上越数学教育研究，第 24 号，上越教育大学数学教室，2009 年，pp.119-130.

議論のある活動における中学生の証明する過程について

松井　守
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

筆者の経験では，数学の授業において，生徒が最も困難さを示し，不得意感を示す内容の一つが，証明問題である。生徒からは，「当たり前のことをなぜ，やらなければならないのか」,「書くことが多くて面倒だ」などの声がよく聞こえてくる。筆者は，その証明問題に対する困難点として，二つあると考えている。一つは，教師が求めるものや，教科書に記述されている演繹の過程と，生徒の実際の思考とが整合されたものにならないことがある。小学校では，帰納的に説明することが多いため，中学校では，ほとんど初めて演繹的に証明しなければならない。もう一つは，生徒は自分なりの言葉で説明はできても，形式的な書記表現を行うことを困難に感じてしまう傾向にあるということである。例えば，AB＝AC，△ABC≡△DEF のような数学独自の記号表現がこれにあたる。筆者のこれまでの証明学習を反省してみても，演繹的な証明の記述の仕方に力点をおいた指導を行い，生徒の思考まで配慮した指導をしてこなかったのかもしれない。そのため，生徒は，証明を困難に感じるか，儀式的に証明を行えば，解決するという手続きに留まることになる。いずれにしても，生徒は，証明する意義を得られず，数学嫌いになるかもしれない。

そこで，筆者は，生徒が学習してきた数学的考えを持ちあわせ，競いあい，共に作りあげていく証明活動を提案したい。それにより，証明に対する見方も変わり，意義のあるものとなるのではないかと考えた。その具体的な手段は，生徒による議論である。教師は，あらかじめ用意された形式的な表現だけではなく生徒なりの表現も認めていく。議論のある証明活動は，教科書に記述された演繹的な証明には至らないかもしれないが先ずもって必要なことになるだろう。そこで，本稿では，証明活動を生徒どうしの議論により正当化していく活動と捉え，授業を構成していく。

本稿の目的は，議論のある活動における証明する過程について，分析，考察し，証明活動の指導改善の示唆を得ることである。

２．証明に関わる先行研究

2.1. 証明学習に関する先行研究

小関ら(1987)は，「論証の意義」の理解について，三つの発達段階があるとしている。第Ⅰ段階は，仮定，結論，証明を理解していない段階(Ⅰa)と理解している段階(Ⅰb)に分けられ，第Ⅱ段階は，特殊な図を描いてその図特有の性質を使ってしまう段階(Ⅱa)と一般的な図で考察できる段階(Ⅱb)に分けられる。小関ら(1987)の調査によれば，演繹的に証明しなければならないと考えている生徒の割合は，中学校第２学年で 9%，第３学年で 23%という結果が出ている。これは大変低い。また，証明のしくみがわかっているが意義を理解していない生徒が中学校第２学年で 57%，第３学年で 50%いるという結果が出

ている。多くの生徒は，演繹的な証明の良さを理解しないまま，教科書通りに記述するという手続き的な証明を行っているといえる。また，宮崎(1997)は，中学校で学習する図形の証明問題の根拠に関して，演繹的に証明されていない事柄も子どもの知り得る事実として存在することを指摘している。そして，宮崎(1997)は，「どういう規準によって事柄を真と考えるか」という次の二つの真理の規準を示している。

規準ａ：子どもの知り得る事実と対応する
規準ｂ：予め定められた区別にしたがって前提が用いられていて，ことがらが演繹されている

（宮崎，1997，p.55）

例えば，規準ａでは，「三角形の合同条件」が該当する。三角形の合同条件は，作図して決定条件から合同条件が導かれる。それは，演繹的に証明しなくても，いくつかの角や辺の長さを使って同じ形の三角形を作り出すという行為から経験的に正しいとされる。一方，規準ｂでは，「二等辺三角形の二つの底角は等しい」が該当する。それは，以前に学習した三角形の合同条件や合同な図形の性質を根拠として演繹的に証明を行う。このように，中学校では，前提が厳密性に欠けているものがある。宮崎(1997)は，その理由として，生徒の発達段階を考慮したもので，教育的な配慮としている。

江森(1995)は，口頭表現の特徴として，理解を深めるための繰り返しが行われることが有効な方略となり得る，他者の介入が容易であること，柔軟さを持っているなどを挙げている。そして，江森(1995)は，その利点として，話し言葉による伝達の方が推論しやすいこと，短時間での改良・変更が可能となること，限られた経験や知識によって行われる個人の思考の限界を超越することができることを挙げている。口頭表現に対して，具体物や操作などによる表現もある。宮崎(1992)は，推測したことの妥当性を示すために生徒が行う説明の水準と水準間の関係を次のように示している。

・プラグマティックな説明
生徒が，いくつかの特定な場合を用いて，計算や実測などの具体的な行動によって帰納的に結果を示す説明であり，仮定から結論への演繹的な推論がみられないもの
・生成的な例による説明
生徒が，具体物への操作や解釈の系列を示す説明であり，その系列に，仮定から結論への演繹的な推論がみられるもの
・知的な説明
生徒が，特定な場合を用いずに，一般を示す文字を用いて，仮定から結論への演繹的な推論を表す説明

