上越数学教育研究，第 24 号，上越教育大学数学教室，2009 年，pp.155-162.

関数単元における数学的活動の考察
— RME 理論の研究を通して —

金川　純
上越教育大学大学院修士課程 1 年

1．はじめに

筆者には 13 年間中学校で数学を指導した経験がある。その中で特に指導の効果が得られず，課題としてきた単元が数量関係領域の関数単元である。事象を理解できていない，又はどうしてよいか分からないためか生徒の課題への取り組みが消極的で，教師からの支援を待っている状況が多い。しかしこのような実態には，教科書に教材の全てを依存し，問題演習中心の形式的な指導で現実場面や有用性を実感する授業が行えない教師側にも要因があると考えられる。

平成 21 年度に実施された全国学力・学習状況調査結果において領域間正答率を比較すると「数と式」では知識を問う問題Aが 68.8％，活用を問うB問題が 55.1％，「図形」では問題Aが 63.3％，Bが 58.4％，「数量関係」では問題Aが 59.5％，Bが 45.5％となっており，問題A，問題Bともに数量関係領域における正答率が例年通り他領域と比べて低い傾向にある。また，設問ごとに分析すると，反比例のグラフから式を求める問題，1次関数の表から式を求める問題の正答率がそれぞれ 37.0％，37.8％と関数における課題がより明確になっている。

本研究の目的は，関数単元における子どもの心的構成物を捉える視点を明らかにし，それに応じたカリキュラムを考察することである。

本稿では，第一に関数に関わる先行研究から関数指導の課題と改善のための視点を考察する。第二に，関数単元において，生徒がより現実的な問題に取り組むために，人間の活動としての数学という思想を視座におくオランダの Freudenthal,H が開発，創始した現実的数学教育 Realistic Mathematics Education（略称　RME）を概観し，問題の解決過程における心的構成物であるモデルについて考察する。第三に，RME に密接に関連するカリキュラム開発である Mathematics in Context(略称　MiC)を概観する。第四に，MiC の枠組みによる問題を示し，子どもの知識の形成過程を想定する。

2．関数における先行研究

桐山(1999)は，中学校における関数指導について，表・式・グラフの表現形式中心の指導よりも具体的な事象と関連しての指導を重視すべきとの知見を得た。そこで1次関数を扱った Greeno のモデルを用いて子どもが事象の中から関数関係をどのように見いだしていくかの過程を考察し，生徒が自ら関数関係を見つけられるような教材の開発・適用が重要であると結論づけた。

林(2001)は，現実場面と関わりをもつこと，事象を考察するために，事象から変数を取り出し，それを関係付けていく活動を豊かにすること，の2つが必要であるとの知見を得た。そこで，1 次関数を扱った Greeno のモデルと線香を燃やす実験を通して，子どもがどのようにして事象からモデルを構成していくかを，Gravemeijer(2000)の「モデルの自己発達」，Treffers(1991)の「学習原則」に着目して考察した。林(2001)はモデルについて，一般的に考えられる子どもが作り出したもの，表現したもののみならず子ども自身が持っている活動の基盤となる考えもモデルの1つであると結論づけた。

高橋(2002)は，関数の式を求めることや表・式・グラフの書き換え中心の指導が関数に抵抗を感じ

させる原因とし，表・式・グラフの形式的な表現に至る過程で子どもが用いる絵や図のような表現が重要な意味をもつとの知見を得た。そこで1次関数を扱ったGreenoのモデルを用いて子どもの思考過程を考察し，子どもが自ら事象をとらえられる教材の有用性と，答えを求めるだけでなく解決過程で表現した絵や図，教材を使っての説明を重視した指導が大切であると結論づけた。

