上越数学教育研究，第 24 号，上越教育大学数学教室，2009 年，pp.53-64.

生徒が数学を創る活動を促す場の設定に関する研究

――次関数の単元構成を通して－

大滝　浩之
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

筆者は，中学校の数学の授業を通して身につけた力は，数学の問題を解くためだけの力ではなく，現代社会をより良く生きていくために必要な力であると考えている。しかし，筆者の教職経験や PISA2003，TIMSS2003 の結果からも見られるように，生徒には数学を学習することに対する目的意識が弱い傾向が見られる。

筆者の教職経験を反省的に振り返ったとき関数分野での指導が，形式的なできあがった数学を教える立場をとってきた。しかし，生徒の目的意識を振興させるためには，数学を学習することの「よさ」を感得させ，数学を創り上げる素晴らしさを体験させる必要がある(古藤,1991)。また，関数の考え(中島,1981)は，できあがった関数を教えるという立場ではなく，生徒自身が数学を創り上げる立場である。

「一次関数」の授業を生徒自身が数学を創り上げる指導へと改善するためには一体どうすればよいのか。そのためにはどのような場の設定が有効なのか。これを明らかにすることが本論文の目的である。

２．生徒が数学を創るとは

古藤(1991)は，学校数学における学習に子どもたちが主体的に取り組む能力・態度の育成が何よりも重要であると言う点に関して，次のように述べている。

実際，数学の内容は耳で聞いただけではすぐ忘れてしまうし，目で見ただけでは浅い記憶にしかならない。数学の真の理解は，一人一人の学習者が意欲的に自らの手や頭を動かして取り組むことによって達成されると考えられる。

つまり，生徒が真に理解をするためには，生徒一人一人が，自分自身で試行錯誤をし，目的意識をもって取り組むことが重要であるということである。このための環境を教師がつくっていく必要があると考える。

「生徒が数学を創る」とは，数学の概念や法則，問題解決学習，数学の体系作りの活動で，生徒が自主的に理解することである。数学は生徒にとっては全く新しい未知のものである。したがって，数学をすでにできあがったものとして捉え，教師が一方的に教え込んでいくような指導では十分な学習活動が行えないのである。生徒自身が自ら考え，活動し，数学を創り上げていくような学習指導を行う必要があると考える。

３．生徒が数学を創る活動を促すには

3.1.生徒が数学をわかる過程と教師の役割

Lampert(1990)は「数学活動の結果は演繹的証明によって正当化されている。しかし，この結果は＜数学をわかっていく＞過程を表しているわけではない」と述べている。つまり，数学をわかるためには，教師から知識を注入，伝達するのでなく，数学的活動を通して，自らが考え，数学的な概念を創り出して

いくことが重要であると考える。Lampertは，数学者が行う数学について「仮定は反例という形式で結論を反駁することによって，修正される。この結論の修正と仮定の修正の間のジグザグの歩みが，個々の数学者の仕事の中に生まれ，疑わなかった結論が再吟味されて生じた」と述べ，学校教育においてもこのような指導の重要性を指摘している。生徒が「数学を創る」ことを目指す授業を行うためには，ここでいう「ジグザグの歩み」を授業の中に取り入れていく活動が必要である。

3.2. 単元全体で数学を創ること

従来の算数・数学教育の特徴として，内容が明確な概念やルール，手続きの論理的に完成された体系であること，教材はスモールステップで学習されること，易しい課題から難しい課題へと順に学習し，何回も繰り返し問題を解くこと等があげられる。こうした学習活動が中心となったとき，筆者が幾度となく経験してきたように，「数学を学習するとどんなことに役に立つのか」という生徒からの声を聞くことになるのである。岡崎(2003)は数学教育における全体論の必要性を，生徒が数学を学習することの意義を捉えることを視点として，次のように述べている。

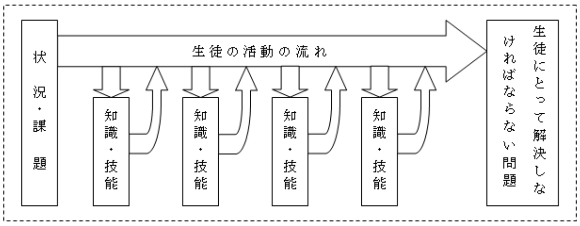
> 全体論は「全体は部分の総和としては認識できず，全体としての原理的把握が必要である」という基本的テーゼを持った思想である。数学授業の中で生徒はしばしば「数学では何をやっているのか分からない」と発言することがあるが，この視座から見ればこれは自然な現象である。すなわち，生徒は全体が見えないことへの不安を述べているのであろう。

つまり，生徒にとって全体が見えることが重要であるということである。筆者は，「結果としての数学」よりも「活動(創造過程)としての数学」を重視する「全体論」に基づく考え方で授業設計を行う必要があると考える。

3.3. 生徒が数学を創る活動を促す場の捉え

筆者は，生徒が数学を創る活動を促すためには，ある課題を解決することを目的に生徒の活動を構成していく過程が必要であると考える。そのためには，生徒にとって自ら数学を創り上げていく場が必要である。それは，生徒にとって解決しなければならない問題が発生する場であり，単元全体を通して知識が活用される場である。単元全体を通して生徒自身で数学を創り上げていくためには，教師が積極的に，問題が発生する場，活用可能な場，アイデアが相互作用する場を設定することが必要であると考える。

