

グラフ電卓を用いた資料の活用における単元設計の基礎的理論

下平 将揮

上越教育大学大学院修士課程 1 年

1. はじめに

平成 24 年度より全面実施される中学校学習指導要領(文部科学省,2008)に向けて，その内容の移行措置がはじまった。今回の改訂を受けて，筆者が注目しているキーワードは，数学的活動と新設単元であり新たな領域構成として加わった資料の活用である。

数学的活動については，以前と比べてさらに具体的かつ明確化され，数学の楽しさやよさを実感する学びの場への実現に向けて示されている。これを関数領域に限って例を取り上げると，数量関係を表す方法には大きく分類して表，式，グラフの 3 通りがあり，生徒はそれぞれのもつよさや目的を理解した上で，自分が妥当であると判断した表現を選択し，問題解決を行っていく。この学習活動の中で，なぜその方法を用いたのか，その表現のよさとはどのようなことなのか，結果との比較についてはどう考えるのか，など自分の追究過程を説明したり，相手の考え方について理解したりする活動を仕組むことができる。

新設される資料の活用については，本格的に始まる 2 年後を視野に入れながら，授業展開と学習指導の充実への実現を図っていく。そのために，資料の整理や活用に焦点を当て，単元設計や様々な教材開発を通して一考察を得ていきたい。筆者は 5 年ほど前よりグラフ電卓に着目し，主に関数領

域の授業に導入し実践してきた。内容は，単に数学モデル化された題材から導入するのではなく，現実事象に潜んでいる様々な現象から出発し，単純化した仮説を立て，数学を使って自ら進んで解決を行っていくようなものとした。これは，平成 20 年 3 月に告示された中学校学習指導要領(文部科学省,2008)の目標に掲げられているように，事象を数理的に考察し表現する能力を高め，数学のよさや有用性を実感することができるという目標とも重なる。しかし，実際には課題も多い。例えば，現実事象と数学との連結材として理論的に効果が期待されている数学的モデリングがどれほど機能し，モデルの深化を遂げているのか。また，グラフ電卓など，テクノロジーの利用が生徒にとってどれだけの効果をもたらし，今後の学習に活かされてくるのかについても深く吟味していかなければならない。

そこで本研究の目的は，中学 1 年生で学習する資料の活用の単元において，テクノロジー利用による子どもの数学する活動の促進を捉える視点を明らかにしながら，単元設計のための基礎的理論を構築することである。

本稿では，第一に，これまでの統計教育に関連する変遷過程について調査した概要と今後の方向性について述べる。第二に，湊(1992)によるコンピュータ・グラフィックを含む教材提示方法に関わる研究から，

学校教育におけるテクノロジーのあり方について述べる。第三に、関数単元におけるテクノロジーを用いた先行研究から、方略のカテゴリーや数学の拡張性、理解の深まりに関する知見を基に考察し、第四に、現実事象と数学との関連から数学的モデリング過程の研究に触れる。そして最後に、中学校数学における記述統計的モデリングの基礎的な枠組みを構築する。

2. 統計教育に関連する研究と変遷過程

2.1. 統計教育の歩みと課題を扱った研究

澤田(2001)によると、データ処理、確率・統計領域の過去 10 年間における日数教論文発表会論文集での論文発表が 2 編にとどまっている現状を指摘しており、二宮(2004)もまた、統計教育に関する研究や実践の少なさを日数教会誌や日数教論文発表会論文集の掲載数から実態として挙げ、危惧している。さらには、長崎・國宗・太田ら.(2006)による数学教育に関する研究者調査の結果の分析において、「社会では、統計的な手法に乗せるまでの見方や考え方や、統計的に表現されたデータの読み取りなど、統計的な見方や考え方が必要とされているといえよう」と指摘していることから、今まで統計に関する研究が軽視され、学習指導が希薄であった状況を垣間見ることができる。資料の活用における学習内容や単元設計、統計的モデリング、評価方法などの研究が急務な課題である。

2.2. 記述統計を中心とした変遷の歩み

筆者は、単元設計の基礎的理論を構築していく過程において、我が国の記述統計教育を中心とした教育課程変遷について調査し、時代的背景も考慮して考察を行った。それらをまとめたものを表 1 に示す。

表 1 記述統計を中心とした変遷の歴史

変遷順	年代	該当学年	指導項目(抽出)	◇特色・時代的背景
1	1931 年(昭和 6)～ 1942 年(昭和 17)	—	—	・統計は含まれない
2	1943 年(昭和 18)～ 1946 年(昭和 21)	中学校(旧制)	第一類 統計, 近似値, 誤差	・第二次世界大戦下から終戦後という混乱期であり, 研究や実践は十分に成されていない。
3	1947 年(昭和 22)〔試案〕	第 9 学年	c: 統計と生活 1. 社会現象と統計表について話し合う。 2. 社会現象と統計図表について話し合う。	◇戦後最初の学習指導要領 ・日常のいろいろな現象に即して, 社会と自分との生活を中心に数学を関連させた指導内容や目的が設定されている。 ・数学が用具的なものとして位置付けられる。
4	1951 年(昭和 26)〔試案〕改訂版	高等学校「一般数学」	<生活経験> ・測定値について, その代表値の信頼度やその制限の意味を理解し, また, これを計算に用いる。 (用語) 相加平均, 代表値 (例) ○具体物の物の面積・体積などを計算するのに, 測定値の平均や, その制限を用いる。 <生活経験> ・社会現象について, その実態を理解したり, 将来を予測したりするのに, 統計的な資料を用いる。 (用語)	◇生活単元学習 ・「具体から抽象へ」「経験中心」の考えがいかなる指導法による場合にも原則の根幹となる。 ・中学校では第 7 学年で新聞や雑誌等に見出される棒グラフ・円グラフを読み取る。また, わかりやすくするためにグラフで表す学習を行う。

4	1951 年 (昭和 26) 〔試案〕 改訂版	高等学校 「一般数学」	モード, 中央値, 標準偏差, 相関関係, カルトグラム (例) ○身長が大きい方か小さい方かを判断するために, その年齢における身長の平均を調べる。 ○社会のいろいろな問題についての世論調査を研究して, その価値と限界とを調べる。	
		高等学校 「解析Ⅱ」	<指導内容> Ⅱ. 資料を整理し, 解釈すること。 (用語) 度数, 度数分布, 階級, 変量, 偏差, 標準偏差, 相関表, 代表値, 相加平均, 加重平均, モード, 中央値, 一部調査	
5	1956 年 (昭和 31) 改訂	高等学校 「数学Ⅰ」	<内容> e: 統計 (具体) 資料の整理, 代表値, 標準偏差, 相関関係, 相関係数	・高等学校のみの改訂 ・体系的な指導の充実化により, 例えば「数学Ⅰ」に代数編と幾何学編を設けた。
		高等学校 「数学Ⅲ」	<内容> e: 確率と統計 (具体) 確率の意味, 二項分布, 推測統計など	
※ 1958(昭和 33)年 8 月, 学習指導要領改訂以降, 統計領域の大きな変遷は見られないため, 内容を中学校のみ(確率を除く)に限り記述する。				
6	1958 年 (昭和 33) 8 月告示 ↓ 10 月試行	中学校 「第 3 学年」	C 数量関係 (4)資料を整理し, 表, グラフ, 代表値などを用いて, その資料の傾向を知ることができるようにする。 ア 度数分布	◇系統学習への転換

