

速さ，「じ」は時間を示している。） これらは，児童が速さの学習も既習であったため発せられたものと考えられる。

筆者は，児童たちがすでに速さが時間と距離に関係あると捉えていると判断し，次の図6に示すような速さの問題を出題した。

〇だれが一番速いでしょう？

人	距離（m）	時間（秒）
A	80	18
B	100	20
C	80	20

図 6. 速さの問題.

この速さの問題を提示したあとの解決における筆者と Ishi の会話を次に示す。

T	え？何？なんか計算したの？
Ishi	秒あたりの、秒あたり進む距離。
T	秒あたり距離？
Ishi	うん。

この場面を見ると，Ishi は秒あたりの進む距離を求めていると発言している。その後，Yoshi と Ishi は，どちらが速いのかを議論していた。その会話を次に示す。

Yoshi	ま、とにかくＡが一番だ。
Ishi	えー？ま、そうだな。え？一番かな。
Yoshi	4.444･･･じゃん。こっち（B）は5じゃん。
T	80÷18 これいくつになったの？
Ishi	そっか。

Ishi は，Yoshi が A のほうが速いと発言するとそれに同意して，「そっか」と発言した。A と B では A のほうが遅い。そのため Ishi は式で求めた値に関して，第 5 時の始めに秒あたり進む距離と発言しているが式の意味の理解が不十分であると考えられる。

筆者が二重数直線をかいて，児童たちの考えた式を説明するように促すと，Ishi が黒板に図 7 の二重数直線をかいて説明した。

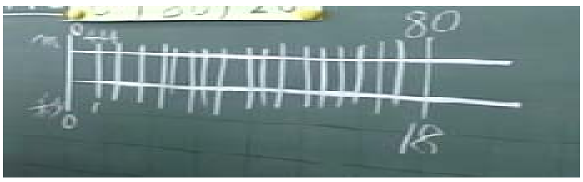

図 7. Ishi がかいた二重数直線.

Ishi は二重数直線上で，棒線の一つ分が式で求めた値の 4.44 になると説明した。図 7 では，棒線が 18 本表記されており，18 秒に合わせて 18 本書いたと考えられる。この棒線の 1 つ目には，秒数が 1 で，距離であるメートルの 4.44 が表記されている。これらから，Ishi は，「80÷18」の説明をした。Yoshi はさらに Ishi のかいた二重数直線に図 8 のような矢印を付加した。

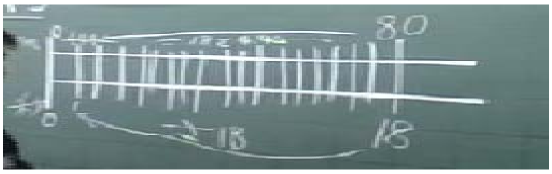

図 8. 児童たちがかいた二重数直線.

この表現は，図的表現である二重数直線に操作的な役割を加えている。このことによって，静的な二重数直線に動的な操作的な要素を持つものへと変容させていると考えられる。Yoshi が Ishi の二重数直線の下に 18 から 1 への矢印と 80 から 4.44 までの矢印と「÷18」を付加した。Yoshi は，この矢印をかいて，「80÷18」について Ishi と同様な式の説明をした。二重数直線を使用した説明において，Yoshi は矢印の表記を書き込んだ。これは，二重数直線の比例関係による式の説明であると考えられる。

筆者は，児童たちに式によって A と B の速さを比べられる二重数直線の場所はないかを質問した。始めに，Ishi がどこの数値でも比べられると発言した。これは，二重数直線の比例関係による説明であると考えられる。さらに筆者が，違う値の式で比べるときは、どのようになるかを問うと，次の会話がなされた。

Yoshi	ま、全部5になるのは分かってる。
T	これを（数直線）を使ってるんだよね。全部5になるの？
Yoshi	上を、上を割れば‥上を下に割れば‥
T	上を、何？
Ishi	距離÷秒にすれば絶対に5になる。