（宮崎，1992，p.7）

プラグマティックな説明が，帰納的な説明であることに対して，生成的な例による説明や知的な説明は，演繹的な説明である。また，生成的な例による説明が具体物を用いることに対して，知的な説明は，一般性を示す文字を用いている。宮崎(1992)によれば，プラグマティックな説明が，帰納的な説明であることに対して，生成的な例による説明や知的な説明は，演繹的な説明である。また，生成的な例による説明が具体物を用いることに対して，知的な説明は，一般性を示す文字を用いている。宮崎(1992)は，幾何の論証や文字式による説明の指導を始める以前に，生徒が生成的な例による説明を行うような指導を受けていれば，推測したことに一般性を示す態度を身につけることができると主張している。筆者も，具体物から操作・解釈していく証明活動を行うことで，単なる手続きではなく，自分の考えを理解してもらえるような知的な説明へと移行できると考える。

形式的な証明にこだわることなく，生徒自らの考えや表現により，証明を行うことは，

結果的に証明の理解を深めることになるといえる。

2.2. 議論による証明の背景

第２章第１節の先行研究から，証明の問題点が明確化された。筆者は，その問題点を解決するには，証明活動に議論を積極的に取り入れる必要性があると考えた。本節では，デービス&ヘルシュ(1981)の中から，議論のある証明に至るまでの証明観の変遷を概観していく。

デービス&ヘルシュ(1981)によれば，近年に至るまで，証明は，絶対確実なものと考えられていた。その後，証明は謬りがあり得るものという捉え方がみられるようになった。

ラカトシュ(1976)は，次のように述べている。

> 非形式的・準経験的数学が議論の余地なく確立された定理の数的な単調増加によって成長するのではなく，思索と批判，証明と論駁による推量の不断の改良を経て成長する。　　　　　(ラカトシュ，1976，p.5)

ラカトシュ(1976)は，数学が形式化された演繹的パターンによってではなく，人と人とが競いあい謬りを修正しあうことによる理論の促進によって成長するものとしている。ラカトシュ(1976)のいう証明は，すでにできあがったものではなく，人間自らが作りだした推論について議論する中で作り上げられていくものであるといえる。ラカトシュ(1976)の理論は，議論のある証明活動の礎となっている。ラカトシュ(1976)は，自らの証明観を，架空の授業の中で，自分の推測の正当性を主張しようとする生徒とそれを批判する生徒のやりとりを通して示している。

そのラカトシュ(1976)の理論に基づき，実際の数学の授業の中で，議論による証明の研究が行われてきた。証明の社会的側面に着目した Balacheff(1990)，社会的構成に基づいた数学の知識に対する見方を生徒に獲得させようとしたランパート(1990)，論駁に注目した関口(1992)，準経験主義に基づいて証明を捉えた國本(1998)の研究などがある。

歴史的な証明観の変遷をみても，証明が成されたかどうかの基準は，あらかじめ定められた基準に従うのではなく，人と人との議論の中で妥当とみなされたかどうかに依存している。筆者も，数学は絶対確実なものではなく，証明学習も教科書や教師に依存した書き方指導ではないと考える。しかし，生徒が議論をした時に，互いにどのように影響を及ぼしあって証明を成すのかという疑問がある。次節では，生徒の証明過程を相互作用過程とみなし，相互作用に関わる先行研究の考察を行う。

３．相互作用に関わる先行研究

3.1. 相互作用に関する理論的背景

相互作用の中心的な立場にあるものとして，ブルーマー(1991)のシンボリック相互作用論がある。その前提は，次の三つである。

①人間は，ものごと(物理的対象，他者，他者の各種カテゴリー，制度，指導的理念，他者の活動，日常生活の出来事)が自分に対して持つ意味にのっとって，そのものごとに対して行為するというものである。

②ものごとの意味は，個人がその仲間と一緒に参加する社会的相互作用から導き出され，発生する。

③さらに，ものごとの意味は，個人が自分の出会ったものごとに対処するなかで，その個人が用いる解釈の過程によって扱われたり，修正されたりする。

(ブルーマー，1991，p.2)

これらの前提から，ものごとの意味が個人の解釈過程に関わっていて，他者との関係の中で個人が意味を構成しているといえる。個人の解釈過程に焦点がおかれているため，意味は主観的な側面がある。しかし，意味は，

他者との関係の中で，構成され，修正されることから，客観的な側面もある。この客観的な側面は，すでに存在しているものではなく，人と人とがある集団の中で構成されたものである。また，ブルーマー(1991)は，指示と解釈の二重の過程，役割取得によって，人々は，お互いの活動を適合させ，自分自身の個人的行動を形成していくことを指摘している。これは，生徒どうしの関係においても同じことがいえる。生徒Aは生徒Bが何を意図して説明しているのかを確定し，生徒Bは自分が何を意図しているのかを生徒Aに伝達する。それが整合されなければ，別の具体的な説明を施すことになる。

3.2. 数学的対象

ブルーマー(1991)は，ものごとの意味を対象と呼び，人間は，ものごとに対して，シンボル(表現)を持ち，その対象は，個人の解釈過程に関わっていることを強調している。例えば，二等辺三角形の性質を捉える場面で，生徒Aは，「二等辺三角形は，頂角で折るとぴったり重なるもの」(対象A)と説明する。対象Aは，生徒Aの経験や活動の中から得られた意味によって構成されている。これに対して，生徒Bは，「二等辺三角形は，折り目を軸として線対称なもの」(対象B)と発言する。