筆者は，生徒が数学を創る活動を促す場(図 1)を，「ある状況や課題から生徒にとって解決しなければならない問題へ生徒の活動が流れ，その活動の中から知識・技能などの学習内容が引き出され，さらに新たな知識・技能が活動の中に取り入れられながら進む過程」と捉える。



(図 1) 生徒が数学を創る活動を促す場

4．一次関数において生徒が数学を創る活動

4.1. 中島の「関数の考え」

中学校の関数指導では，ともなって変わる 2 つの数量の関係を表，グラフ，式で表し，その特徴を考察すること，あるいはそれらの相互の変換が重要視されている。表，グラフ，式はともなって変わる 2 つの数量の関係を表し，それぞれに表現の良さを持っている。しかし，生徒が数学を創るという立場に立ったときには，その前段階の 2 つの数量を関係づけるという見方に至るまでの過程が生徒自身によってなされなければならない。

中島(1981)は「関数の考え」について，次

のように述べている。

一つの数量を調べようとするときに，それと関係の深い数量をとらえ，それらの数量との間に成り立つ関係を明らかにし，その関係を利用しようとする考えが，関数の考えの基本である。

ここに述べられているように「一つの数量を調べようとするときに，それと関係の深い数量でとらえる」という視点を生徒自身が顕在化していく必要がある。さらに生徒自身が意識的に使用していくことが大切である。事象から関数関係を見いだしていくためには，生徒自身がこの「関数の考え」を使って 2 つの数量を関係づけてみる必要がある。このような過程を経てはじめて生徒は，ともなって変わるかどうか，どのような関係があるかということを考察できると考える。

また，中島は「関数の考え」の基盤として，次のように述べている。

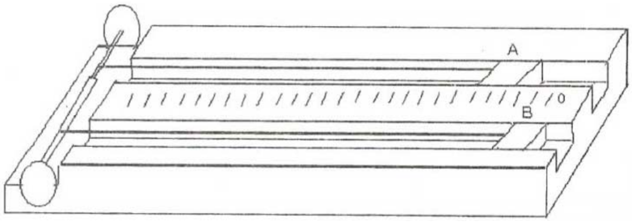
たとえば，「新しく考察の対象としている未確定の，または複雑なことがら(これを y として)を，よくわかった，または，コントロールしやすいことがら(x)をもとにして，簡単に捉えることができないか。このために，何を(変数 x)として用いたらよいか。また，そのときに，対応のきまり(法則)f はどんなになるか」というような考えに立つことが，「関数の考え」の基盤として考えられる。

このことは，コントロールする変数を自ら設定し，2 つの数量を関連づけたとき，はじめて生徒自身が数量間の関係を考察しようということになると考える。そしてこの考え方が，生徒が数学を創る活動に繋がると考える。

4.2. 一次関数指導において生徒が数学を創る活動を促す教具

生徒が変数を見いだし，変数間の関係を構成していくために，生徒が活動する場面や活動する中で変数を見つけ出す場面，2 つの数量の関係を調べていく場面を設定していく必要がある。この観点から一次関数を取り上げた研究として，桐山(1999)，林(2001)，高橋(2002)の教授実験に基づく研究を参考にした。これらの研究では，生徒が何に着目し，着目した 2 つの数量間の関係を見ていくために，教具として Greeno(1991)の一次関数装置が用いられている。

Greeno の一次関数装置(図 2)は，ハンドルが回り，それによって連結している 2 つの軸が回る。その軸の回転により 2 つのブロックが動く。3 つの軸を準備し，その比率は 1：1.5：2 である。ハンドルを回転させると 1 回転ごとに音が生じる。ブロックの出発位置は自由に変えることができる。細い軸のブロックを A，太い軸のブロックを B とする。目盛りは 0～35 までである。y をブロックの位置，x を回転数，a を軸が 1 回転するときに進む目盛りの数，b をブロックの出発位置とすると，一次関数：$y=ax+b$ が得られる(桐山,1999)。

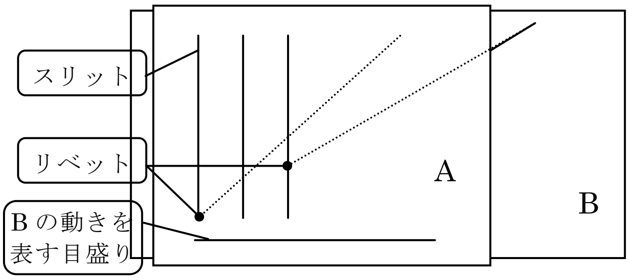


(図 2)Greeno の一次関数装置

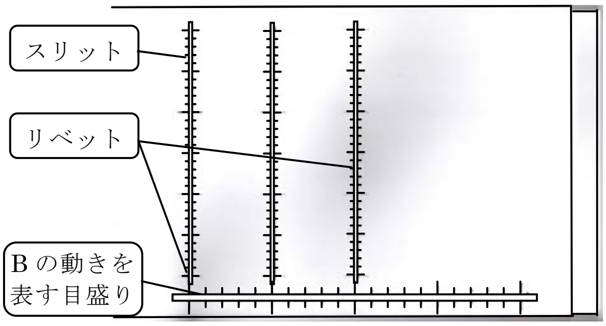
Greeno の一次関数装置は，多くの変数を持ち，事象の動きを捉える独立変数を複数持っていることや，生徒が必要に応じて繰り返しブロックを動かして，事象と関わりをもつことができるなどの特徴を持っている。他にも，ブロックの動きが一次関数で捉えられること，ブロックの動きを図に示すという解決方法が可能であること，繰り返しブロックを動かすことで，軸の太さがブロックの動きを制御していることに気づきやすいこともその特徴の一つである。