横関(2005)は，関数を形式的に扱い，事象から離れたところで表・式・グラフなどを教え込んでいることが関数を苦手にしている要因との知見を得た。そこで，1次関数を扱った「太さの異なる線香の燃え方を調べる実験」と2次関数を扱った「台車の転がり方を調べる実験」を起点とした数学的モデリングの関数授業における子どもの思考過程に注目し，関数的な見方や考え方がどのように形成されていくのかを認知学モデルの視点から明らかにしていこうとした。関数的な見方や考え方は，認知学モデルの発展とともに形成されると考えたからである。そして認知学モデルの変化をより詳細に捉えるために RME におけるモデルの自己発達の視点を参考にしている。横関(2005)は，関数の学習過程の分析を通して，実験を原動力として数学的モデリング過程を何度も踏む過程において，逆行や往復，飛躍が数多く含まれていることを明らかにした。そして，その過程で数学的結論が積み重ねられていき，関数的な見方や考え方の形成につながっているとの知見を得た。すなわち，子どもの活動では，実験を起点として具体的な事象に基づいた数学的モデリング過程を繰り返すことが非常に効果的であると結論づけた。

どの先行研究も子どもが事象と関わる活動の中で関数関係を見いだしていく過程を重視し，事象からという視点を大切にしている。このことから「具体的な事象」，「観察，操作，実験など実際的な活動」における改善が必要であると考えた。

3．RMEと数学的活動及びモデルの形成について

具体的な事象や活動を考察するにあたり，RMEは，人間の活動としての数学，という思想を根底に置いており，子どもが現実世界における算数・数学的活動を通し，算数・数学を経験し，知識を構成することを目指しているため，多くの示唆を得るものである。

3.1. 数学的活動について

Freudenthal(1991)は，数学は活動であり，数学的な知識の集合ではないと示した。その上で数学的活動とは，現実世界において問題を見つけ出し，対象物を組織しながら問題を解決する活動であると示した。

本稿では，以上の活動を数学的活動と定義し，考察する。前章の先行研究における活動は本稿の数学的活動とは異なるものもあるが，現実の事象から問題を見つけ出すための活動ととらえ，数学的活動の一部と考える。

3.2. モデルの形成について

Freudenthal(1991)は，数学的思考を特徴付けるものとしてCommon senseといわれる心的構成物に着目した。このCommon senseが自らの経験を通して組織化・有機化され，さらに高次元の Common senseとなる。このCommon senseが従来シェマといわれたものであり，後にモデルと考えられるのである。

Treffers(1991)は，モデルをインフォーマルで算術に関連した文脈とフォーマルな算術との間を橋渡しするものと考えた。

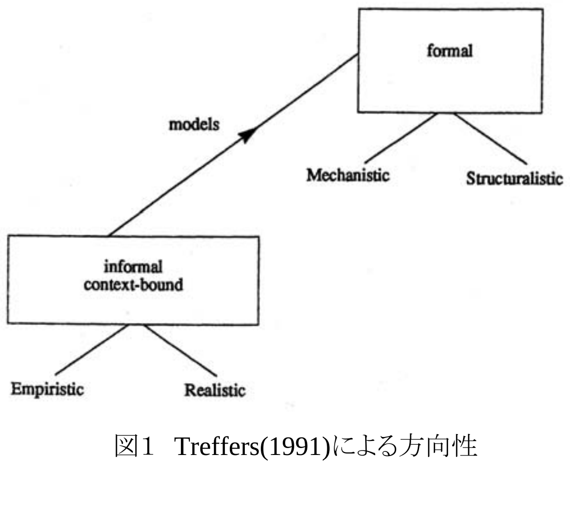


図1　Treffers(1991)による方向性

図1で示したようにモデルは，図1左下のインフォーマルで算術に関連した文脈に近い最初の様相（model-of）から，図1右上のフォーマルで標準化された操作に近い最終的な様相（model-for），更にその間にある広い領域でも発展し，多面的であると結論づけた。