また，ブルーマー(1991)は，次のように述べている。

> 対象は，人が他者と相互作用することによって形成され，維持され，弱められ，また変容されていく。
>
> (ブルーマー，1991，p.27)

対象は，主観的なものではなく，人と人との相互作用過程において，変容されるものといえる。学習においても最初は個人の持つ対象の意味のもとに行われるが，他者との相互作用を通して，対象が徐々に変容していき，新しい対象へと変容されていくことになると考えられる。前述の例でも，二等辺三角形を折るという経験的な意味を伴った対象Aが，相互作用によって，線対称という数学的な意味を伴った対象Bに変容する場合もある。

また，中村(2007)は，数学授業における対象について，次のように述べている。

> 数学の授業においても数学が存在し，その存在に確信をもつようになる過程があるだろう，人と人の間で存在すると考えられている数学を数学的対象と呼ぶ。
>
> (中村，2007，p.14)

さらに，中村(2007)は，数学的対象が存在するようになる過程として，二つのことを示している。一つは，議論が成されたときである。中村(2007)は，数学的対象の存在が明確になることを，見取り図から見る立方体の切断面が二等辺三角形なのか，直角三角形なのかで議論する生徒の姿から示している。ここでは，切断面という数学的対象が，相互行為において，明確になっている。もう一つは，表現が伴うときである。中村(2007)によれば，授業の中で用いられる表現は，具体物，図，言葉，表，グラフ，式などと多様である。このような様々な表現を用いた相互行為を進める中で，数学的対象が作り出され，明確になっていく。

本稿における証明は，学級という集団の中で認められて，初めて成されたことになる。したがって，数学的対象は，学級の中で正しいと捉えられなければならない。ブルーマー(1991)は，集団の中における対象について，次のように述べている。

> ひとつの相互的な指示の過程から，共通の対象が生じるーすなわち，一定の人々にとって同一の意味を持ち，この人々によって同じように見られる対象があらわれるのである。　(ブルーマー，1991，p.14)

また，熊谷(1988)は，共有を個人の経験・知識の正当性に同意することと捉えている。一方，金本(2001)は，授業では様々な考えや意味が共有されるが，そのすべてが正しいと

は限らないことを指摘している。金本(2001)のいう共有は，あくまでも他者の考えを理解するということで，その正誤までは問題にしていないと考えられる。本稿では，ブルーマー(1991)のいう共通の対象と区別するために，金本(2001)のいう他者の考えを理解することを共有と呼ぶことにする。

この共通の対象が起こり得る場合として，中村(2007)は， 次のように述べている。

> 自分の意図が公的に認められる数学的価値になる過程が重要である。
>
> (中村，2007，p.22)

中村(2007)は，数学的対象と数学的価値との関わりを指摘している。共通の対象は，生徒の間で同一の価値を伴ったことで存在することになる。

3.3. 本研究における理論的枠組み

本研究では，帰納的に説明するという価値を伴った対象を経験的な対象と呼ぶことにする。生徒が初めに証明に取りかかる際，いくつかの場合から，結論を導くという帰納的な方法をとることが考えられる。文字式では，いくつかの数を計算したり，図形では，いくつかの図を実測したりして帰納的に判断する。

次に，演繹的に説明するという価値を伴った対象を構造的な対象と呼ぶことにする。構造的というのは，群などに代表される代数的な構造を示しているのではない。対象を構造的にみるということは，例えば，数を文字にしたり，図を動的に捉えたりといった一般化してみるということである。

さらに，経験的な対象と構造的な対象の間に，関係的な対象を設定する。生徒は，帰納的な説明であっても，数学的な関係性を説明し，演繹的な説明に類似している場合もある。例えば，第２章で示した宮崎(1992)の生成的な例による説明がそれにあたる。文字化しなくても，生徒独自の言葉や図，具体物を用いた表現によって，数学的な関係を示している。構造的な対象は文字化した抽象的な関係性を説明するという価値を伴った対象であることに対して，関係的な対象は生徒独自の表現を用いた具体的な関係性を説明するという価値を伴った対象である。

筆者は，数学的対象，それに関わる価値，共通の対象を本研究の理論的枠組みとして，教授実験を構成し，分析，考察を行っていくこととする。

４．教授実験の分析と考察

4.1. 教授実験の構想

教授実験は，生徒どうしの積極的な議論により正当化していく形式をとる。授業の中で，近くの生徒どうしによる３名から４名程度のグループでの話しあいも設定する。教師は，できるだけ生徒への介入は避け，司会や生徒どうしの会話の橋渡し的な役割に徹する。教授実験で用いる教材は，文字式，図形など様々な種類のものを用意する。教授実験のねらいは，生徒がどのように相互作用していくのかを，理論的枠組みである数学的対象を中心として解釈，考察し，生徒の証明過程を探っていくことである。

教授実験は，埼玉県公立Y中学校第２学年 11 名を対象に，平成 20 年４月下旬から平成 20 年５月下旬にかけて，放課後に，筆者が授業者となり，計 13 時間実施した。毎時間の授業は，授業全体の流れを記録するためのビデオカメラ２台，２名の生徒の活動を記録するためのビデオカメラ２台の計４台によって記録した。調査参加者は，中学校第２学年の生徒 11 名で，その内訳は，すべて男子である。放課後，参加できる生徒を募り，集まった生徒である。比較的，授業に積極的な生徒で，学力は，絶対評価で，２～４の生徒がほぼ均等に集まった。証明の学習は，未習事項である。生徒の名前を仮に Asa，Fuku，Gou，Ima，Kita，Naba，Naka，Nemo，Saka，Suzu，Yoshi とする。