今回の教授実践では，1 時間の授業の中ばかりではなく，単元全体を通して生徒が活動をしながら数学を創っていくことを目指している。そこで，活動の中で生徒が表，グラフ，式から事象に戻ることができるようにするた

めに，つねに生徒の手元にあるような教具が必要と考える。また，学習を進める中で，生徒が様々な関数を体験して，一次関数の特徴をより的確に捉えることができるように，任意の関数が表現できる装置が必要であると考える。そこで，Greeno の装置を参考にした独自の装置(簡易式関数探求装置)を用いることとした(図 3，図 4)。



(図 3)簡易式関数探求装置



(図 4)簡易式関数探求装置(実物スキャン)

簡易式関数探求装置は，封筒状の台紙 A に自由にスライドさせることができる紙 B を通してある。A には 3 本のスリット(切れ目)が縦方向に入っており，0～30 の目盛りがついている。B にもスリットが入っている。A と B のスリットを 2 つのリベット(留め具)で連結しており，B を左右に動かすことにより，2 つの点(リベット)がそれぞれ上下に移動するようになっている。B のスリットの形状と A のスリットの位置により，任意の 2 つの関数を作り出すことができる。

Greeno の装置は回転数でブロックの位置を捉える仕組みであるが，この装置は B の動きで点の位置をとらえることになる。

4.3. 一次関数の授業設計

筆者は，2 年生での一次関数の単元全体を通した指導を通して「生徒が数学を創る」という観点から授業を設計した。

関数指導において生徒が数学を創る活動は，中島(1981)の「関数の考え」に基づくものだと考える。つまり，生徒自らが考察の対象からコントロールしやすいことがらを見つけ，変数間の対応の法則を見つけ出すことが大切である。そこで筆者は，生徒自身が事象を分析することで授業あるいは単元全体を構成していく立場をとる。

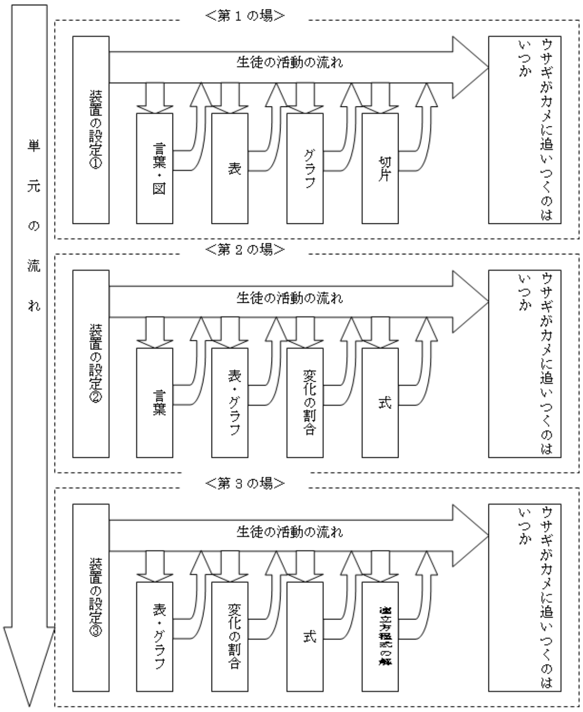
事象を分析することで単元の学習内容を生徒から引き出すためには，生徒が積極的に問題解決をしたいと思うような場を教師が準備する必要がある。具体的には，桐山，林，高橋が課題としたウサギとカメの競争という場面を簡易式関数探求装置により提示する。そこでは「ウサギはカメにいつ追いつくか」を主な課題とする。

この課題は一般的に一次関数の単元で実施される最後の問題である。教師の立場でいえば，「いつ追いつくか」ということを知るためには，グラフの交点が必要になってくる。また，グラフの交点を求めるためには，連立方程式が必要であり，そのためには事象を式化する必要が生じる。そして，事象を式化するために，表やグラフが必要になってくるのである。つまり，この課題を解決することによって，表，グラフ，式が生徒にとって学習しなればならない内容になってくるのである。ただし，できあがった数学を知らない立場の生徒には，教師が考えるこのような発想は持っていない。そこで，教師は生徒にとって分析しやすい状況や値を，生徒が数学を創る場としていくつか準備していく必要がある。

はじめに生徒に提示する場では，装置の範囲内で解決できる「藪を抜けるのはどちらが先か」という問題，装置の範囲を超える「追いつくのはいつか」という問題を準備する。これらの問題を解決していく中で，事象から変数を取り出すこと，また取り出した変数の