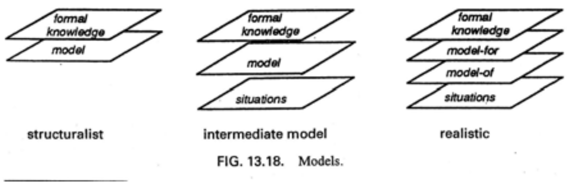


図2 Gravemeijer(2000)の考えるモデルの自己発達

Gravemeijer(2000)は，図2で示したように今まで考えられていた心的構成物であるモデルとフォーマルな水準の2つの水準に加え，子どもたちのインフォーマルな知識など場面に依存した知識を考慮した状況的水準の3つの水準を創造した。さらにモデルには状況的水準に依存した心的構成物 model-of とフォーマルな数学に向かう心的構成物 model-for があり，問題解決の過程には4つの水準があることを示した。これにより子どもたちのインフォーマルな知識が対象化され，モデルの自己発達によりフォーマルな水準にある数学的な知識との結び付きを可能にした。

そして，水準は絶対的ではなく，時にはさらに低い水準に戻り得るべきであり，モデルの自己発達における双方向性を示した。

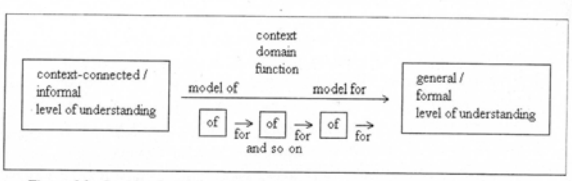


図3 Van den Heuvel-Panhuizen(2003)のモデルの転換

Van den Heuvel-Panhuizen(2003)は，図3で示したように Gravemeijer(2000)のモデルの自己発達をさらに深く追究し，インフォーマルな解釈に近いモデルの様相である model-of からフォーマルな解釈に近いモデルの様相である model-for への移行の過程途中に，さらに小さな model-of から model-for への局所的な転換が連続的にあると示した。

文脈に結びつく水準でインフォーマルな解釈を記号化したあるモデルが，最後にはより一般的なレベルでのフォーマルな解釈のモデルになることを示している。この転換は系列的なものではなく，学習過程において異なる局所的な変更が緊密に連結され，理解の水準が達成される上での連築材を形成している。

Van den Heuvel-Panhuizen(2003)は，MiC の百分率の教授において，子どもの思考過程を分析し，1から3（番号は筆者による）において model-of から model-for への移行を示した。

1．P1とP2の2つの駐車場のどちらが混み合っているかを説明する問題において，駐車場の使用状況を，現実の駐車場を表す長方形に置きかえている。

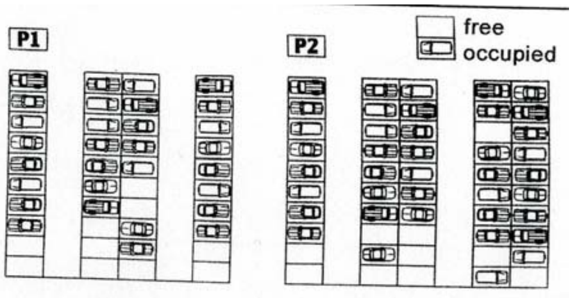


図4 駐車場の使用状況を表した図

ここでの解釈は，文脈に依存している。駐車場の使用状況を捉えた model-of が，図4で示したように満車率など他の状況を捉える絵 model-for の活動に移行している。

2．駐車場の混み具合を説明する問題において，現実の駐車場を表す長方形のフレームを，占有メーターに置きかえている。

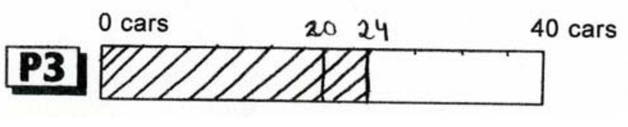


図5 駐車場の混み具合を表した占有メーター

ここでは，割合の状況を図式化する活動をしている。駐車場の満車率などを表す絵 model-of が図5で示したように占有メーターmodel-for へと発達し，占められた部分の百分率を視覚化している。文脈への依存度は低くなり，子どもたちは心的にも model-of から model-for へ移行している。