6	1958 年 (昭和 33) 8 月告示 ↓ 10 月試行	中学校 「第 3 学年」	の意味とヒストグラムの見方 イ 代表値の意味 ウ 簡単な場合の相関表や相関図の見方 (用語と記号) 度数, 分布, 階級, ヒストグラム, 代表値, 相関図, 相関表	・日本の高度経済成長に併せて, 数学と科学技術との関係を知らせたり, 確かな根拠から筋道立てて考えていたりする能力や態度に比重を置いている様相が伺える。
7	1969 年 (昭和 44) 4 月告示 ↓ 1972 年 (昭和 47) 4 月施行	中学校 「第 1 学年」	D 確率・統計 (1)目的に応じて資料を収集, 整理し, 表, グラフ, 代表値などを用いて, その資料の傾向を知ることができるようにする。 ア 度数分布の意味とヒストグラムの見方 イ 相対度数の意味 ウ 代表値の意味 (2)次の用語を用いることができるようにする。 度数, 分布, 階級, ヒストグラム, 相対度数, 累積度数, 代表値	◇数学教育現代化 ・目標に「事象を数理的にとらえ, 論理的に考え, 統合的に考察し, 処理する能力を育成する」と掲げられていることから, より高度な概念を早期に導入し, 定着を図ることが求められていたと推察される。
		中学校 「第 3 学年」	D 確率・統計 (1)簡単な場合の統計的資料について, 散布度や相関の見方を理解させる。 ア 標準偏差の意味 イ 相関表および相関図の見方 (2)標本調査の考えの基本になる事がらを理解させる。 ア 簡単な場合に, 標	・領域項目として「確率・統計」が新たに独立して設置されている。

7	1969 年 (昭和 44) 4 月告示 ↓ 1972 年 (昭和 47) 4 月施行	中学校 「第 3 学年」	本における比率などから、母集団における比率などが推定できること。 (3)次の用語を用いることができるようにする。 標準偏差, 相関表, 相関図, 標本, 母集団, 標本調査	
8	1977 年 (昭和 52) 7 月告示 ↓ 1981 年 (昭和 56) 4 月試行	中学校 「第 2 学年」	D 確率・統計 (1)目標に応じて資料を収集し、それを表、グラフなどを用いて整理し、代表値、資料の散らばりなどに着目してその資料の傾向を知ることができるようにする。 ア 度数分布の意味とヒストグラムの見方 イ 相対度数や累積度数の意味 ウ 平均値や範囲の意味 [用語・記号] 度数, 階級	◇基礎・基本の重視 ・「ゆとりと充実」の基で、内容を精選し、現代化の修正を行った。 ・第 1 学年から「D 確率・統計」領域が修正・移行された。
		中学校 「第 3 学年」	D 確率・統計 (2)標本のもつ傾向から母集団のもつ傾向について判断できることを理解させる。 ア 母集団と標本 イ 標本における平均値や比率	
9	1989 年 (平成元) 3 月告示	中学校 「第 2 学年」	C 数量関係 (3)目的に応じて資料を収集し、それを	◇社会の変化への対応

	↓ 1993 年 (平成 5) 4 月施行	中学校 「第 2 学年」	表、グラフなどを用いて整理し、代表値、資料の散らばりなどに着目してその資料の傾向を知ることができるようにする。 ア 度数分布の意味とヒストグラムの見方 イ 相対度数の意味 ウ 平均値や範囲の意味 エ 相関図と相関表の見方 [用語・記号] 有効数字, 近似値, 誤差, 度数, 階級	・再び、領域が狭義的となり、確率・統計は、「C 数量関係」に含まれることとなった。指導学年は 1977 年とほとんど変更点は見られない。 ・情報化への対応
		中学校 「第 3 学年」	C 数量関係 (3)標本のもつ傾向から母集団のもつ傾向について判断できることを理解する。	
10	1998 年 (平成 10) 12 月告示 ↓ 2002 年 (平成 14) 4 月施行	—	—	◇「ゆとり」の中での「生きる力」の育成 ・学校完全週 5 日制の導入や総合的な学習の時間の創設など、教科の時間数が大幅に削除され、それに伴い内容も厳選された。
11	2008 年 (平成 20) 3 月告示 ↓ 2012 年 (平成 24) 4 月施行	中学校 「第 1 学年」	D 資料の活用 (1)目的に応じて資料を収集し、コンピュータを用いたりするなどして表やグラフに整理し、代表値や資料の散らばりに着目してその資料の傾向を読み取ることができるようにする。 ア ヒストグラムや代表値の必要性和意味を理解すること。 イ ヒストグラムや代表値を用いて資料の傾向をとらえ説	◇「ゆとり」教育の見直し ・領域構成について、現行の「数と式」「図形」「数量関係」の 3 領域から、確率・統計に関

1 1	※2009年 (平成21) 4月～ 先行実施	中学校 「第1学年」	明すること。 〔用語・記号〕 平均値 中央値 最頻値 相対度数 範囲 階級	する領域「資料の活用」を新設するとともに、「数量関係」を「関数」と改め4領域となる。 ・数学的活動や学び直しの機会を設定することの重視
		中学校 「第3学年」	D 資料の活用 (1) コンピュータを用いたりするなどして、母集団から標本を取り出し、標本の傾向を調べることで、母集団の傾向が読み取れることを理解できるようにする。 〔用語・記号〕 全数調査	

統計が初めて中等教育に登場したのは、戦時中の1943(昭和18)年であった。終戦後の1951(昭和26)年、高等数学一般目標の一部に「統計的な資料のとり方、整理のしかた、解釈のしかたについての理解を深めるとともに、物事を誤りなくとらえたり、正しく伝えたりする能力と、統計的な考え方を社会生活で正しく用いる態度とを養う」(p.)と記されているように、それは日本経済や技術の復興とともに統計と生活との関連を重視したものとなっている。1958(昭和33)年より中学校の教育課程において、資料を整理し、表、グラフ、代表値などを用いて資料の傾向を読み取る学習が開始され、その後の改訂では、学年間の移行措置は行われたものの大きな内容変更はなされず、時代は昭和から平成へと移り変わっていった。ところが、平成10年12月に告示された中学校学習指導要領(文部科学省、1998)において、教育課程全体が大きく変革することとなった。その中で約40年もの間、中学校の教育課程において実施されてきた統計領域は、第2学年の確率を除き、すべて削除されることとなり、その大部分が高等学校数学へと移行された。そして2008(平