4.2. 教授実験の概要とその分析

4.2.1. 第３時の概要とその分析

第３時では，次の問題を提出して，授業を展開した。

2 つの自然数をいろいろとり，その和が偶数になるか，奇数になるか，調べてください。また，その理由を相手にわかるように説明しなさい。

授業の初めに，グループＢでは，奇数・偶数とは，何かという議論が起こっている。

B8	Asa	要は何がしたいんだろう。なんで，1，3，5 が奇数なのか。もとを正せば・・・
B9	Kita	もとから，奇数しかないから。
B10	Asa	それと同じだ。
B11	Kita	ねえ。
B12	Asa	だって，22 だって，偶数だから，その理由は誰だって知らないわけだから。そういうことだ。
B13	Kita	うーん，奥が深いね。まず，偶数とは何かを考えるんだ。
B14	Kita	偶数はおれが考えるに 2 の倍数。それが偶数。
B15	Naka	あとさあ，2 で割り切れる数。
B16	Asa	それが 2 の倍数じゃん。2 で割り切れるものが・・・
B17	Kita	奇数とは，ではない。それ以外。じゃあ，これで考えよう。

Asa は，偶数，奇数という対象は，経験的なもので，偶数を 2，4，6･･･，奇数を 1，3，5･･･と捉え，発言 B12「理由は誰だって知らないわけだから。」にあるように，その和も自明であると説明している。それに対して，Kita や Naka は，偶数という対象を 2 の倍数のように，関係的に捉えることを主張している。対象の捉え方が，経験的か，関係的かで議論が起こっている。しかし，この時点で，2 の倍数でないものに 2 の倍数でないものを加えた結果が 2 の倍数になることに結び付かないため，共通の対象とは成り得ていない。

教師は，碁石を並べている Saka に対して，次のような質問をしている。

D13	T	ここは，どういう説明になるの？
D14	Saka	黒が奇数の 2 で割り切れない分の 1 つ。ここまで(白)は 2 で割り切れるけど，1 個余っちゃうじゃないですか。
D15	T	奇数というの余るものなんだ。
D16	Gou	2 で割ると・・・
D17	T	これは何？
D18	Saka	奇数です。奇数＋奇数。
D19	T	それをどうするの？
D20	Saka	だから，まず，1 つずつ余っているから，足すことで，・・・ここだけでも足せばいい。で，偶数になるじゃないですか。あとは偶数だから。

（Saka の説明）

○○　●○○　→　○○　●　○○
○○●　○○　　　○○　●　○○

同じように，発言 D14「黒が奇数の 2 で割り切れない分の 1 つ」と，Saka は，碁石という具体物を用いて，奇数という対象を，2 個ずつにして 1 余ると関係的に捉え，説明をしている。碁石の操作は，$(2m+1)+(2n+1)=2m+2n+2$ を意味し，一般化を促すものであった。これは，宮崎(1992)の生成的な例による説明である。

Saka の説明を受けての Asa は，同じく碁石を使って，次のように説明する。

59	Asa	まず，偶数というのは，2 で割り切れますよね。だから，当然，両方とも 2 で割り切れるのだから，2 で割り切れる。偶数たす偶数は偶数で。
60	Asa	偶数＋奇数だと，奇数は 2 で割り切れないから，奇数というのは，あと 1 個たせば偶数なので，そして，このまま，たしちゃうと，こっち(奇数)が 2 で割り切れないから両方合わさっちゃうと，2 で割り切れない。2 で割り切れないのが奇数だから，奇数になる。
61	Asa	奇数と奇数だと，両方とも 2 で割り切れないから，1 たすと偶数になれるから，こっち(右の 1 個を左にくっつける。)に 1 たすと，両方とも偶数になるから，偶数になる。

（Asa の説明）

○○　●○○　→　○○●　○○
○○●　○○　　　○○●　○○

発言 59「偶数たす偶数は偶数」，発言 60「奇数というのは，あと 1 個たせば偶数」と，Asa は，(奇数)＋1＝(偶数)，(偶数)＋(偶数)＝(偶数)を前提として，説明をしているが，碁石の配置を示し，偶数や奇数を関係的な対象として，捉えている。Asa の奇数の対象は，「1，3，5」という経験的な対象から，関係的な対象へと変容していることがわかる。偶数であるという結論を示せたことで，碁石を用いた「2 個ずつで 1 余るもの」は価値あるものとされ，共通の対象と成り得た。

一方，Yoshi は，奇数を構造的にみて文字として捉えている。

(Yoshi の板書)

奇数 奇数
(2ｘ－1) ＋ (2ｙ－1) ＝ 偶数

しかし，2(x＋y－1)のように，和の式を変形して偶数と捉えることができない。

B42	Asa	だから，なんで，文字を使うのか。
B43	Kita	文字を使わないとさ，何を求めているかわからないからじゃない。
B44	Asa	なんで，これをここまでやりたいのだか，わからない。
B45	Kita	うーん。Yoshi，文字っていらなくない？
B46	Yoshi	なんで？
B47	Kita	普通にさ，2，偶数ってすればいいじゃん。
B48	Yoshi	でも，自然数というのは 1 でも 2 でも 3 でもだから。
B49	Kita	ｘを 1 にして，×1 だから，2 にして，×2 で 4，×4 で 8。だから，倍数だよね。偶数というのは，倍数だよね。
B50	Kita	文字使うと意味わかんない。