3．帯図の問題を解決するときに，様々な解決方法を考えている。

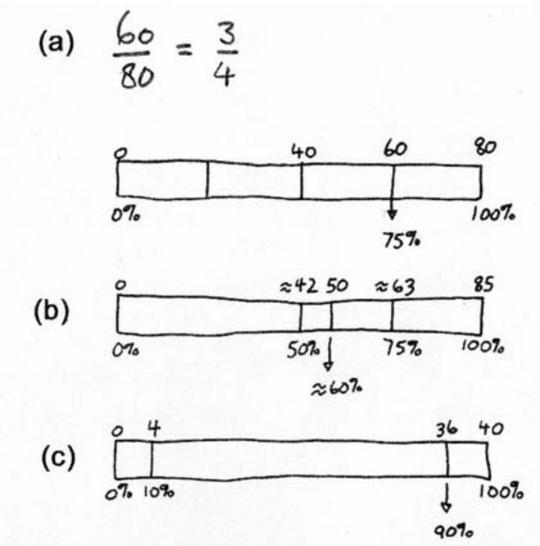


図6　百分率を求めるための様々な考えを示した図

帯図を用いた活動である。文脈への依存度はさらに低くなり，帯図から百分率を見つけるために分数，比例等の関係に着目するようになる。百分率と分数，比例等の関係を理解する model-for へと発展した。

(a)は容易な分数を用いて，占有メーターの中に 75%を見つけ出した。(b)は最初に3／4などの容易な分数を用いて，次に 85 のうち 50 が3／4より1／2により近いので，おおよそ 60%である，というような小さなステップを踏んで解答している。(c)は 40 の 10%に着目して，次に4×9で90%を見つけ出した。

model-of から model-for への移行を一連の連続的かつ局所的なモデルの転換であると示した Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の解釈は，モデルの自己発達と捉える Gravemeijer(2000)とは異なる。しかし，両者とも心的形成物であるモデルに着目して子どもの思考過程を分析する点については共通である。

RME についての先行研究には，三木(2001)，高橋(2003)，橋本(2007)などがある。三木(2001)は，中学校第2学年の連立方程式，高橋(2003)は，小学校第5学年の除法と比の三用法の実験授業において，ともに Gravemeijer(2000)のモデルの自己発達の理論を手がかりとして子どもの思考過程を分析し，子どもにとって model-of から model-for への移行は跳躍があると考えた。橋本(2007)は，中学校第2学年の確率の実験授業において，Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の model-of から model-for への移行をモデル自体の機能の変化及び子どもたちによるモデルの見方の変容であるという理論を手がかりとして子どもの思考過程を分析し，複数の状況において形成された model-of が一般化されて新たな状況で活用される model-for に発達していく様相を示した。

4．MiC からの示唆

4.1．MiC について

MiC はアメリカの5−8学年のための包括的なミドルスクール数学カリキュラムである。 重要な特徴として，MiC を構成する4つの内容である数，代数学，幾何学及び統計学を結びつけていること，他の教科の内容と結びつけていること，そしてRME に基づいた数学と実世界での有意義な問題を結びつけていることがあげられる。

MiC カリキュラムの目標は道具としての数学を得ることである。数学はサインやシンボル，または人々が発展するために使ってきた規則から成り立っており，実生活での問題を解決している我々の経験から起こると考えている。数学は現実からつくられたものなので，現実的かつ有意義な文脈を提供することで，数学を学習させている。また，数学はアルゴリズムと規則を記憶するものではなく，自らの知識と経験することで数学を創るものであるという考えをもっている。