成20)年3月、文部科学省より中学校学習指導要領(文部科学省、2008)が告示され、それまで影を潜めていた統計領域が、資料の活用という新たな名称の元で復活を遂げたのである。この資料の活用領域の大枠は、1969(昭和44)年の学習指導要領と類似することが表1よりわかる。これは領域体系としても同様のことがいえる。

また、中学校学習指導要領に記載されている計算機器類などの教具の使用についての記述の変遷は、表2に示したとおりである。

表2 学習指導要領(中学校)に記載されている計算機器関連に関する事項

告示西暦 (年号)	学習指導要領(中学校数学)の指導計画の作成と内容の取扱い〔抜粋〕
1958年 (昭和33)	※“計算機”などという用語は一切見られない。
1969年 (昭和44)	「数の計算に当たっては、必要に応じて、そろばん、計算尺や計算機を使用して、学習の効果を高めるように配慮するものとする。」
1977年 (昭和52)	「図形の計量、統計などにおいて数値計算を行う場面では、必要に応じて、そろばん、計算尺又は計算機を使用して、学習の効果を高めるように配慮するものとする。」
1989年 (平成元)	「各領域の指導に当たっては、必要に応じて、 <u>コンピュータ</u> 等を効果的に活用するよう配慮するものとする。」
1998年 (平成10)	「各領域の指導に当たっては、必要に応じて、そろばん、電卓、コンピュータや情報通信ネットワークなどを活用し、学習の効果を高めるよう配慮するものとする。特に、数値計算にかかわる内容の指導や観察、操作、実験などによる指導を行う際にはこのことに配慮するものとする。」
2008年 (平成20)	「各領域の指導に当たっては、必要に応じて、そろばん、電卓、コンピュータや情報通信ネットワークなどを適切に活用し、学習の効果を高めるよう配慮するものとする。特に、数値計算にかかわる内容の指導や、観察、操作や実験などの活動を通じた指導を行う際にはこのことに配慮するものとする。」

さらに“グラフ電卓”の使用に関しては、

平成 10 年の中学校学習指導要領解説(文部科学省, 1998)に,「電卓の手軽さとコンピュータの簡易機能を持ち合わせたグラフが表示できる電卓の活用も積極的に行いたい。」(p.126)と初めて明示された。このことは,この度改訂された中学校学習指導要領解説(文部科学省, 2008)にも具体的な使用例や効果とともに同様に記述されている。

2.3. 資料の活用における新学習指導要領

(文部科学省, 2008) からみたテクノロジー

平成 20 年 3 月に文部科学省より告示された中学校学習指導要領(文部科学省, 2008)では, 第 1 学年と第 3 学年における資料の活用領域の内容にそれぞれ「コンピュータを用いたりするなどして～」という文言が明記されている。これは現実の世界において, 避けては通れない不確定な事象に関する様々な情報と直面した際, グラフや代表値を手作業で作成したり求めたりすることの重要性を踏襲しつつ, 学習の目的やねらいに応じてコンピュータを積極的に用いることの可能性を述べているものである。資料の活用において, 多種多様なデータから処理した結果を読み取ることに重点が置かれた場合では, コンピュータ等のテクノロジーを利用することが威力となるであろう。そうした中で筆者は, 将来を見越した統計学習において, テクノロジーの一端であるグラフ電卓の可能性を研究するものである。

3. 湊(1992)による円周角の不変性の研究

湊(1992)は, 中学校で学習する円周角の不変性を取りあげ, コンピュータ・グラフィックを含む幾つかの教材提示方法について研究した。円周角を検証対象とした理由の一つとして, 映像化が容易で, 教材提示のためのまわりくどい細工は必要なく, 既

にさまざまな教材, 教材の提示方法が開発されていることを挙げている。この中で教材提示方法を, 計 8 通り示し検証している。湊(1992)は代表的な方法として, まず, コンピュータ・グラフィックを使い, 円周上に沿って動く点とそれにとまって移動する円周角の様子を見る方法(CG)を取り上げている。ここで, コンピュータ操作の利点を活かし, 同一の円で弧を変えたり, 円の半径を変えたりして上記と同様なことを可能とする。さらに, CG と同様な画面をビデオによって放映する方法(V1)や, 一定角をもつ板などを机上に描いた弧に沿って移動しているところをビデオに記録し, その様子を見る方法(V2)である。コンピュータやビデオを活用する方法の他に, 円, 弧が描かれた TP シートを OHP 上に置き, もう一枚の TP シートに描いた一定角を弧に沿って動かして観察する方法(TP), 学習用紙やノートに描いた円, 弧について 1 つの円周角の大きさを写し取った紙や TP シートに描いた角を動かし観察する方法(P1), 板や釘による教具を用いた方法(M)などの教材提示を準備した。湊(1992)は, これら 8 つの教材提示方法に対して, 5 つの視点からの評価を与え, 表 3 のように結果にまとめた。なお湊(1992)は, 意欲の視点は一般的な評価を下すことは困難であるため, この論では評価を与えないことにしている。

表 3 湊(1992)による教材提示方法の評価

教材 提示 方法	視 点						
	教育内容		認知様式			意欲	
	C1 (点)	C2 (弧, 円)	C3 (E)	C4 (I)	C5 (S)	C6 (生)	C7 (教)
① CG	B	A	D	A	D	・	・
② V1	B	B	D	A	D	・	・
③ V2	A	B	D	A	D	・	・
④ TP	A	B	C	A	D	・	・
⑤ P1	A	B	A	B	D	・	・
⑥ P2	B	B	B	B	D	・	・
⑦ M	B	C	A	B	D	・	・
⑧ DE	A	A	D	C	A	・	・

注)表中の評語は、A：十分に視点を満たす、B：かなり視点を満たす、C：視点をあまり満たさない、D：視点を満たさない、である。

教材提示方法	視点の見方
CG：コンピュータ・グラフィック	C1：ある特定の円 O とその上の特定の弧 AB について、点 P に関する円周角の不変性
V1：ビデオ放映①	
V2：ビデオ放映②	C2：一般の円、弧に対する円周角の不変性
TP：トランスペアレンシー	C3：行動的様式(E)が働くこと C4：映像的様式(I)が働くこと
P1：学習用紙、ノート①	C5：記号的様式(S)が働くこと
P2：学習用紙、ノート②	C6：生徒の学習意欲が高まること
M：板、釘による教具	C7：教師の指導意欲が高まること
DE：論証(証明)	

ここで得た結果として、湊(1992)は、学習用紙やノートを使い合わせて切った角、あるいは TP シートに写し取った角を弧に沿って動かしてみるという、古くさく、見栄えのしない教材提示方法が最良となったと述べている。また、教師の意欲面は高くなりにもくいかもしいが、生徒の主体的活動を大切にするという観点からも、映像の単なる客観に成り下がりがかねない CG や V1, V2 より秀でていとも述べている。そして結語的には、テクノロジーを批判する目的ではないことを考慮した上で、教材提示方法について、教師の工夫に関心が強く向かうことにより、教材がもつべき基本的性格が等閑視されてはならないことを、教材を食品に例えて主張している。