関係を言葉や図，表，グラフ，式に表すことを目指す。

装置で表される一つの状況では，単元全体の学習内容をすべて引き出すことは困難である。そこで，装置の設定を変え，いくつかの場を生徒に提示していく中で，単元全体の学習内容を引き出していく(図 5)。



(図 5) 単元構成のイメージ

5. 教授実験

5.1. データの収集方法

教授実験は，上越市内の公立中学校で 2 年生 1 クラス 33 人を対象に，平成 20 年 1 月 15 日から 2 月 29 日にかけて，筆者が授業者となり，計 19 時間実施した。毎時間の授業は，授業全体の流れを把握するためのビデオカメラ 1 台，個々の生徒の活動を記録するためのビデオカメラ 2 台によって記録した。また，授業終了時に授業の感想を記入するアンケート用紙を配布し，ワークシートのコピーとともに記録として残した。

5.2. 単元全体の概要

19 回の教授実験で行われた内容の概要は次の表 1 の通りである。なお，場の名称については筆者が指導内容に基づき，後から設定したものである。

(表 1)単元全体の概要

回	日時	主な学習内容
第 1 の場　事象から，表，グラフ，式を求める場		
1	1 月 15 日	事象(装置)を操作し，数値(変数)を取り出す
2	1 月 17 日	変数を表に表す
3	1 月 18 日	表からグラフを書く
4	1 月 22 日	独立変数を意識する 独立変数から従属変数を求める
5	1 月 23 日	グラフを読む 表からグラフを書く
6	1 月 24 日	グラフを様々に読む
7	1 月 29 日	表から式を求める 連立方程式にする
8	1 月 31 日	連立方程式の解とグラフの交点を比較する
第 2 の場　変化の割合を意識する場		
9	2 月 5 日	装置から表，グラフを書く
10	2 月 6 日	表，グラフから速さを求める
11	2 月 7 日	変化の割合の理解を深める
第 3 の場　表，グラフ，式の結びつきが強まる場		
12	2 月 13 日	装置から表，グラフ，式を書く
13	2 月 14 日	式の必要性を感じる 変化の割合利用して式をつくる
14	2 月 15 日	グラフから式をつくる 式からグラフをつくる
その他の問題場面，課題		
15	2 月 19 日	傾きと 1 点の座標から直線の式を求める
16	2 月 20 日	2 点の座標から式を求める
17	2 月 21 日	折れ曲がったグラフ
18	2 月 22 日	一次関数と 2 元 1 次方程式
19	2 月 29 日	動点問題

5.3. 第 1 の場の概要と分析

第 1 の場における簡易式関数探求装置の

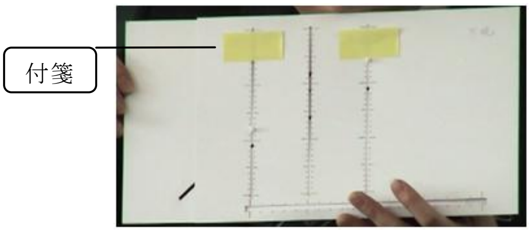
設定はウサギ：$y=2x$，カメ：$y=x+18$である。

5.3.1. 装置から変数を取り出す

第 1 時では，生徒が教具に慣れることと，装置から読み取れる事象の状況を把握することを目標とし，全員に装置を配布し，次のような問題を示した。

問題 1　装置の目盛り 24 から 30 までのところが藪になっているとします。藪を先に抜けるのは，ウサギとカメのどちらでしょうか。答だけでなく，考え方がわかるように詳しく書いて説明してください。

この問題では，装置の藪の部分に付箋が貼り付けられており，装置がそれ以上動かないようになっている(図 6)。



(図 6)装置

初め生徒は問題が「藪を先に抜けるのは」というものだったため，直感的にウサギやカメと答えていたが，装置には藪に当たる部分に付箋が貼り付けられているためにその答えを確認できなかった。そこで，生徒は装置を繰り返し操作することにより，何かしら気がついたことを記録し始めた。Hika のように装置を操作する中で「加速力」というようなウサギとカメの速度の違いを言葉に表した生徒もいた。

大部分の生徒が気がついたことは，「ウサギが 2 進むとカメが 1 進む」という速度の違いと，「ウサギが 0 地点でカメが 18 地点」というスタートの位置の違いについてであった。しかし，大半の生徒はそれ以上のことをどのように表現していいかが分からず行き詰まった。そこで，教師はこの 2 つの事柄を根拠に生徒に考察するように，ヒントとして Nozo が記述した表(図 7)を黒板に書かせた。

(図 7)Nozo の表

その様子から何人かの生徒は，表，言葉，式，図を用いて改めて装置の動きの様子を観察することができた。

発表ではまず Dai が言葉での説明を行った。Dai の考えはウサギとカメの速度の違いとゴール(30)までの残りの距離をもとに計算を行って結果を求めたものである。

次に Nozo の表を取り上げ，どのように考えたのかを発表させた。Nozo は装置が藪の手前で止まるが，表に表すことによって装置では表せない範囲を数値で表している。教師がこの点について Nozo に聞いたところ，「今までがそうだったから」と答えた。

授業の最後に装置の付箋(藪の部分)を取り外し，各自の予想が正しかったかを確認させた。生徒は自分の考えが正しいかを，各自で装置を何回も繰り返し操作することにより確認した。