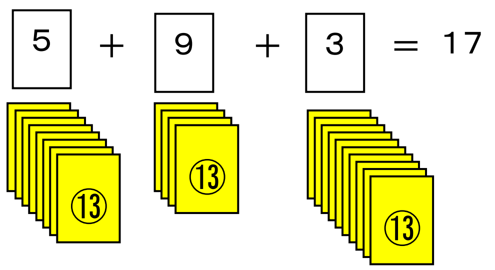
発言 B44「なんで，これをここまでやりたいのだか，わからない」，発言 B50「文字使うと意味わかんない」のように，文字の不必要を訴える発言が，いくつかみられた。2x－1 が奇数であることは，集団の中で，共有されている。しかし，文字式 2x－1 は，価値のないものとされ，共通の対象とは成り得なかった。

すべての生徒は，最初，経験的に，数を具体的なものとして捉えていた。その最初の対象は，議論の中で，完全に式化して，一般化した構造的な対象へとは変容しなかった。しかし，生徒どうしの中で，文字式の代わりに碁石による具体物の操作や 2 個ずつや 1 個余るという言葉を通して一般化しようとした関係的な対象が，共通の対象とされていた。

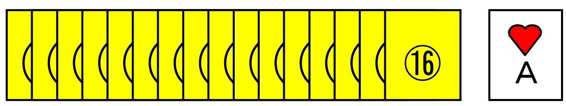
4.2.2. 第４時の概要とその分析

第４時では，次の問題を提示した。

一番上のカードを表向きにすると，5 でした。5 なので，6 から 13 までカードをおいていきます。同じように，次のカードを表向きにすると，9 でした。9 なので，10 から 13 までカードをおいていきます。もう一度，同じように次のカードを表向きにすると，3 でした。3 なので，4 から 13 までカードをおいていきます。



では，今，表にした 3 枚のカードの合計は 17 です。残った山の，上から 17 番目のカードはハートの A です。



なぜ，カードを当てることができたのでしょうか。その理由を説明しなさい。

Saka は，実際に最も簡単な 2 種類のパターンを試すことで，常に 42 枚目になることを発見した。

(Sakaの説明)

・3枚ともA(1)の場合
　前半　13枚＋13枚＋13枚＝39枚
　後半　1＋1＋1＝3枚
　39＋3＝42枚
・3枚ともK(13)の場合
　前半　1枚＋1枚＋1枚＝3枚
　後半　13＋13＋13＝39
　3＋39＝42枚

Saka は，帰納的に２つのパターンによって 42 枚と結論づけていることから，Saka の 42 枚の対象は，経験的な対象といえる。

それに対して，生徒は次のような議論をしている。

B40	Fuku	補うからさ，なるんでしょ。
B41	Saka	補う・・・
B42	Fuku	10 でも，後のカードが補っちゃうから。
B43	Saka	13 だから，出さなくていいでしょ。13＋13＋13 で，39，そこに 39 枚出したとして，で，42 枚。
B44	Naba	出ている数と，これ 1，2，3 じゃん。(3 枚のＫを指して)表になっている数をたす。ここに出た枚数をとると，42。で，そうすると，42 になる。
B45	Gou	出した枚数＋上の数字・・・
B46	Fuku	補う。1 でも，13 枚，13 枚，13 枚。補うから，・・・

その Saka の説明から，Fuku は，表の数字によらず，前半と後半のカード枚数の合計が同じになるということに気づき，発言 B40「補う」という表現を用いている。

そして，Fuku は，次のように説明する。

B67	Naba	(10 が出たので，)11，12，13。(J が出たので，)12，13。(4 が出たので，)5，6，7・・・13。
B68	Fuku	28 だ。
B69	Naba	1，2，3・・・28。これがスペードのA。
B70	Fuku	オーケイ。それでこいつらが，
B71	Naba	10，9，8，・・・1。11，10，9・・・1。4，3，2，1。
B72	Fuku	なんか，残るんですね。
B73	T	これ，10 枚，残っているの？
B74	Saka	もう 1 枚ずつ足していかなければだめだよ。
B75	Ima	そうだよ。もう 1 枚ずつ足していくんだよ。
B76	Fuku	ゼロか。0，1，2，3，4，5・・・
B77	Saka	ゼロも入れてあげれば，そろうよ。絶対。というか，14 枚出せばいいんでしょ。

(Fukuの説明)

□　・・・　□　$\boxed{10}$　□　□　□
0　　　　　9　　　　11　12　13
□　・・・　□　$\boxed{J}$　□　□
0　　　　　10　　　　12　13
□　・・・　□　$\boxed{4}$　□　・・・　□
0　　　　　3　　　　5　　　　13