ところで、文部科学省(2008)が実施した「学校における教育の情報化の実態等に関する調査結果の概要」によると、平成 21 年 3 月現在、学校での光ファイバー回線を利用した高速インターネット接続率は、全国全体で 63.3%に到達し、中でも高等学校は 84.5%に達している。100%という数値を示している都道府県も珍しくない。また、教材研究や授業指導の準備・評価等などに ICT(情報通信技術, Information and Communication Technology)を活用する能力に対し、「わりにできる」若しくは「ややで

きる」と回答した教員の割合が全体で 5 割程度であった(文部科学省, 2008)。この結果から、教員自身は、ある程度 ICT を活用できたとしても、児童や生徒たちにそれを指導したり評価したりする能力がまだ兼ね備えていないという現状が見てとれる。さらに踏み込んで解釈すれば、仕事ではコンピュータを利用するが、授業ではその利用に対して消極的であるとも受け止められる。

時代や社会的背景の要因から、幅広い年齢層の大人たちの間でもコンピュータ等のテクノロジーが身近となり、普及している。このような状況下において、テクノロジーに高い興味や関心をもつ教師が授業を通してテクノロジーを利用した場合、その影響を受容し、子どもたちもまた便利だ、面白いと感じ得るかもしれない。教材によっては、グラフィック・ツールに適した子どももいるであろう。さらには、近い将来、我が国の IT 関連技術を担っていく子どもたちもいるのかもしれない。このような現状を考慮すると、学校教育とテクノロジーに関して、すべてが否定されるものではないのではないのか。

一方で、湊(1992)の研究から、グラフィック・ツールを使用した場合、円周角の不変性はディスプレイ上での視察からしか得られず、信憑性の面からは机上での手操作の方が勝っていた。このように、コンピュータなどテクノロジーへの過度な傾斜により、教科としての数学の本質に関わる条件が考慮されなくなる可能性も潜んでいる。さらにテクノロジーをただ使えばよい、与えておけばよいというのではなく、子ども自身に評価させ、経験させる必要も忘れてはならない。非常に便宜かつ効率的であるテクノロジーを、数学教育上において、どの用途や目的のために適用するのかを考慮して教材研究を推進していくことが大切である。

3. テクノロジーに関わる先行研究

3.1. 調査の概要と方略

Zbiek(1998)は、現実事象と数学との関連や結び付きについて調べるため、数学的モデリングに着目し、曲線作図ソフトなどのテクノロジーがモデル生成にどのような影響を与えるのか調査した。Zbiek(1998)は、先進的な研究を進める中等数学教師 13 名を調査参加者とし、現実問題に直面したとき、どのようなツールを適用し、妥当性を判断していくのか、方略の機能と関連させて明らかにしている。調査問題は大きく分類して実験に関わる問題 2 題と日常生活に関連した 1 題であり、どれも制限のないオープンエンド課題であった。そこで、参加者は 4 つの一般的なカテゴリーを使用した。1 つは FFS(Fitted-Function Selector, 回帰関数分離器)と呼ばれる関数分離器である。これは、一次関数から四次関数、加えて指数関数の計 5 つの関数式が、どの程度データと一致、適合しているのかを示す判断数値(goodness-of-fit values, 適合度の良好値)を搭載したものである。2 つ目は、複数のグラフ化を行った状態から最適な近似関数を探究していくプログラムを兼ね備えた PFG(Potential Function Generator, 可能性のある関数生成プログラム)であり、3 つ目は、相関図から関数式を任意に変化させながら適合の度合いを視覚的に判断していくソフト SGT(Scatter Plot / Graphing Tool, 相関図/グラフ化ツール)である。そして 4 つ目は、このような曲線作図ソフトを一切使わず、個人的な経験と洞察力に判断を委ねながら追究していく方略 UUT(Unneeded / Unused Tool, 必要とされない/使われないツール)である。

3.2. 妥当性を判断するための 4 つのモデリングアプローチと考察

3.2.1. FFS の実際

FFS を用いて追究していった参加者は、グラフィック的な視点でほとんど見ることなく、図 1 に示されているような適合度の良好値のみに依存し、100%により近いものを探して判断していった。

	－ 回 帰 式 －	－ 適合度の良好値 －
[一次関数式]	$-0.1486206x + 2.419784$	92.49977
[二次関数式]	$0.01864761x^2 - 0.3910397x + 3.072452$	98.43547
[三次関数式]	$0.003734978x^3 + 0.09147926x^2 - 0.8059381x + 3.717874$	99.79320
[四次関数式]	$0.0004195996x^4 - 0.01464541x^3 + 0.1888089x^2 - 1.149245x + 4.102454$	99.84485
[指数関数式]	2.6224×0.908^x	96.99148

図 1 Zbiek, R. M.(1998)による斜面上を転がるゴルフボールのデータ値による回帰関数表現と適合度の良好値(FFS)を示す。

実際、Zbiek(1998)によると、参加者は、その数値がどのような基準を基に表示されているか、正確さがどのような意味を示しているかについて詳しく語らなかったという。これは、適合度の良好値が絶対的な数値として生徒に印象付けられ、受け止められることから、結果について検討する余地がほとんど皆無となる危険性を表している。テクノロジーは便利な道具であるものの、先に述べたように、道具に活かされている学習となった場合、現実問題の根幹には到底到達することができない要素も含んでいるのである。したがって、この事例のアプローチは、適切な曲線回帰を分離する道具としての役割のみを担っているものと考えられる。

3.2.2. PFG の実際

PFG で追究した参加者は、FFS で算出された関数式を回帰グラフにして考察し、指数関数が最も妥当であると判断した。その理由は、おおよそ上昇するグラフなのか、下降していくグラフなのかという大まかな形状から選択を絞り込み、さらに画面では表示されていない範囲に着目して、こうなるであろうという自分の予想を基に判断していったという。(図 2 参照)

この PFG によるアプローチでは、個人の予測が追究の結果を左右する大きな鍵となる。グラフ電卓を利用した授業において大切なことは、

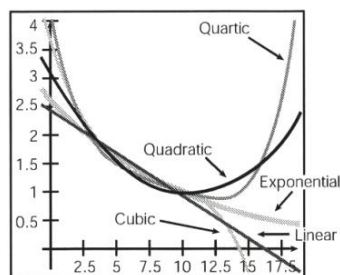


図 2 Zbiek, R. M.(1998) によるスケートボードの実験データによる回帰グラフ

問題から“こうなるであろう”と自分なりの予想や予測を立てた上で追究に臨むことである。

筆者が以前行った上越市の人口推移の予測問題において、データ収集に気をとられ、生徒に予測を立てさせる時間を確保せず、グラフ電卓を使って追究させたことがあった。この結果、処理させ求めた数学的結果について吟味したり、修正を施したりすることができなかった。また、PFG を用いた参加者の視点をグラフ電卓の機能に置き換えて解釈すると、これは、ZOOM 機能に相当し、視野を拡げて全体を捉えたり、狭めて局所的に観察したりすることを伴うものである。しかしながら、データプロットの誤差や修正ができないこと、グラフ選択の幅が少ないことが、やはり追究過程における見通しや可能性を狭めており、大ざっぱな解決のみに限定されるのである。