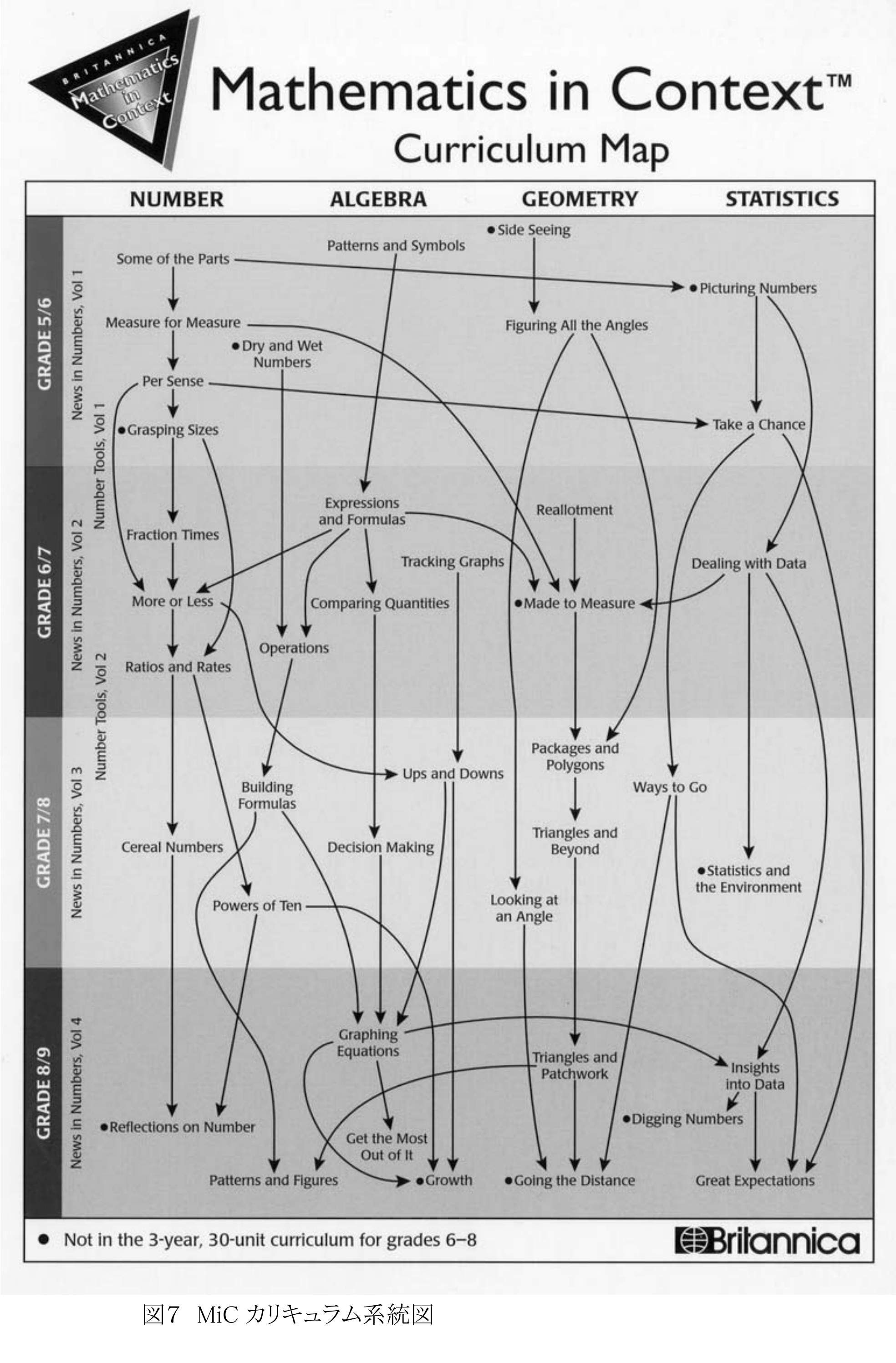


図7　MiC カリキュラム系統図

4.2.MiC における関数教材

MiC カリキュラムは，図7に示した系統図の通り，数，代数学，幾何学及び統計学の4領域から成り立っている。関数は領域としては扱っていないが，特に代数学，統計学において状況を記述するために表，グラフ，規則を開発，利用するための重要な概念として用いられている。また，図 7 に示した系統図は，系統性が明確に網の目状に示されており，指導上非常に参考になる画期的なものである。