5.3.2. 事象から取り出した変数から動きを表現する

第 2 時では，第 1 時よりも容易に答を導き出せない問題を提示した。

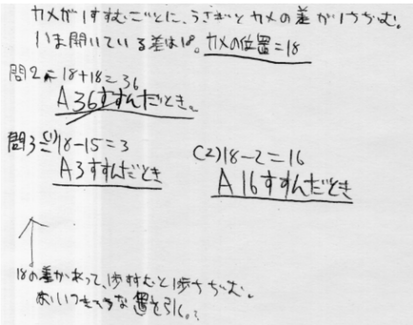
問題 2　ウサギがカメに追いつくのはいつでしょうか。 問題 3　ウサギがカメに追いつきそうになる差が次のときはいつでしょうか。 (1)差が 15　(2)差が 2 途中の様子が分かるように説明をしてください（実況中継？）。

生徒は前時に，装置ではウサギがカメに追いつかないことを認識しているが，それよりも先の段階ではウサギがカメに追いつくとい

うこと表や直感から予測している。また「どの地点で追いつくのか」を知りたいという気持ちが生まれている。

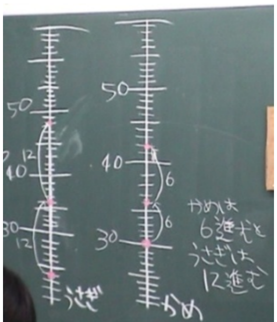
教師は課題プリントを配布した後，独立変数として装置の B の動き(下の目盛り)を意識させようと，「いつ」という表現をどのように表せばいいのかを生徒に聞いている。しかし，生徒は教師の問いかけの意味が理解できない様子が見られた。

大半の生徒は装置を操作しながら，ウサギとカメの位置を対応させ表を作っていった。また，Riku はウサギとカメが 1 歩進むごとに差が 1 マス縮まることに気がつき，カメのスタート地点から求めたい差を引くことにより計算で結果を導いている(図 8)。

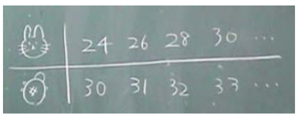


(図 8)Riku の計算

思考が行き詰まっている生徒もいたため教師は他の生徒の考えを共有しようと，Hono と Mei の記述を黒板に書くように指示する(図 9，図 10)。このとき Hono の記述は，装置の縦の目盛りをそのまま図示したものであり，装置の範囲以上のところまで延長して考察している。また Mei の表も装置の範囲以上を表したものである。



(図 9)Hono の図



(うさぎ)	24	26	28	30	…
(かめ)	30	31	32	33	…

(図 10)Mei の表

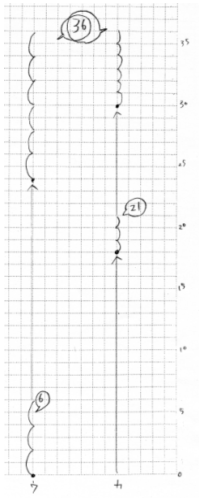
教師は授業の中で「いつ」という言葉を出し，それをどのように表現するのかを問い，独立変数になるべき装置の下の目盛りを意識させようとした。しかし，学習プリントに見る「いつ」の表現は，「ウサギ〇マス，カメ〇マスのとき」というようにそれぞれの位置で表されているものが大半であった。

5.3.3. 教師による独立変数の意識付け

第 3 時には，第 2 時でそれぞれの生徒が考えた表を全体で確認し，そこからグラフを作る作業を行った。

問題４　ウサギとカメの動きの様子を表とグラフで表してみましょう。横と縦の項目を自分で決めて，いろいろな表やグラフを作りましょう。

生徒は Ai の図(図 11)の括弧で表された部分から，暗黙的に何かが 1 つ変わるとウサギが 2 目盛り，カメが 1 目盛り移動することは認識している。しかし，それが何かがはっきりとは分かっていない。そこで，教師と ST とで Ai の図の括弧の意味になるように黒板で実演する。このとき ST は「ぴょん」という表現を用いて独立変数として意識させようとする。



(図 11)Ai の図

さらに，この「ぴょん」がウサギとカメの位置を決定していることを認識させるために，「ぴょん」の回数からウサギ，カメの位置を決定する練習を行った。どの生徒も「ぴょん」

の回数からそれぞれの位置を速やかに導き出すことができた。

ST：じゃ，いきまーす。ぴょん，ぴょん，ぴょん。

T ：何回言った？3 回言った。さあ，ウサギはどの地点にいるでしょうか？

生徒：6。

T ：6。ぴょん，ぴょん，ぴょんだと 6 にいるんだって。じゃあもうちょっと。カメいこうか。はい。18 に今いるんだよ。いい？

ST：いきまーす。ぴょん，ぴょん，ぴょん，ぴょん，ぴょん。

T ：カメは，これでどの地点まできたでしょうか？

Rika：23。

教師はグラフにこの「ぴょん」が表されるものと予想し，生徒にグラフを描かせることとした。このとき，教師は生徒が自ら「ぴょん」を x 軸と取ることに期待し，あえて x 軸，y 軸を何にするのかを説明していない。