この場面では，Yoshi の「上を下で割れば‥」や「(距離)÷(秒)」にすれば絶対に 5 になるという発言から，内比同士の関係だけで

あった二重数直線に外比の意味を考えることができたのではないかと捉えることができる。Ishi は「(距離)÷(秒)」によって，一定の値である 5 を導いた。筆者は，児童がどこの数値のセットでも一定値の 5 になると気づいたことを確かめることができた。筆者が，導いた 5 の数値の意味について二重数直線における上の値（距離）を下の値（時間）で割ると何を導いているのかを問うと，Ishi は 1 秒あたりに進む距離であると発言した。速さの問題において児童は，二重数直線に内比同士の関係だけではなく，一定値すなわち速さを示す単位量あたりの大きさの式である外比の関係があることも発見することができた。この場面では，児童がこれまでの二重数直線に，さらに，外比の意味づけをすることができた。児童は，第 1 時から第 4 時までのこみぐあいの問題やじゃがいもの問題の学習により，二重数直線の比例の性質を学習していたために，速さの問題を解決するために必要な情報も得ることができたと考えられる。

Ishi は，このとき初めて二重数直線の外比に着目したことで，とまどいを感じていたようである。外比の考えを受け入れることが難しいと考えられるのは，次の場面である。

Ishi	でも、そういうやり方はめんどくさいから、1 が出てる下で 15 だったら、÷15で上もじゃあ、÷15だなってやったほうが‥って一緒か。
T	一緒？
Yoshi	一緒だよ。全部一緒だよ。
Ishi	そのほうが理解しやすいんだよ。
T	これは5になる。こっち（A も）はこっちも同じ？
Oku	同じ。
Ishi	一緒だけど、めんどい、それ。

Ishi は，内比同士の関係で求めた結果と外比の式の結果が同じになるが，外比の式の方が「めんどくさい」と述べている。このことから，児童が二重数直線を外比で捉えにくいと考えられる。逆に，児童は，二重数直線の内比同士の関係の方が捉えやすいようである。そのため，児童は二重数直線の内比同士の関係と外比の関係すなわち単位量あたりの大きさの理解はまだ，十分とは言えない状態であると考えられる。

第 5 時の速さの問題解決の過程においては，まだ，児童が二重数直線を書く姿は見られなかった。そのため児童達にとって，二重数直線は式を説明するための表現であると捉えることができる。

第 6 時の速さの問題を図 9 に示す。

> マラソンのトップランナーは 40km を 2 時間で走ります。この選手が 100m を走ったら，何秒かかりますか？

図 9. 第 6 時の速さの問題.

この問題では，これまでの問題とは異なり，単位量あたりの大きさを求めても直接問題の解決につながらない。そこで児童達は，まず時間の単位と距離の単位を変えなければならないと発言した。マラソン選手が 100m を何秒で走るかという問題から，km をｍに，時間を秒に単位を変えている。筆者が二重数直線を使うことを促すと，Ishi は二重数直線を使うと分かるかもしれないと発言した。筆者は，児童たちが単位量あたりの大きさが既習であるので，秒速や分速，時速について考えるように促した。しかし，分速や秒速は割り切れない数であり，児童たちは困惑していた。筆者は，割り切れる数値はあるかを問うと，次の会話がなされた

T	じゃあ、割り切れるとこはどっかある？
Yoshi	60！
T	60？じゃあ60やってみようか。
Yoshi	え？うん。
T	これ60。
Ishi	そっか。そうだよ。割る2。だから、上も割る2で 20000 だ。

これまでの調査授業で行ってきた二重数直線の上下の数値がセットということを筆者と復習した後，児童たちは割り切れる数値に注目するようになった。すると，次のように割り切れる数値を探すようになった。

Ishi	なら、15もやっちゃえば？
T	うん？15？
Yoshi	一応できるね。
Ishi	やった。10kmきった。

T	15 だといくつ？
Ishi	えーと、5，5，5000。5kmだ。やっと5kmまでいった。よしもうちょいだ。

筆者と児童たちで会話を交わしながら，筆者は児童たちが発言した割り切れる場所を，何箇所か黒板の二重数直線上にかいた。するとIshiは，「分かった」といって，図10に示す二重数直線を黒板にかいた。

図 10.Ishi のかいた二重数直線.