Fuku は，Naba の発言 B71「10，9，8，・・・1」に従って，後からとるカードをカウントダウンして，反対側に並べていった。図の左側のカードが，カウントダウンしていったものである。これは，一般性を示す説明となっている。例えば，表のカードの数が，x だった場合，初めに置いたカード枚数は，14－x であり，カウントダウンしたカード枚数は，x である。Fuku は，初めのカードとカウントダウンのカードとを関係的にみて，14×3 と 42 枚を捉えている。Fuku の捉え方は，関係的な対象といえる。集団の中で，Saka の 2 種類のパターンより，Fuku のランダムなパターンの方が，一般化を表しているという点で，価値があるとされていた。

また，Yoshi は，完全に一般化した形で文字式による 42 枚の対象を示している。

(Yoshiのプリント)

A＋(13－A)＋B＋(13－B)＋C＋(13－C)＝39

118	Yoshi	A，B，C は，1 から 13 の好きな数になる。それで，こっちでは，A が 13 だったら，13 から 13 ひいて，0 になるから，足すのがなくて，A が 10 だったら，13 から 10 をひいて，3 になる。B では，B を 5 と例えて，13 から 5 をひくと，8。C を 12 とする

		と，13 から 12 ひいて，1。
119	Fuku	13。全部 13 になると，すごいですね。
120	Naba	これ，全部たすと 13 になる？
121	Fuku	39。こいつら(表の 3 枚)をたしてやればいいんだ。
122	Saka	おうおう。

Yoshi は，発言 118「A，B，C は，1 から 13 の好きな数になる」と，3 枚のカードがどんな数字でも，最終的に 42 枚目になることをいうために，3 枚の数を文字にして，式を立てている。表のカードの数が A のとき，前半のカード枚数は 13－A で，後半のカード枚数は，A である。場にあるカードの総数(13－A)＋A は，A によらない一定の数となる。Yoshi の文字による対象は，構造的な対象といえる。どんな数字の場合でも，成り立つことを示せるため，発言 119「全部 13 になると，すごいですね。39。こいつら(表の 3 枚)をたしてやればいいんだ」と，Fuku は，A＋(13－A)＋B＋(13－B)＋C＋(13－C)＋3 という文字による 42 枚の対象へと変容させている。

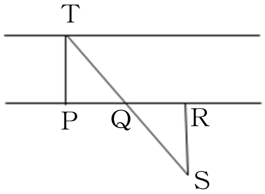
Fuku の関係的な対象は，Saka の経験的な対象により生じている。そして，その対象は，Yoshi の構造的な対象へと変容している。他の生徒も，Yoshi の一般化を示した説明に価値を得て，文字を用いた構造的な対象は，共通の対象と成り得た。

4.2.3. 第 13 時の概要とその分析

第 13 時では，次の問題を提示した。

A 君は，大きな川の川幅を，川を渡らず，巻尺も使わず，計算もしないで，歩数を測ろうとしています。A 君は，川幅が一定でまっすぐな川の幅を，次のようにして測りました。

(ア)対岸に大きな木(T 地点)を見つけ，その木が真正面に見える川岸の地点を P 地点としました。



(イ)川にそって，P 地点から何歩か歩いた地点を Q 地点として，そこに棒を立ててから，さらに何歩か歩いた地点を R 地点としました。

(ウ)R 地点から，川と直角になるような向きに，目印の木と Q 地点の棒が一直線に重なるまで何歩か歩いたところを S 地点としました。

(深川，2004，p.201)

授業の初め，生徒は，問題を読み取り，正確に図を作成する。Yoshi と Asa は，図から視覚的に TP＝SR を捉えて，SR の歩数を調べることで，TP の歩数がわかると主張している。

A66	T	ここ(SR)を測ろうとしたの？なんで？
A67	Yoshi	ここ(SR)が，(TP)と同じような気がしたから。
A68	T	ここ，なんで，同じだと思ったの？
A69	Asa	なんとなく。目検討。

この時点で，発言 A67「同じような気がした」や発言 A69「なんとなく」にあるように，TP＝SR の対象は，経験的なものに支えられ，2 人の間で共に存在していると捉えられている。作図や実測による TP＝SR の対象は，経験的な対象である。

しかし，教師の問いかけの前に，次のような議論が成されている。

A56	Yoshi	ここ(SR)が，川幅と合っているか。
A57	Yoshi	(SR を実測して)2.・・・ああ，残念，3。
A58	Yoshi	ああ，そこ(TP)，3.3 か。
A59	Naka	でも，ここ(PR)が何歩歩いたのか，わからないんだよ。正確に。
A60	Saka	だから，どんな状況でもなんなけゃいけないんだよね。
A61	Naka	だってさ，交わっただけで，どんどん三角形が出てくる。

実測の誤差が生じたことや，Saka の発言 A60「どんな状況でも」，Naka の発言 A61「どんどん三角形が出てくる。」という発言にあ

るように特定の図しか示していないため，別の TP＝SR の対象をみつける必要があると考えられている。

そして，次のような議論が起こっている。

A83	Suzu	これ，三角形として，対称じゃない？
A84	Yoshi	ああ，そうか。
A85	T	この長さとこの長さ(PQ と QR)が等しいということは言えるの？
A86	Yoshi	はい。
A87	T	じゃあ，なんで等しいかだね。
A88	Yoshi	なんだっけなんだっけ。なんか，似てる。三角形。なんだっけ。
A89	Yoshi	そうそう，そこ(TP)に線入れれば。
A90	Yoshi	これで，この三角形とこの三角形が(△TPQ と△SRQ)同じだったら，ここ(TP と SR)も同じってことじゃないの？