3 名の生徒に黒板にグラフを記入したところ，横軸－縦軸をそれぞれ次のようにとったグラフが出された(図 12)。

a：ウサギの位置－カメの位置

b：ウサギの位置－差

c：ウサギの移動量(位置)－カメの移動量

a　　　b　　　c

(図 12)グラフ

この段階では，生徒にとって独立変数は明確に意識されていない。生徒の考えは，ウサギの位置とカメの位置の関係，ウサギの位置とウサギとカメの差，ウサギの位置とカメの動いた量といったとらえ方であった。

第 4 時には，第 3 時で導き出されたそれぞれのグラフの有用性を話し合った。そこで事象をとらえる見方を，ウサギとカメの関係をとらえる見方から，別のものでウサギとカメをそれぞれとらえる見方への変換をおこなった。装置を左に動かすと点が上へ移動するということから，装置の動きを独立変数としてとらえ，これを「ぴょん数」と言い表すこととし，独立変数が意識された。

5.4. 第 2 の場の概要と分析

ここまでの学習で，表，グラフ，式が導き出せたことで，y＝ax+b の a,b が正の範囲では一通りの学習内容を引き出すことができた。ただ，式については，生徒の理解が浅い。特に変化の割合という概念はまだ理解していない。そこで，装置の設定を変え，変化の割合を意識しやすい状況を作り出す。

第 2 の場での装置の設定は

ウサギ：$y=\frac{1}{16}x^2$，カメ：$y=\frac{1}{2}x+12$ である。

5.4.1. 変化の割合が一定でない関数を考察する

第 9 時には，新しい設定で装置を配布し，次の問題を行った。

問題 5　装置で，ウサギとカメが競争しています。この様子を，表とグラフで表しましょう。

生徒は装置を操作しながら，横の目盛りを独立変数(ぴょん数)として捉え，表とグラフの作成をスムーズに行った。

Jun は装置の操作から，はじめにカメの位置をぴょんの数に対応させて表に 8 から 0.5 ずつ増えるように記入した。その後，ウサギについてぴょんの数が 0 から 2 までは 0 と記入し，ぴょんの数が 3 からは 0.5，1，1.5，…，と 0.5 ずつ増加するように表を完成させた。

Sho：どっかから，狂った。

Jun：これ適当に入れたら，失敗。

Sho：ちょっと待てや。

Jun：これ適当に 0.5 ばっか書いてったらだめなんだな。

T ：そうそう。

Jun：やらんたよー。

Jun はとなりの Sho の発言から，自分自身の誤りに気がつき，装置を確認しながら数値を書き換えていった。装置を用いずに表を完成させた他の生徒にも同様の誤りが見られた。

その後班ごとに気がついたことを述べた。

Masa：ウサギがカメにハンディをやった。

Sato：カメが，ぴょんの数 1 で 0.5 進む。

Riku：ウサギは 2 までは 0 歩だが・・・

T　：どこまで？

Riku：2 まで。

Riku：3 からは加速していき・・・

Riku：そこから先は 3 ぴょんごとに 0.5 づつ・・・

Riku：1 ぴょん分の進む数が上がっている。

Jun：だから 0.5 ずつ 0.5，1，1.5 ってやると・・・

Jun：あとで，痛い目にあう。

Rika：ぴょんの数が 17 で・・・

Rika：ウサギがカメを追い越す。

Ichi：装置が 17 までしかいかなかった。

Masa：ウサギは 16 で追いつく。

Sato：ウサギはぴょんの数が 2 までは全く動かない。

Ko　：ウサギはスピードアップしている。

Dai：ウサギが最後に本気になった。

このように生徒は装置のウサギの動きからその速度の変化について気がついた。

5.4.2 変化の割合を意識する

第 10 時には，前時のウサギの速度の変化についての考察をグラフとの比較を通して行った。

Ichi：カメは規則正しく進んでいてウサギは不規則。

Rika：カメは規則正しく進んでいるから直線になり，

Rika：ウサギは不規則だから曲線になる。

Sho：カメは一定だけど，ウサギは急にグニャッてなる。

T　：カメは一定だけど，ウサギは・・・

Jun：グニャッ

Megu：カメは一定の速度で進んでいる。

T　：カメは一定の，こんな言葉が出ました。速度って言葉が出ました。一定の速度で進んでいる。ウサギは？一定なのか一定でないのか？

Megu：一定でない。

Masa：ウサギは最初遅いが，途中で速くなる。カメは最初から最後まで速さが一定。

教師はここで「速さ」という言葉に注目し，速さを求める公式はどのようなものだったかを問う。Rika が「道のり割る時間」と答えたことから，この装置の場合の「道のり」「時間」がそれぞれ何で表されているかを生徒に問うが，生徒は答えることができなかった。教師は「ぴょんの数が時間」であり，「装置の点の移動量が道のり」であることを説明し，この「速さ」をもとに変化の割合の意味づけを行った。

5.5. 第 3 の場の概要と分析

第 3 の場では，装置の設定をウサギ：$y=-2x+24$，カメ：$y=0.5x$として，式でなければ問題解決できないような状況を作り出した。そこでは，ウサギとカメの競争というこれまでと同じような問題設定を行ったが，グラフでのウサギとカメの交点を整数値では無い。さらにウサギが戻ってくるような状況にし，負の一次関数も扱うものとした。