3.2.3. SGT の実際

SGT は、相関図を作成するためのソフトウェアの一つである。この機器を使用した参加者の主な理由は、FFS や PFG の方略は、まずもって曲線の関数やモデルグラフありきという考えからはじまっており、その正確さが逆に、データと一致していない部分のみを修正することが困難であるということからであった。参加者は、SGT を使って相関図を作成し、図の 8 点(図 3)のプロッ

トに最も近づくグラフを探し出すために $f(x) = 1/x$ から順に式を入力し、図 3 の(a)から(d)のように段階的に検討を重ねていった。そして、試行錯誤繰り返し行っていく中で、 $f(x) = 4/x^{0.6} - 0.25$ が最も受容できる関数式であると判断していったという。

この SGT の利点は、実測値がグラフ上にプロットされていることである。これにより参加者は、プロットにより近い関数式を断続的に入力し続け、回帰グラフを求めることができる。しかし、注目すべきことは、この 8 点のみのプロッ

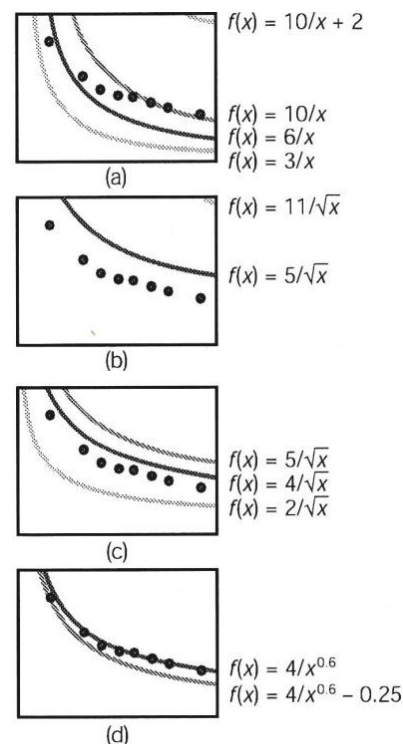


図 3 Zbiek, R. M.(1998)によるゴルフボールデータに対するユーザー定義関数モデル数列

トばかりに意識が向いてしまうことということである。言い換えれば、この 8 点をすべて信頼しているということでもある。実測値には必ず誤差がつきものであり、この問題とどう接し対処していくかが一つの大きな課題である。さらにこの方法は独創的な余地が入る得るものであり、確実な一般性を保証するものではない。

大澤(1998)によれば、グラフの予想と採用に関して、闇雲に無批判的に単なるボタン押しとしてグラフ電卓を利用したのではなく、その後の数学的な数式処理も考慮して利用を図っている生徒が見られたという。やはり現実の世界と数学の世界とを試行錯

誤してせめぎ合いながら、最終的にどのグラフに決定し、判断していくかが大切なのである。

3.2.4. UUT の実際

4つ目の方略である UUT を用いた参加者は、日常事象における問題解決にこの方略を適用し、求めたい値をテクノロジーを用いずに経験的な考え方や方法で求めていったという。問題解決において、今までの個人の経験や体験に基づき、より身近な問題として捉えられる場合、既習の公式や定理を用いて自力解決していくこともまれにある。この場合、グラフなどの解釈ではなく、代数的な解釈となる。このことにより、ある一定の結果は得られるものの、すべて予定の範囲内で解決するのみである。さらに一つの数値のみを基準とし、割合などの概念を必要とし適応するため、比例・反比例的な見方のみにとどまってしまう。よってモデルは検証されておらず、それ故洗練されたものではない。

Zbiek(1998)はこれらの調査から表 4 に示すように、ツールに対する依存度、数学と現実との相対的な役割、使用頻度から 4 つのカテゴリー間で区別を行った。

表 4 現実事象問題に対する数学的な役割に関する 4 つのアプローチ間の区別

モデリングアプローチ	回帰分離器(FFS)	可能性がある関数生成プログラム(PFG)	相関図/グラフ化ツール(SGT)	必要とされない/使われないツール(UUT)
ツールに対する依存	全体的	本質的	最小限	なし
数学の影響	適合度の良好値との比較	グラフの解釈	グラフ化し、解説する；グラフと代数の規則とのリンク	使われた比率あるいは公式(論理式)；比較されたデータとモデル値

現象の影響	変数のために使用された	モデルの選択のために使用された	モデルの選択と生成のために使用された	変数とモデルを試すために使用された
使用頻度	即刻；かなり持続	終局；かなり普通	まれ；特定の学生	まれ；特定の課題
関連した以前の論文	応用問題解決とモデリング課題	状況に対するグラフの解釈	グラフに対する状況解釈	代数式に対する状況解釈

Zbiek(1998)は、このようなカテゴリーを万全に準備し、即時的かつ継続的な効果を狙うためには、応用問題解決の実践において発揮されるのかもしれないとした上で、今後の課題は、未知のアプローチを開拓し、そのアプローチが断層的な関係をもっているのかどうかを探求するとともに、数学的モデリング過程の研究をさらに発展させることであると結論付けている。

4. 数学的モデリング

4.1. 数学的モデリングの先行研究

近年、現実事象や問題について数理的に考察し表現する能力を高めたり、数学のよさや有用性を実感したりする観点から、数学的モデリングの過程が重視され、日本でも注目されるようになった(三輪, 1983 : 池田, 1999 : 西村, 2001 : 川上, 2007)。なかでも、数学を応用することや活用することからの視点で、現実の世界と数学の世界とを連結する役割の一端を担っている。数学的モデリングの過程や捉え方は一様ではないが、本稿では、三輪(1983)、西村(2001)、川上(2007) の見解を述べる。

4.1.1. 三輪(1983) の数学的モデリング

三輪(1983)は、この数学的モデリング過程を図4のように3つのサイクルとして図

式化し、以下の(1)～(4)のように捉えている。

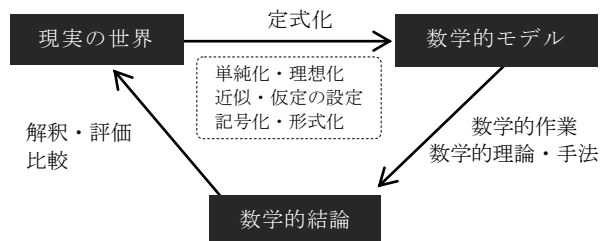


図4 数学的モデリングの過程(三輪.1983)