Ishiは分速を求めた二重数直線を手がかりに，100 メートルのときの時間を二重数直線で四角を使って表現した。5000 メートルを走るのに15分かかることを基準として，5000mを割る 50 をして 100mを求め，15 分を割る 50 をして 0.3 分を導いた。Ishiは，二重数直線をかくことや見て考えることで，式を導くことができた。二重数直線上に問題解決となる 100m を作り出している。

Ishi	これは、(5000 は)メートルです。
T	メートルね。
Ishi	100mを求めたいから、ここに(数直線上に)100を作っちゃえと。

このとき，二重数直線はこれまでのような式を説明する表現ではなく，児童たちに問題を解決するために使用された。また，これまでの二重数直線と異なり，単位量あたりの大きさではなく 100 メートルあたりの時間を導くことができている。二重数直線が式を導く手段となり，最終的に図 11 の二重数直線を児童 3 人がプリントにかいて，問題を解決した。

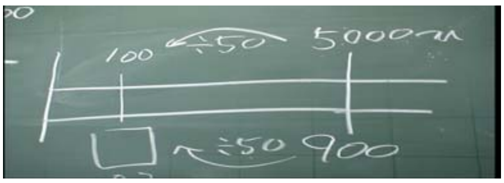

図 11. 児童達がかいた二重数直線.

児童達は，二重数直線を使い外比の関係を意識しながら内比同士の関係によって問題を解決できたと言える。

5. 考察

5.1. こみぐあいの問題

前節において調査授業の分析を述べてきた。分析をもとにPresmeg(2006)の入れ子式モデルに着目し，単位量あたりの大きさの概念形成の過程について考察していく。

こみぐあいの問題では，児童達は次のような理解過程を示した。調査の始めは，「(人数)÷(面積)は 1 ㎡あたりの人数である」という言葉の式に依存していた。人を均等化した図に枠をあてはめる活動を行うことで，1 ㎡あたりに何人いるのかを図で表現し，1 ㎡あたりに何人いるのかを視覚的に解釈した。人数と枠の大きさをいくつか二重数直線に記録することで，二重数直線に比例関係の意味づけをした。児童は，言葉の式を図や二重数直線を介することによって視覚的に意味づけし，式の正当性を確かめていった。児童の理解過程をPresmeg(2006)の入れ子式モデルにあてはめると，次の図 12 のようになる。

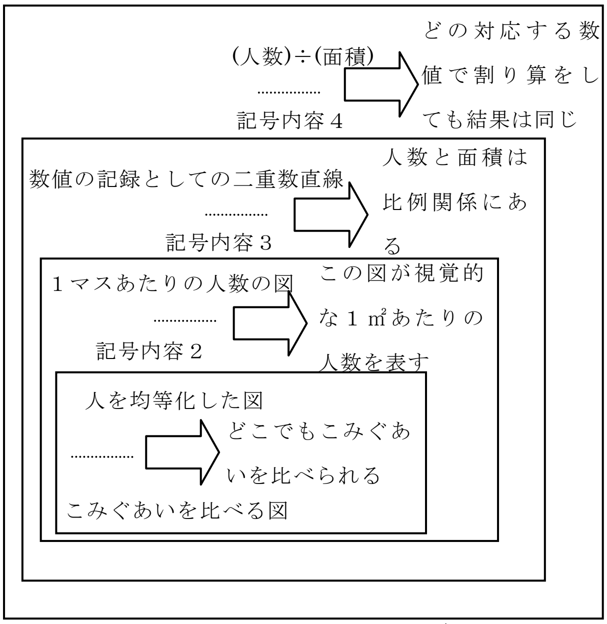

図 12. こみぐあいの問題の理解過程.

単位量あたりの大きさが既習であった児童たちは常に「(人数)÷(面積)」を基にしていた。こみぐあいの問題の入れ子式のモデルは，表面的なものであるとも考えられる。それは，児童が問題解決の始めに「(人数)÷(面積)」の

言葉の式で解決しようとする姿が見られ，その計算によって求めた値の意味について考えようとしていたからである。そのため，入れ子式モデルの背景には「(人数)÷(面積)」があり，式が活動や考えを発展させていくために大きく影響を及ぼしていると考えられる。
つまり，児童たちが「(人数)÷(面積)」の式を念頭に，こみぐあいの問題を考えており，児童の理解過程は式で求めた値について，その意味を面積図や二重数直線で考えていたと捉えることもできる。したがって，こみぐあいの問題については，図 12 のような過程にならない場合があると考える。

こみぐあいの学習において，操作を活かしながら二重数直線を導入することで，児童はただ言葉の式に数値をあてはめて問題を解決する方法から，面積図で表現することや二重数直線に異なる 2 量を表現することなどを通して，式の意味について考え理解することができるようになった。これは，こみぐあいの問題において二重数直線を均等化の活動から表現の連鎖の一部と位置づけることで，数値の記録としての二重数直線から内比の意味を伴った二重数直線へと児童が意味づけを変容していくことができたからであると考えられる。