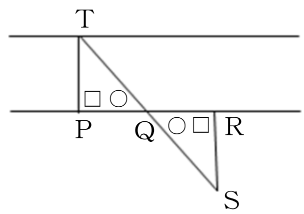
Yoshi は，Suzu の発言 A83「三角形として，対称」によって，発言 A90「この三角形とこの三角形(△TPQ と△SRQ)が同じだったら，ここ(TP と SR)も同じ」と，TP と SR を△TPQ と△SRQ の辺とみている。Yoshi は，視覚的な TP＝SR の対象から，合同な三角形の辺としての TP＝SR の対象へと変容させている。

Yoshi は，初め，視覚的にみて，帰納的に説明することの価値を得ていた。しかし，Yoshi は，Naka や Saka から，問題点を指摘されたことで，Yoshi の価値がゆらぐ。そして，Yoshi は，Suzu の対称という言葉から，既に正しいとされた合同な図形の性質を用いて，演繹的に証明することの価値を得るようになる。Yoshi は，相互作用によって，TP＝SR についての経験的な対象から，構造的な対象へと変容させている。

次に，議論は，△TPQ と△SRQ が合同であることの根拠について，焦点が向けられる。

A99	Yoshi	昨日のやつでしょ。こことここが(PQ と QR)がわかっているから，・・・Suzu，どういうときが確実に合同なんだっけ？2 つの角がわかれば合同なんだっけ？
A100	Suzu	1 つの線と 2 つの角か，1 つの角と 2 つの直線・・・
A101	Yoshi	でも，今のところ，わかるのは，1 つの線(PQ＝QR)と 1 つの角(∠P＝∠R)なんだから，あと，1 つもう 1 個，わかれば，できるんだよ。
A102	Yoshi	ここ(PQ＝QR)とここの角(∠P＝∠R)わかるんだよ。うと，どこがわかればいいのかな。
A103	Suzu	ここ(TP，SR)か，・・・
A104	Yoshi	ここ(TP，SR)を知りたいんでしょ。だから，ここ，なしだよ。
A105	Yoshi	だから，この線(TQ，SQ)か，この角(Q)？
A106	Naka	ここ(Q)が 180°になるでしょ。
A107	Yoshi	そうか，同じ直線どうし，合わせると，あれだ，ああ，そうだ，ここ(Q)がわかるんだから，できるじゃん。
A108	Saka	対頂角？
A109	Yoshi	そうだ，できるんだ。それ(対頂角)だから，ここ(∠TQP＝∠SQR)もわかって，で，ここ(∠P＝∠R)，90°で，この線(PQ＝QR)もわかるから，できる。いいんだよね。1 つの辺と 2 つの角。よっしゃ，これでいいんだ。
A110	Asa	完全，復活したよ。合同ということを見つけた時点で・・・
A111	Yoshi	だから，この角(∠P＝∠R)が 90°でしょ。ここの角(∠TQP＝∠SQR)がなんだっけ？2 つの直線だから，対頂角か・・・で，あと，どこだっけ？ここの直線(PQ＝QR)はわざと同じだから，できると・・・
A112	Asa	そういうわけですね。
A113	Yoshi	そういうわけですよ。

(Yoshi の説明)



発言 A99「どういうときが確実に合同なんだっけ？」と，合同の対象も，視覚による説明より，合同条件による説明の方が価値あるものとされている。また，発言 A102「どこがわかればいいのかな」と，等しい辺や角に

ついても，既に正しいとされた事柄を用いた説明が成されている。

最後の議論の中では，合同条件を満たすための等しい辺や角を，根拠をもって示すことに，焦点が置かれていた。視覚による帰納的な説明よりも，公理に基づいた演繹的な説明の方が価値あるものとされ，構造的な対象が，共通の対象と成り得た。また，図形の性質などの以前に学習した公理は，暗黙に正しいとされていた。

4.2.4. 教授実験の考察

これらの分析の結果，次の知見が得られた。

一つ目は，生徒は最初，経験的な対象に支えられて証明を行っているということである。第３時では，生徒は，奇数を「1，3，5」と具体的な数として，奇数の対象を捉えていた。第４時では，生徒は，カードの合計枚数が，２種類の極端な場合が 42 枚なので，帰納的にどんな場合も 42 枚になるとして，カードの枚数の対象を捉えていた。第 13 時では，生徒は，問題に沿うように作図し，視覚や実測によって，等しい線分の対象を捉えていた。

二つ目は，生徒は，一般性を示さなければいけないという価値によって，関係的な対象を生じさせているということである。

第３時では，生徒は，「2 組にして 1 余るもの」と碁石の配置と関係づけて，奇数の対象を捉えていた。これは，碁石の配置は，奇数全てを満たしているという考えによっている。第４時では，生徒は，独自のカード操作・配置を用いて，前半のカードと後半のカードの枚数の関係から，カード枚数の対象を捉えていた。これは，３枚のカードの組み合わせがどんな数であっても，カードの配置から 42 枚を示せるという考えによっている。第 13 時では，三角形と関係づけて，等しい線分の対象を捉えていた。これは，図は特定の図ではないという考えによっている。

三つ目は，関係的な対象は経験的な対象と構造的な対象とを繋ぐ役割を果たすという点で重要であるということである。教授実験から，図 1 のような相互作用パターンがみられた。