「それまでの経験・観察をもとにして、ある事象が要求するという認識があるという前提のもとで、

- (1) その事象に光を当てるように、数学的問題に定式化する(定式化)。
- (2) 定式化した問題を解く(数学的作業)。
- (3) 得られた数学的結果をもとに事象と関連づけて、その有効性を検討し、評価する(解釈・評価)。
- (4) 問題のより進んだ定式化をはかる(より良いモデル化)。」(p.120)

三輪(1983)は、数学的モデリング過程は、単に事象に対する数学的モデルをつくるということにとどまらず、それを使って作業し、評価し、一層改良するという全過程を含むことを強調している。また、モデリングの段階は、その順序通りに機械的に進むものでなく、逆行や何度もの往復が存在し、ときには飛躍もあると述べている。さらには、現実問題を数学を用いて解決する際に、より厳密な数学的モデルを作成しようとする過程と、数学的作業が容易である数学的モデルを作成しようとする過程とは相反関係にあるという。即ち、数学的作業の容易さと結果との妥当性のバランスを考えてモデルを作成する必要があると述べている。

4.1.2. 池田(1999)・西村(2001)の数学的モデリング

池田(1999)や西村(2001)らは、数学的モデリング過程を、三輪(1983)の3サイクルではなく、図5・6のように4サイクルで示している。

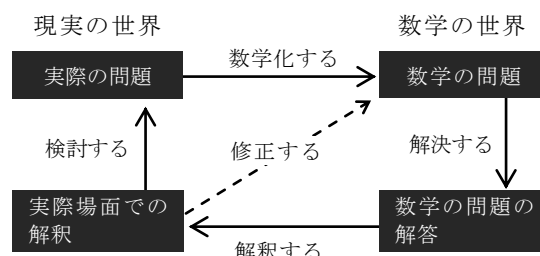


図5 数学的モデリングの過程(池田.1993)

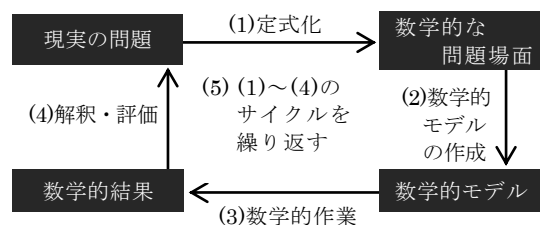


図6 数学的モデリングの過程(西村.2001)

池田(1999)は、数学的モデリング過程を実際の問題の解決を目標に、実際の問題を数学化して数学的モデルをつくり、解釈・検討して不都合が生じれば数学的モデルの修正を適宜繰り返す、より適した数学的モデルをつくっていく活動であると述べている。また、西村(2001)が述べる数学的モデリング過程は以下のとおりである。

「それまでの経験・観察をもとにして、ある事象が探求を要するという認識があるという前提のもとで、

- (1) その事象を目的に合った数学的な問題場面につくり替える(定式化)。
- (2) 数学的な問題場面から数学的モデルを導く(数学的モデルを導く)。
- (3) 数学的手法を用いて、数学的結果を得る(数学的作業)。
- (4) 得られた結果をもとの事象と関連づけ

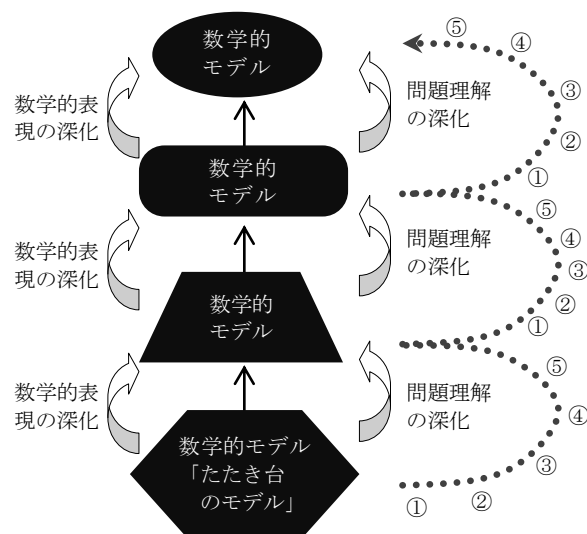
て、その有効性を検討し、評価する(解釈・評価)。

- (5) 必要に応じて、(1)～(4)を繰り返し、現実世界の問題のより進んだ解決をはかる。」(p.3)

両者の決定的な相違は、数学の問題(場面)から解答(結果)を得るまでの段階である。池田(1999)は、解決する過程を一括りしているのに対し、西村(2001)は、数学的モデルという段階を設け、数学的モデルの作成と数学的作業とを区別している。ここでいう数学的モデルの作成とは、抽出された情報を記号化、幾何学化、計量化、グラフ化することを意味し、数学的作業とは、それらを使って数学的結果を得ることを意味する。それに伴い、数学的モデルを現実の問題に適用する際、検討や解釈、評価のステップが両者により異なる。しかしながら、大きな差異は見られず、両者とも類似しているといってもよいであろう。

4.1.3. 川上(2007)の数学的モデリング

これまで授業で導入し、実践を試みてきた中で、川上(2007)による数学的モデリングの過程は、教師が主体的に妥当と思われる数学的問題をまず定式化する。そして、学習形態の中で四つの場を位置付け保証することで、授業を進めていく。川上(2007)は、数学的モデルの2つの変容、即ちモデルに用いられる数学的表現の深化とモデルの背後にある生徒の問題理解の深化に着目し、枠組みを設定した(図7参照)。そして、数学的モデリング過程を繰り返していくことにより、そのモデルがスパイラル的に修正・改善され、新たな数学的モデルの作成に活用されるというサイクル間の活動の継続性に伴い、数学的モデル自体が深化していく。



- ①…要素の抽出・選択／②…数学化／③…数学的处理／
④…数学的結論の解釈／⑤…数学的モデルの実証・評価

図7 数学的モデルの深化過程の捉え方
(川上,2007,p.7)

数学的モデリングでは、現実世界の問題を数学的に考察し、結論を得るために、それらを数学的に扱うことができるように定式化して、適切な数学的手法を用いて解決し、そこから得られた結果を現実世界に戻して解釈、比較、検討を行うことが要求される。この数学的モデリングの機能を高めるためには、解決した結果と照らし合わせたときの比較を精緻に行うことが必要であり、そのため川上(2007)のような一時限りの授業でなく、複数の時限に渡って授業を設計する必要がある。これらのことから数学的モデリングを新たに図式化すると図8のようになり、広義に解釈した過程は以下のようなものである。