問題 6　装置で，ウサギとカメが競争しています。この様子を，表とグラフで表しましょう。

教師はウサギが下方向に移動していることを装置で確認する。また，プリントの問題の他に「ウサギとカメがどこで出会うかを求めなさい」という問題を提示した。生徒は装置を断続的に動かしながら表に数値を記入していく。また表を見てグラフに点を打つところまではほとんどの生徒が速やかに行っていた。

教師が「どこでウサギとカメが出会うか」と問うと，生徒は表やグラフからは答えることはできなかった。授業後の感想用紙には

「表やグラフでは分からないこともある」と記述されていた。このことから全体で式を作る方法を考察することとした。

6．考察

6.1. 装置から変数を取り出す

初めに生徒に装置を与え，「ウサギとカメのどちらが先に藪を抜けるか」という課題を行った。そこで生徒は，「ウサギがカメより速い」や「差が縮んでいく」といった表現をした。このことから，生徒が装置の動きの様子からウサギとカメの動く速さの違いに気がついていくことが分かる。

さらに生徒は「どちらが先に藪を抜けるのか」を考察していくが，初めは直感的な判断で，「ウサギが先」「カメが先」というように発言している。ここでは装置には藪として付箋が貼り付けられており，藪(付箋)の手前で止まるようになっているため，生徒にとって問題を解決しようという意欲が生じていると考えられる。

次第に生徒は装置を動かし，止めるという断続的な操作から，「ウサギが 2 進むと，カメが 1 進む」という事柄に気がつき始める。生徒は直感では結果が導き出せないことから，装置の動きを数値を使って表さなければならない状況になったことが分かる。

さらに，「ウサギが 0 地点，カメが 18 地点からスタートする」という事柄を記録していくが，これは藪を抜ける位置までの残りの距離を知る必要が生じたものと考えられる。

この段階までは教師の支援なしに，生徒自らが装置から導き出した事柄である。このように，装置の設定と問題を生徒にとっては直感で判断できないようにすることで，生徒が自ら事象(装置)から変数を取り出す活動が行われることが分かった。

6.2. 事象から取り出した変数から動きを表現する

「藪を先に抜けるのは」という問題から，一部の生徒からは，装置から気がついた事柄を言葉と式による表現，図，表で表そうという考え方が生じた。しかし，この課題だけでは結果がでたところで思考が止まってしまう生徒が大半となった。生徒にとっての関心事は「どちらが先に抜けるか」ということであることが分かる。

教師は「いつ追いつくか」「差が○になるのはいつか」という問題を出し，「途中の様子が分かるように」ということを示したが，この「途中の様子」という教師の表現から，図や表で事象を表そうという生徒が増加してきたものと考える。また，「藪を抜けるのは」「いつ追いつくか」「差が○になるのはいつか」といった問題は，それぞれ 1 つの問題では，事象を図や表で表さなくとも，答えが導けてしまうものであるが，複数の問題を生徒に課すことにより，途中の様子を図や表での手段で表す必要性が生じたと考えられる。

6.3. 独立変数を意識する

第 1，2 時において生徒が作成した表は，ウサギとカメの対応を表したもの，その対応とともに差を表したものなど教師が出題した問題のみを解決するためのものであった。これではウサギとカメの動きをコントロールしている装置の下の目盛り(教師が独立変数としようとしているもの)が意識されていない。ここまでの問題では，ウサギとカメの対応を表した表が生徒にとって問題解決に必要な表現であり，独立変数として下の目盛りを意識させるには不十分であることが分かる。

教師は独立変数を意識させようと，ウサギとカメが進む様子をブロックを用いた図と括弧を用いた図で，ブロック 1 つ分あるいは括弧 1 つ分を「ぴょん」という表現で表した。この表現が教室で共有された後，全体でグラフ描くことを行うこととした。ここで生徒が描いたグラフでは，教師の意図とは異なり，ウサギの位置とカメの位置の関係，ウサ

ギの位置と差の関係，ウサギの移動量とカメの移動量という「ぴょん」を意識しないものが大半であった。生徒が独立変数として意識したものはウサギの位置(移動量)であり，これによりカメの動きを捉えていることが分かる。これは，初めの問題が「藪を抜けるのは」「いつ追いつくか」「差が〇になるのはいつか」というものであり，独立変数として「ぴょん」を意識する必要のないものであるからだと考えられる。教師は「ぴょん」を独立変数にすることにより，事象を様々に分析することに役立つということを知っているが，生徒にとってそれは未知のことである。ここに生徒の考えと教師の考えにズレが生じた。

ここまでの装置の設定や問題では，ウサギとカメの 2 つの動きが生徒に強く意識されているため，生徒が自身の考えで表やグラフをつくるときに，何がウサギやカメの動きを制御しているのかが認識されづらいということが分かった。また，このことは簡易式関数探求装置は Greeno の装置でハンドルを回したときのように音が生じないということも原因であると考えられる。

6.4. 変化の割合を考察する

第 2 の場で，生徒は装置から，表，グラフ，式をつくる活動を行う中で，まず装置の動きの様子から，ウサギの動きが「速くなっている」ということに気がついた。しかし，Jun をはじめ半数近くの生徒が実際に表を書く段階で，最初の動きのパターンから一定の割合で増加させて数値を入れていくという誤りをした。このことから「速くなる」ことと「速い」ことの区別がついていない生徒がいることが分かる。また，第 1 の場で表，グラフと学習を進めていく中で，生徒の思考が事象から離れていったことが分かる。