関数に関わる単元を以下に示す。

グラフの追跡～代数学

データをグラフ化し，グラフから事象の変化を考察する学力を養う単元である。陸上大会でのレースの描写からグラフを作り，グラフをもとにレースを考察する。1次関数である等速度運動で動く2人が時間差で出発し，追いつくまでの時間と場所を求める問題もある。また，長期にわたるある地点の温度変化のグラフを作り，周期などの特徴を見いだす。

データの関係～統計学

データをグラフ化し，平均や最大・最小，変数の関係について考察する学力を養う単元である。複数の父親と子どもの身長のデータをグラフ化し，息子たちが父親の身長を超えることを結論付ける。また，歴代大統領や芸能人の個人データ，都市の人口などをもとに特徴を捉える学習をする。

変化するもの～代数学

人間の成長や自然事象について，データをグラフ化して分析する学力を養う単元である。人間については出生から 36 ヶ月までの身長や髪，爪，血圧の変化について，その他に木の年輪の様子や氷の溶ける変化を考察し，直線や成長曲線などの非直線形のグラフ，周期のあるグラフ等を学ぶ。

公式づくり～代数学

様々な条件を考慮しながら，タイルを並べるパターンや階段の設計，レンガを組み合わせることを通して，グラフなどを用いて様々な公式をつくり活用できるようにする単元である。階段の設計においては年齢やのぼるときの心拍数などを考えながら段の高さやステップの広さを決めていく。また，電卓を用いて平方根を見つけていく学習も行う。

意志決定～代数学

町を座標上にあると考え，座標や 1 次関数の知識をもとに町作りを考える単元である。空いている土地のエリア開発を進める上で，一戸建てやタウンハウスのエリア制限，家の寿命など，様々な条件を整理して実現可能な計画を考察していく。

統計値から考える環境問題～統計学

様々なデータをまとめ，表やグラフを考察する学力を養う単元である。学生たちが島の経営権を獲得したとして，消費電力をもとにエネルギーの効率化や環境汚染の問題，出るゴミの量の予測，年齢別の人口構成などをもとに環境を配慮した観光事業を展開していく。

成長するもの～代数学

植物やカタツムリなどの成長のデータを表や式，グラフにまとめ，変化を考察していく単元である。植物の成長は異なるため，12 のデータから変化の様子を座標にプロットし，データの平均から2次関数のグラフの様子を学ぶ。さらに成長がどこまで継続するのかという予想や，成長に伴って変化する葉の大きさ，カタツムリの重量を表にまとめ，差や階差を考えながら特徴をつかむ。また，グラフ電卓を用いながら2次関数や3次関数，指数関数について考察し，雑草やいも虫が爆発的に増加する理由を理解する。