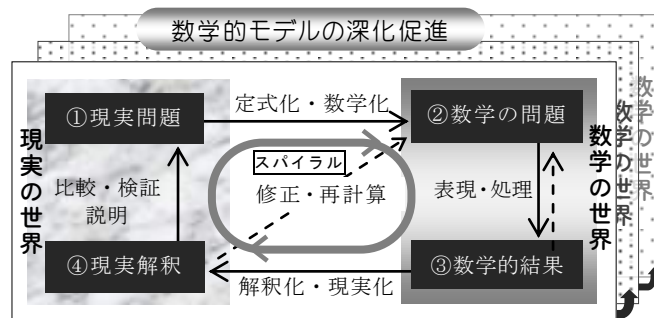


図8 広義に解釈した数学的モデリングの過程

- (1) その事象を目的に合った数学的な問題場面につくり替える。具体的には、現実世界における問題を、学習者が数学で処理できる状態に変えるために、単純化、理想化、仮説の設定等を行う(定式化・数学化)。
- (2) 数学的な問題から数学的結果を得る。具体的には、(1)で定式化、数学化された問題を表、式、グラフ等で表したり、仮説実験を行いデータを処理したりして結果を得る(表現・処理)。
- (3) 数学的結果から求めた解を現実の問題の言葉に翻訳する(解釈・現実化)。
- (4) そのモデルについて現実の状態と比較し、その有効性を検証する。また、他者にその根拠や理由を説明する(比較・検証・説明)。
- (5) モデルと現実的な結果との間に適切な関係がなく、不都合が生じた場合、再度モデルの仮説に立ち戻り、修正を施す(修正・再計算)。
- (6) 必要に応じて、(1)～(4)のモデリング過程を繰り返し行うことで、現実世界の問題のより進んだ解決を図るとともに、数学的モデルを洗練させている(数学的モデルの深化)。

考慮すべきことは、現実問題を扱うすべての場面で、そのモデル化がこの過程の段階を順次に踏むということではないということである。場合によっては、④現実解釈から①現実問題への段階の流れが実際にはやや不透明となり、図8における授業場面によって方向性が逆になる場合も考えられる。

5. 学校教育における記述統計的モデリングの基礎的な枠組み

統計の知識を用いる場面では、主に次の

2つのようなケースが多い。1つは大量のデータから予想し、傾向をつかんだり判断したりするとき、もう1つは少ないデータから全体を予想するときである。多量のデータを扱う場合では、集めたデータを適切に処理して整理を行い、集団の傾向を捉えていくことが必要となる。この記述統計(Statistical Description)は、中学校学習指導要領(文部科学省,2008)では、第1学年で学習することになっている。また、一部のデータ(標本)から調べたい全体(母集団)の傾向を予想したり、予測したりする推測統計(Statistical Inference)は、第3学年で学習することになる。統計学には経営統計学や環境統計学、応用統計学など、多種・多領域に渡り幅広く、現実事象とも深く密接している。そのため、資料の活用領域は、現実的な問題を扱う有効な機会となり得る。筆者は、この現実事象と数学事象とを結びつけるためにも、数学的モデリングは欠かすことができない過程であると捉え、3章ではZbiek(1998)の研究を、4章では、三輪(1983)、池田(1999)、西村(2001)、川上(2007)らの見解をもとに整理し、広義的にモデリングの過程を示した。今後、資料の活用に焦点化した単元設計における基礎的な理論を構築していく上で、記述統計的モデリングは、必要不可欠なものとなってくると思われる。

そこで、今年の冬は暖冬であったかどうか調べる場面について、想定されるプロトコルを以下に示し、前述の数学的モデリングの過程(図8)を検証する。

T1: [学習問題] 今年の上越市は暖冬であったと思いますか。

S1: 地球温暖化が話題となっているから、多分暖冬だったと思います。

T2: どのように調べればよいでしょうか。

S2: 今年の気温と10年前の気温を調べる。

S3: 今年の気温と私たちが生まれた13年前の気温を

調べる。

T3：何を比べればよいでしょうか。

S4：平均気温

S5：最低気温

S6：暖かい日の日数

T4：暖かい日とはどのような日ですか。

S7：（冬で考えて）10℃以上の日だと思います。

S8：0℃以上の日だと思います。

T5：〔学習課題〕今日は、今年の2月と13年前の2月の上越市の最低気温を示した資料から、暖冬であったか調べてみよう。

S9：平均を用いる。

S10：度数分布表に表す。

S11：ヒストグラムで表す。

S12：（階級の幅を決定し）0℃以上の日が少ないことに着目する。

S13：（階級の幅を決定し）階級幅0℃を使って判断する。

T6：〔全体発表〕では、自分の判断した考えを発表してください。

S14：同じ資料でも、階級や階級幅の取り方によって、ヒストグラムの形状が変わることに気付किながら、自分の判断を説明する。

S15：この2つのことだけで、暖冬であった（ではなかった）と判断してよいのだろうか。

S16：過去のデータをもう少し調べる必要がありそうだ。

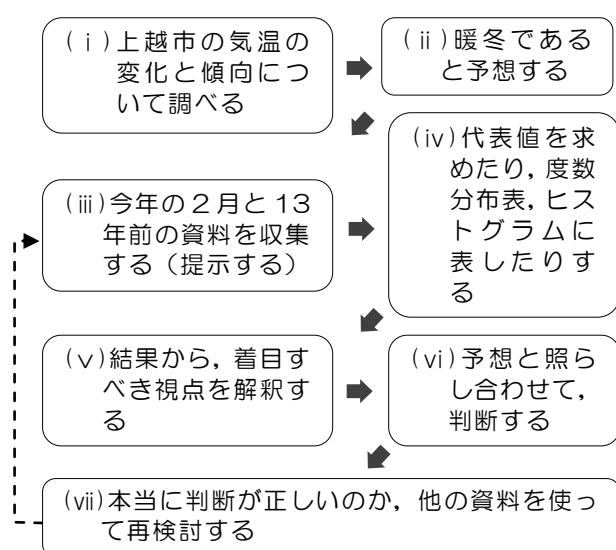


図9 モデル化のための想定枠組み

図8の数学の問題とは、ここでいう統計的仮説に相当し、現実問題の素データや実経験・体験などから生徒が予想や予測をする活動を指す。次に予想する活動から資料を収集する。資料収集は一見すると、現実根ざした作業であるものの、仮説を立てた後の活動であるため数学的作業に含める(定式化・数学化)。そして、記述統計モデルとして、平均値や中央値など既習した知識を総動員して代表値を決定したり、ヒストグラムに表して散らばりの様子を調べたりする(表現・処理)。数値やグラフから読み取った数学的結果、即ち、統計的結果を合わせて判断し、現実の問題に翻訳する(解釈化・現実化)。それから、その予想が正しかったのかどうか現実事象と照合し、検証する(比較・検証・説明)。その後、現実の問題に即しているのかどうか、もう一度別の標本を用いるなどしてモデリングのサイクルを繰り返し、同じような結果を得られれば、説明を与え、より進んだ結果を予測したり、決定に役立てたりすることができるものと考ええる。