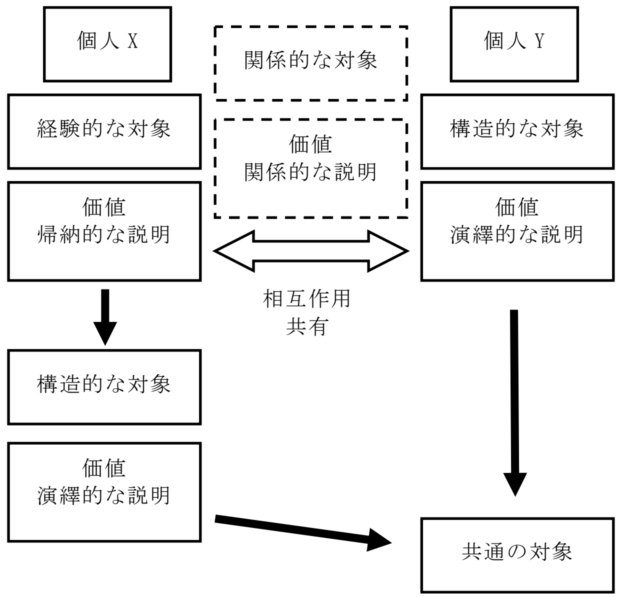


図 1. 相互作用パターン

個人 X は，経験的な対象を捉えていて，個人 Y は，構造的な対象を捉えている。相互作用によって，個人 X は，演繹的に説明しなければならないという価値を得て，構造的な対象を捉える。しかし，個人 X は，直接，演繹的な説明に，価値を得ているわけではない。個人 X と個人 Y は，共に演繹と帰納の間にある関係的な説明に価値を得て，関係的な対象を捉えている。個人 X と個人 Y は，関係的な対象を通して，共有し，個人 X の対象は，経験的な対象から，関係的な対象を経て，構造的な対象へと変容している。そして，両者の間で，構造的な対象は，共通の対象となっている。

第４時では，カード枚数に対して極端な例による経験的な対象と文字式による構造的な対象との間で相互作用が起こり，構造的な対象が，共通の対象と成り得ている。ここでは，

カード配置と関係づけた関係的な対象が，両者の間にある。また，第 13 時では，線分の長さに対して視覚や実測による経験的な対象と合同な図形の性質などの公理による構造的な対象との間で相互作用が起こり，構造的な対象が，共通の対象と成り得ている。ここでは，三角形の一部として線分を捉えた関係的な対象が，両者の間にある。一方，第３時では，碁石を用いた「2 組にして 1 余るもの」という関係的な対象は，「1，3，5」という経験的な対象と結びついていても，「2x－1」という構造的な対象と結び付いていないため，構造的な対象が共通の対象とは成り得ていなかった。

これらの知見から示唆されることは，関係的な対象が一般性を示し経験的な対象と構造的な対象とを繋ぐことで，生徒の間で議論のある証明活動が成されるということである。

５．おわりに

説明の責任や妥当の規準を生徒に委ねることで，演繹的な証明まで行き着かないかもしれない。しかし，教科書や教師に依存した形式的な書き方によるパターン暗記よりも，相手に納得してもらうという目的に向かうことで，生徒は証明する喜びを感じられるのではないだろうか。

本研究の教授実験は，放課後，少人数で行ったため，生徒の活発な議論が展開されやすい状況にあった。時間の制限された中，40人という集団の中で，議論のある証明活動を行うためには，教師や生徒の姿勢も大事であり，授業に対する意識の変革が互いに必要となってくる。

引用，参考文献

Balacheff, N.(1990).Towards a problematique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(4), 258-272.

ブルーマー.(1991).シンボリック相互作用論(pp.1-88).後藤将之訳.勁草書房.

デービス&ヘルシュ.(1981).数学的経験.柴垣和三雄，清水邦夫，田中裕訳.森北出版株式会社.

江森英世.(1995).Oral expression の指導のポイント.CRECER 第 6 巻図形と論証(pp.274-279).ニチブン.

深川和久.(2004).Quiz でわかる中学数学.ベレ出版.

金本良通.(2001).ある算数科の授業における意味とシンボルとコミュニティとの相互的構成.数学教育学論究，*77*，3-20.

小関熙純他.(1987).図形の論証指導.明治図書.

熊谷光一.(1989).算数・数学の授業における共有プロセスに関する考察.数学教育学論究，*51*，3-23.

國本景亀.(1998).準経験主義の哲学に基づく証明学習の研究.日本教科教育学会誌，*21*(2)，35-43.

ラカトシュ.(1976).数学的発見の論理―証明と論駁―.(佐々木力訳).共立出版.

ランパート.(1990).真正の学びを創造する.佐伯胖，藤田英典，佐藤学編，学びへの誘い(pp.189-240).東京大学出版会.

宮崎樹夫.(1992).推測したことに一般性があることを示すために行われる活動：生徒はどのようにして生成的な例による説明を行うか.数学教育学論究，*57*，3-17.

宮崎樹夫.(1997).学校数学の証明指導における，ことがらの真理観に関する研究.筑波数学教育研究，*16*，49-58.

中村光一.(2007).数学授業の相互行為における数学的対象と価値.日本数学教育学会誌，*89*(1)，13-22.

関口靖広.(1992).数学の教室における証明と論駁の探究.数学教育学論究，*58*，31-35.