総合的に考える～代数学

グラフでの考察をもとに，大勢で行く学年キャンプの計画を，今まで代数学で学んだ知識を応用して解決していく単元である

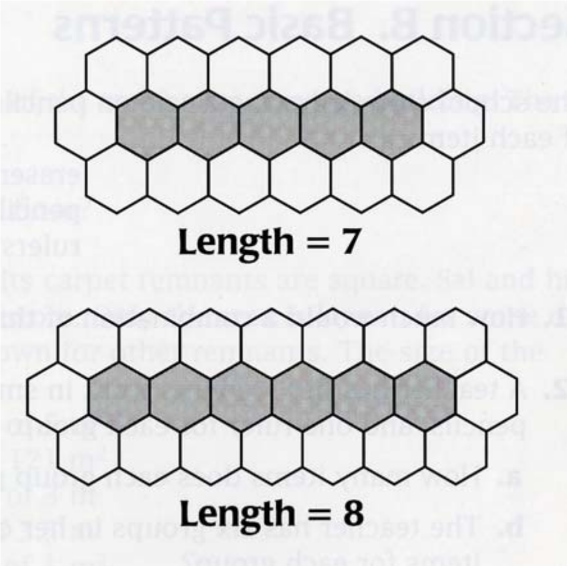
5. 分析の視点

MiC から関数に関する教材を現状の日本の中学校数学に合うように精選・再編集し，RMEにおける Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の枠組みを基に問題解決に到る数学の知識の形成過程を分析する。Gravemeijer(2000)の枠組みはモデルの自己発達を分析するのには適しているが，Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の枠組みは子どものモデルの変容を一部または局所的に分析できるため，子どもの知識の形成過程を分析しやすいと考えたからである。

６. MiC の枠組みによる問題と知識の形成過程

問題

道の長さに合わせてグレーと白の正六角形のタイルを下図のように並べる。下図の道の長さはそれぞれ7，8である。



⑴道の長さが9のときに必要な白いタイル数，グレーのタイル数，そしてタイルの総数を求めなさい。

⑵それぞれのタイルの数をどのように求めたかを説明しなさい。

⑶道の長さが分かっているとき，タイルの数を求める式を書きなさい。

⑷道の長さが 20 のときに必要な白いタイル数，グレーのタイル数，そしてタイルの総数を求めなさい。

上の問題は MiC の公式作りにおけるものである。この問題は日本の中学校数学では数と式の領域で指導されているが，定義域の各要素にそれぞれただ一つの対だけが対応するような関係が関数であるという定義によれば，数列や統計学の内容も関数と定義することができ，本稿では関数問題として扱う。

以下のプロトコルは，この問題における子どもの知識の形成過程を，Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の枠組みを基に想定したものである。

生徒A：道の長さが9のときの絵を書いてみよう。真ん中のタイルの両端が白だから，グレーのタイルは1，2，3･･･7で７枚。白いタイルは1，2，3，･･･で 18 枚だ。

生徒Aの活動は，実際に絵図をかくことによって答えを求めており，この状態は，まだ文脈に依存しているインフォーマルな解釈をしていると考えられる。

生徒B：道の長さとタイルの数の変化を表にしてみよう。道の長さが 7 のとき，グレーは5，白は 14。道の長さが 8 のときグレーは6，白は 16。それじゃぁ道の長さが9のときは･･･。

道の長さは1増えるとグレーも1ずつ増えているね。だから7かな。あと，道の長さから両端の 2 枚を引くから，7だな。白いタイルは･･･

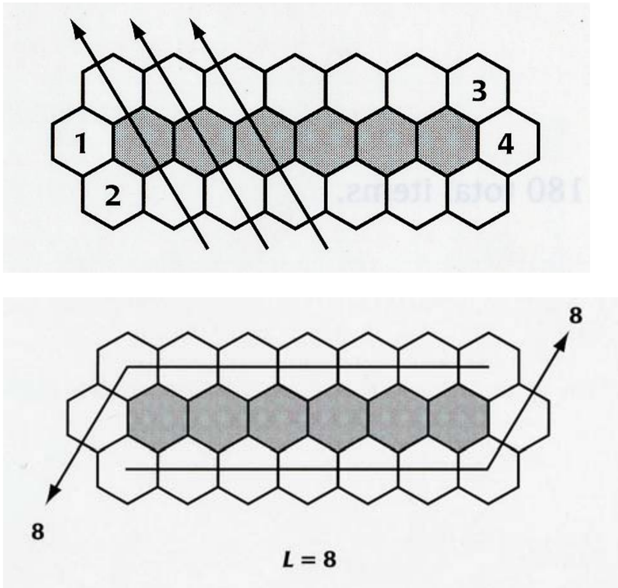


図8　生徒の考えを示した絵図

生徒C：白いタイルはどうなっているんだろう。（図8上を見ながら）斜めに見ればグレー1 枚と白 2 枚のまとまりと考えられるから，白はグレーの 2 倍に 4 足せばいいね。