この記述統計的モデリングと一般的に用いられる数学的モデリングとの決定的な差異は、厳密さという点にある。記述統計的モデリングの場合、数学的処理を経ているものの、現実的な現象を説明するための主観的な近似を避けられず、厳密な数学的モデルが生成されるのではない。よって、常に修正する活動を促すことが必要となるわけだが、その過程こそ、活用的要素を伴う重要な場面であると筆者は捉える。

6. おわりに

今後は、記述統計的モデリング過程における生徒の詳細な様子について、教授実験を介して緻密に観察し、サイクルの分析・考察を進めながら、さらにモデリングの修

正・構築を図っていききたい。また、資料の活用領域において、グラフ電卓の利用を図る手法が記述統計的モデリング実施上になどのような効果を波及させ、困難点を解消しうるのかも目視し、一応の知見を得ていきたい。そのためにも、生徒の興味や関心を惹くように、日常生活に密着した内容を精選し、単元構成していくことが、資料の活用における目標を尊重し得るものになる。

引用・参考文献

- Gonzalez Orlando, 磯田正美. (2009). Survey on Japanese Senior High School Teachers' Statistical Literacy : Focusing on Variability. 第 42 回数学教育論文発表会論文集. 日本数学教育学会.
- Zbiek, R. M. (1998). Prospective Teachers' Use of Computing Tools to Develop and Validate Functions as Mathematical Models. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 184-201.
- 飯高 茂, 松本幸夫, 岡部恒治. (2007). 数学英和小辞典. 講談社.
- 一松信, 岡田樟雄, 町田彰一郎ら. (1997). 中学校数学 2 : 資料の整理. 学校図書.
- 大澤弘典. (1998a). 中学校における数学的モデリングの指導についての研究 : 生徒によるグラフ電卓の利用を視点として. 上越教育大学大学院修士論文.
- 大澤弘典. (1998b). グラフ電卓の基礎的な利用例について : 数学的モデリングにグラフ電卓の利用を図る手法の前提として. 上越教育大学大学院修士論文.
- 大村 平. (2002). 統計のはなし. 日科技連出版社.
- 片桐重男. (1995). 算数教育の新しい体系と課題, 第 8 巻. 数学的な考え方を育てる「関数・統計」の指導. 明治図書.
- 川上 貴. (2007). 数学的モデルの深化過程の特徴 : 中学生によるモデリングを分析して. 日本科学教育学会研究会研究報告, 22(3).
- 木村捨雄. (2003). 「新しい知の創造」の視点に立つ 21 世紀の教育と統計教育の体系化. 全国統計教育研究協議会全国研究大会論文集, 第 49 巻, 10-28.
- 小平邦彦ら. (1981). 新しい数学 2 : 資料の整理. 東京書籍.
- 澤田利夫. (2001). データ処理, 確率・統計. 日本数学教育学会第 34 回数学教育論文発表会「課題別研究部会」発表収録. p.42.
- 四方義啓, 下田好行, 岩田修一ら. (2006). 学力向上につながる数学の題材 : 「知を活用する力」に着目して学習意欲を喚起する. 東京法令出版.
- 正田 實. (2006). 第 2 回統計教育の方法論ワークショップ : 統計教育の達成目標をさぐるリテラシーから統計的推論力, 課題解決力へ. 特別講演記録.
- 新編新しい数学 1 21 プラス : 平成 21 年度用補助教材. 東京書籍.
- 赤 攝也, 井上義夫ら. (1997). 新版中学校数学 2 : 統計. 大日本図書.
- 高田政和. (2003). 「数学」と新教科「情報」の関わりに関する研究. 兵庫教育大学大学院学位論文.
- 竺沙敏彦. (2000). 学校数学における現実の問題を解決するための数学的モデリング活動に関する研究. 兵庫教育大学大学院学位論文.
- 中込雄治. (1997). テクノロジーの活用で変化する指導形態を前提とした教材開発及び指導法の研究. 上越教育大学大学院修士論文.
- 長崎栄三, 國宗進, 太田伸也ら. (2006). 現在の学問や職業で使われている算数・数学 : 「数学教育に関する研究者調査」の結果の分析. 日本数学教育学会誌, 88 巻, 3 号, pp.29-43.
- 中澤房紀. (2009a). 新しい学習指導要領に対応した統計の授業と教材. T³ Japan 第 13 回年会誌, 148-155.
- 中澤房紀. (2009b). SSP で行った授業の教材紹介. T³ Japan 第 13 回年会誌, 84-89.

- 中矢 尚, 立山公平. (2009). 中等教育学校でのテクノロジーの導入. *T³ Japan* 第 13 回年会誌, 78-81.
- 長野県統計教育研究協議会. (2008). 信州の統計教育, 第 60 号, 信教印刷.
- 新村 出編. (2008). 広辞苑, 第六版. 岩波書店.
- 西村圭一. (2001). 数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究. *日本数学教育学会誌*, 第 83 巻, 第 11 号, 2-12.
- 二宮裕之. (2004). 統計教育の歴史：現在・今後の課題. *愛媛大学教育学部紀要, 教育科学*, 第 50 巻, 123-130.
- 日本学術会議数理科学委員会数理統計学分会. (2008). 数理科学分野における統計科学教育・研究の今日的役割とその推進の必要性.
- 能田伸彦ら. (1994a). 中学校・高等学校数学か教育課程開発に関する研究：離散数学の教材化とコンピュータ活用. 筑波大学数学教育学研究室.
- 能田伸彦ら. (1994b). テクノロジーを利用した教材開発のための研究動向資料集：関数のグラフ表現を中心にして. 筑波大学数学教育学研究室.
- 能田伸彦ら. (1995c). テクノロジーの活用法の開発に関する研究：関数の探究学習を中心にして. 筑波大学数学教育学研究室.
- 橋本純次, 栗田 稔ら. (1980). 数学 2：資料の整理. 啓林館.
- 平林一栄ら. (1986). 高等学校確率・統計：資料の整理. 第一学習社.
- 福森信夫, 戸田 宏, 小関 熙ら. (1996). 純新訂数学 2 年：資料の整理. 啓林館.
- 藤田 宏ら. (1997). 新編新しい数学 2：資料の処理. 東京書籍.
- 町田彰一郎. (2008). 新学習指導要領をどう実現するか：学習指導要領改訂の背景にあるもの. *教科研究数学*, No.186, 2-5.
- 湊 三郎. (1992). “円周角の不変性”の提示方法の認識論的視点からの評価. *日本数学教育学会*.
- 三輪辰郎. (1983). 数学教育におけるモデル化についての一考察. *筑波数学教育研究*, 2, 117-125.
- 未来へひろがる数学 1：平成 21 年度用補助教材. 啓林館.
- 文部科学省. (2008). 中学校学習指導要領.
- 文部科学省. (2008). 中学校学習指導要領解説 数学編. 大日本印刷.
- 文部科学省. (2009). 学校における教育の情報科の実態等に関する調査結果.
http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/zyouhou/1286417.htm