5.2. 速さの問題

5.2.1. 第 5 時の速さの問題

速さの問題は，図を介して問題を捉えることができないため，これまでの問題のような面積図をイメージすることができない。児童たちは「はじき」や「みはじ」などといって，これまでよりも言葉の式に頼る姿が見られた。そのため，児童は式の意味を考えることよりも，いかにして言葉の式に正確に数値をあてはめることができるかを考えていたと捉える。児童は第 4 時までの学習において，二重数直線を使用して式の意味について考えてきたため，式の説明のときに二重数直線に内比を表現していた。それから，筆者が式で速さを比べることを促すと，二重数直線上で外比の関係に気づくことができていた。その関係をこれまでの内比の関係と整合させ，外比の関係は常に単位量あたりの大きさを求めていることにも気づいた。児童たちに式で比べるという考えを促すことで，二重数直線の意味が内比の関係だけでなく，外比の関係も伴った意味へと拡張されたと考えることができる。しかし，外比の意味を伴った二重数直線を表現することが見られなかったことから，外比の関係は児童にとって困難な考え方であると考えられる。

5.2.2. 第 6 時の速さの問題

第 6 時の速さの問題においては，二重数直線を問題の解決の表現として使用する姿が見られた。単位が異なる問題であるため，児童は二重数直線に数量関係をかくことで異種の量の数値を整理し対応させることができた。また，どのように問題を解決すればよいのかを考え，「時速」や「分速」，「秒速」など既習の知識を考える際に二重数直線を使用していた。しかし，単位量あたりの大きさである「分速」や「秒速」は，割り切れる数値ではなかったため，問題解決が困難であった。この問題の解決過程において，二重数直線は，単位量あたりの大きさを求めるためだけでなく，100 メートルの時の時間を求めるために使用された。児童は，二重数直線上に 100m という値を記入し，そのときの時間を求めれば，問題の解決になることに気づいた。児童は，単位量という考え方にとらわれない 2 量の関係すなわち比例関係を二重数直線に表現することができた。そして，二重数直線を使用することによって問題を解決することができた。このように，二重数直線は，児童にとって速さの問題を解決するためだけではなく，それを操作し表現することによって，単位量あたりの大きさの概念形成にも役立つものと考え

られる。

5.2.3. こみぐあい問題と速さの問題のつながり

二重数直線を単位量あたりの大きさの導入のこみぐあいの問題から使用して，児童に二重数直線の性質について考えさせることで，二重数直線を問題解決のために使用することができるようになったといえる。二重数直線や図の意味づけには言葉による式が基になったようである。それは，児童が均等化の活動や二重数直線の比例関係を見出すときに，言葉の式を基にする姿があったからである。単位量あたりの大きさの概念形成過程において，言葉の式が児童の思考に大きく影響を及ぼしていたものと考えられる。したがって，二重数直線を含んだ表現の連鎖を考える際には，式の意味について考えさせることや図ではどのような意味を持つのかを考えさせることが重要となる。

これらのことから，こみぐあいの問題において二重数直線を導入したことで，問題場面から式までをつなぐために，二重数直線を面積図と式とを媒介するものとして機能させることができたと考える。つまり，まず単位量あたりの大きさの単元の導入問題から，表現の連鎖の一部に二重数直線を位置づけておき，次に，図を介することができない速さの問題においても，二重数直線の機能を活かす場面を設けることによって，単位量あたりの大きさに関する問題解決のために二重数直線を使用することができるようにすることができた。二重数直線によって児童の比例的推論が促された。そして，二重数直線は，児童にとって単位量あたりの大きさの概念形成の手助けになったと言うことができる。

5.2.4. 総合的考察

前節で述べたように，まず児童は均等化の活動と二重数直線を結びつけ，これに比例的な意味づけをすることにより，式が図ではどのような意味を持つのかを理解した。そして，図示の困難な速さの問題においても，二重数直線を操作することにより二重数直線と言葉の式を結びつけることができた。