生徒D：（図8下を見ながら）このように半分に分けると白はちょうど道の長さの 2 倍になってるよ。表からも分かるよ。

生徒E：1 段目と 3 段目の白は道の長さから1引いた数で，2 段目は 2 枚だから，（道の長さ－1）×2＋2になるよ。

生徒Bの活動は，新たに表を作成し，生徒C，D，Eは絵図や言葉の式をもとにタイル数の増え方を考える活動が行われ，特徴が考察されている。タイル数の増え方が記入された表や，タイル数の求

め方が表現されている図8のような絵図，そして言葉の式は，この段階で発達した model-for と考えられる。文脈への依存度は徐々に低くなっており，心的にも model-of から model-for への移行が想定される。

生徒F：（図8や表を作成しながら）道の長さをLとおくとグレーはL－2，白は2Lとおけるね。

生徒Fの活動は，タイル数を文字式で表すようになり，一般的でフォーマルな知識が形成されたといえる。

7．終わりに

本稿では，先行研究をもとに，具体的な事象に基づいた問題が重要であるとの知見を得た。RMEの思想のもと現実世界での有意義な問題と数学を結びつけ，構成されている MiC の分析や，RME のモデルに着目した子どもの思考過程分析を想定してきた。今後は MiC の枠組みによる教授実験を行い，子どもの思考過程をさらに細かく分析することで，関数単元における指導改善の示唆を得るものと考える。

引用・参考文献

Freudenthal,H(1991).Revisting Mathematics Education:China *Mathematics education library;v.9* Lecture.Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer,K.(1997). Mediating between concrete and abstract. In T.Nunes & P.Bryant (eds.), *Learning and Teaching Mathematics:An International perspective*(pp.315-345). UK: Psychology press.

Gravemeijer.,Cobb,P.,Bowers,J.&Whitenack,J. (2000).Symbolizing,modeling,and instructional design.In P.Cobb,E.Yackel, &K.McClain (eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classroom* (pp.225-273).Mahwah NJ:Lawrence Erlbaum Associates

橋本英明．(2007)．確率の授業における中学生の知識の形成過程についての研究．上越教育大学数学教室，*22*，65-76

林弘．(2001)．一次関数における学習過程に関する考察－事象からモデルを構成する活動を重視した教授実験を通してー．上越教育大学数学教室，*16*，81-90

桐山眞一(1999)．中学生における関数の理解に関する研究ー一次関数を事例としてー．平成10 年度修士論文.

国立教育政策研究所．(2007)．平成19年度全国学力・学習状況調査：調査結果のポイント．中学校数学．文部科学省

（http://www.nier.go.jp/tyousakekka/tyousakekka.htm）

MiC.(1998).Teacher Resource and Implementation Guide. Cicago:Britannica

三木俊幸．(2001)．授業における数学的知識の発展的構成に関する研究－連立方程式の学習場面における新たなモデルの導入を通してー．上越教育大学数学教室，*16*，103-114

高橋等．(2003)．子どもの算数・数学的活動を大事にする，湧き出させる．上越教育大学数学教室，*18*，31-48

高橋裕樹．(2003)．比の三用方を伴う小数の乗法及び除法における子どもの知識の構成過程について．上越教育大学数学教室，*18*，101-110

高橋薫(2002)．事象から形式的な表現への過程を重視した一次関数の授業．上越教育大学数学教室，*17*，91-102

Treffers,A.(1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L.Streefland(ed.),*Realistic mathematics education in Primary School*(pp.21-56).

横関達人．(2005)．実験を伴う関数授業における子どもの思考過程についてー数学的モデリングに着目してー．上越教育大学数学教室，*20*，121-132

Van den Heuvel-Panhuizen,M.(2003).The didactical use of models in realistic mathmatics education:an example from a longitudinal trajectory on percentage.*Educational Studies in Mathematics*,54,9-35.