生徒は自ら作成した表と装置とを比較することにより自らの誤りに気がつくことができた。これは手元にある装置により確認できることが，生徒による気づきを生じさせたものと考えられる。

表やグラフを完成させた生徒から，ウサギの動きの様子について「不規則」「1 ぴょんあたりの進む数が増えている」「グラフは曲線になる」という発言を得た。このことから一次関数でない関数を扱ったことで，「独立変数 1 あたり」という変化の割合を捉える考え方が生じたと考えられる。また，このことが，ウサギの速さ(変化の割合)とグラフの傾きの関係を結びつけることに繋がったと考えられる。

6.5. 3つの場により単元全体を構成する

第 3 の場で，教師は「どこでウサギとカメが出会うか」という質問を生徒にしたが，この疑問は教師から出さなくとも，ここまでの活動で生徒から自然に出てきた。また，個々の生徒が装置を操作することにより，表やグラフを速やかに作ることができた。これは，第 1 の場と第 2 の場で繰り返し同様の活動を行ったために生じた結果だと考えられる。

生徒は表やグラフを作ったが，これでは求めることができない。そこでどうするかと生徒に問うと，「連立方程式」という考え方が出された。このように生徒から連立方程式の考え方が自然と出されたのは，ウサギとカメの動きをグラフで表すと，その交点は分数(小数)値になるように意図してあるためである。このような装置の設定が生徒にとって式の必要性を感じさせることが分かる。また，教師が主導ではあったが，第 1 の場で連立方程式を扱っていることによることも影響していると考えられる。

それぞれ単独の場では，生徒から引き出すことができる数学的知識は限られたものになっていた。しかし，装置を個々の生徒に配布し，そこから「どこで追いつくか」という問題を複数の場を通して解決していく中で，生

徒から表，グラフ，式と徐々に新たな考えが引き出されていくことが分かる。

7．おわりに

本研究では以下のような知見が得られた。

○生徒が直感では判断できない装置と問題の設定を行うことにより，生徒は教師からの支援を得ることなく自ら事象から数値(変数)を取り出すことができる。

○ウサギとカメの競争という文脈では，独立変数の捉えは，生徒と教師では異なる。

○変化の割合が一定でない事象を扱うことにより，生徒自ら誤りに気づき，事象に戻って考察しなければならない意識が生まれる。

○グラフの交点が整数値でない関数を扱うことにより，生徒に式の必要感が生じる。

○第 1 の場から第 3 の場を通して単元構成を行うことで，装置の設定が異なり同一の課題で学習を進めることができ，様々な関数を扱うことができると同時に，そこから単元の学習内容を引き出すことができる。

○簡易式関数探求装置を用いて授業を行うことにより，それぞれの場で生徒の思考が困難になったときに解決のよりどころとなる。

「一次関数」の授業において生徒が数学を創るとは，自ら事象を観察することによって，伴って変わる数量や 2 量間の関係を発見することである。本研究では，個々の生徒が 2 つの動体を観察し分析する活動を 3 つの場を通して行うことで，生徒自らが変数や関数関係を発見し，単元を構成していくことができることが明らかになった。

今後の課題は，簡易式関数探求装置の改良を行い，生徒が適切に独立変数を選択できるようにすることと，他の単元においても「生徒が数学を創る活動」によって単元構成を行い，それを実践し，考察していくことである。

引用・参考文献

Brousseau,G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Kluwer Academic Publishers.

Greeno,J.G. (1991). A View of Mathematical Problem Solving in School. In M.U.Smith(Ed.), *Toward a Unified Theory of Problem Solving: View from Content Domains.* Hillsadale NJ: Lawrence Elbaum Associate.

林弘．(2001). 中学校における関数指導に関する研究－事象からモデルを構成する活動を重視して－．上越教育大学大学院修士論文．

桐山眞一．(1999). 中学生における関数の理解に関する研究－一次関数を事例として－．上越教育大学大学院修士論文．

古藤怜．(1986). 学校数学における多様性とその指導．数学教育研究第 1 号，上越教育大学数学教室．

古藤怜．(1991). Do Math の指導について．数学教育研究第 6 号，上越教育大学数学教室．

Lampert,M. 秋田喜代美訳・解説．(1995). 真性の学びを創造する：数学がわかることと数学を教えること．学びへの誘い，東京大学出版会．

文部科学省．(2006). 小学校算数・中学校数学・高等学校数学指導資料 PISA2003（数学的リテラシー）及び TIMSS2003（算数・数学）結果の分析と指導改善の方向，東洋館出版社．

中島健三，(1981). 算数・数学教育と数学的な考え方，金子書房．

岡崎正和．(2003). 全体論的視座からの正負の数の加減の単元構成に関する研究－教授学的状況論と代数的思考のサイクルの視点から－．数学教育学研究第 9 巻，全国数学教育学会．

高橋薫．(2001). 一次関数の学習過程に関する研究－事象から表現への過程に焦点を当てて－．上越教育大学大学院修士論文．