ここまでに得られた知見は，主に次の 4 つにまとめることができる。

① 教科書の単位量あたりの大きさの単元には，操作的表現が明確には記載されていないため，問題場面から式へとつながる表現にギャップが存在すると考えられる。
② 均等化の活動や比例関係を見出す際に，児童達は言葉の式を基にしていた。単位量あたりの大きさの概念形成過程において，言葉の式が児童の思考に大きく影響を及ぼしていると考えられる。
③ 本稿の調査では，導入問題から二重数直線を用いた。児童は人数と枠の大きさを二重数直線に記録し，二重数直線を操作することにより，2 量の比例関係などに気づき，単位量あたりの大きさの意味の理解につながるものとすることができた。
④ 速さの問題では，二重数直線を用いることにより，児童の比例的推論が可能になった。二重数直線は，問題を解くために有効であり，単位量あたりの大きさの概念形成の手助けとなることが分かった。

6. まとめと今後の課題

単位量あたりの大きさの単元では様々な表現が利用されており，その表現同士がつながっているものであるかに着目して，単位量あたりの大きさの理解について検討きた。

中原(1995)の表現体系には，現実的表現，操作的表現，図的表現，言語的表現，記号的表現の 5 つがある。小学校においては，こみぐあいの問題における人を均等化の図や二重数直線のような表現には，操作的表現か図的表現かという明確な区別は見られない。そこで，このような表現を図的操作的表現ということにする。それらは本来，図的表現に分類

されるものであり，静的な表現として取り扱われている。しかし，児童が人のチップを動かすことや二重数直線の数値を操作することを通して，静的であった図的表現が，動的な操作的表現の役割を果たしていることが確かめられた。また，速さの問題における言葉の式を使う場面において，児童は言葉の式に問題で与えられた数値をあてはめることにより問題を解決する傾向があり，それだけではその式の意味を考えるに至らないことが多い。したがって，言葉の式の意味を考えさせるような操作的活動が必要になる。

このことをPresmeg(2006)の入れ子式のモデルにあてはめて考える。図的表現であり操作的表現でもある二重数直線のような図的操作的表現において，その操作的表現の要素が明らかになり，それが子どもの単位量あたりの大きさの理解に必要であることが確かめられた。また，その図的操作的表現の中の各表現のつながりにおいて，横の矢印で表現された内比から縦の矢印で表現された外比へと進む理解過程の様相も明らかになった。この操作的表現の要素が，図的表現同士をつなぐことができ，単位量あたりの大きさの理解につながるものとなる。つまり，単位量あたりの大きさの概念形成にとって，単に図的表現ではなく図的操作的表現として，特に操作的表現の要素を取り入れる操作活動を児童に行わせることが必要になると考えられる。

以上の分析・考察により本研究の主要な結論を次のようにまとめることができる。

単位量あたりの大きさの概念形成過程において，記号論的連鎖という観点でみると，教科書等の展開においては図的操作的表現の中の特に操作的表現の要素の欠如が問題であることが分かる。言葉の式の意味を考えさせる活動や二重数直線などの操作的表現を促す教材を取り入れることによって，表現と表現のつながりが促され，単位量あたりの大きさの概念形成を確実なものにしていくことができる。

今後の課題は，単位量あたりの大きさの概念形成において，二重数直線や言葉の式以外に操作的表現を促す教材を探ること，そして他の単元においても記号論的連鎖の観点を適用し考察していくことである。

引用文献

日野圭子.(1997). 一人の子どもを通してみた数学的表記の内化の過程の分析―比例的推論との関わりにおいて―(Ⅰ). 日本数学教育学会誌, *79*(2), 2-10.

稲田直人.(2008). 単位量あたりの大きさの概念形成に関する研究. 上越数学教育研究, 23, 93-104.

Saenz-Ludlow,A.(2006). Classroom interpreting games with an illustration. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 183-218.

文部科学省.(1999). 小学校学習指導要領解説算数編. 東洋館出版社.

中原忠男.(1995). 算数・数学教育における構成的アプローチの研究. 聖文社.

中村享史.(1996). 小数の乗法の割合による意味づけ.日本数学教育学会誌,78(10)7-13.

新堀栄.(2000). 数学的道具としての概念形成を目指した教材構成に関する研究―「単位量あたりの大きさ」を例として―. 上越数学教育研究, 15, 61-74.

白石信子.(2005). 子どもの理解に基づいた小数のわりざんの指導について―数直線への比例的な見方を通した意味の拡張―. 上越数学教育研究,20, 153-162.

Presmeg,N.(2006). Semiotics and the "Connections" standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 163-182.