

「負数乗法とは何か」を考える授業

小林孝至

上越教育大学大学院修士課程 2 年

1. はじめに

筆者が，中学1年生のときの負数乗法の指導内容は「外挿法」と呼ばれる，図 1.1 のような規則（乗数を1ずつ減少させると結果として得られる値は2ずつ増加する。）を基に負数乗法を提示するものであった。

この指導内容を学習した筆者は，「マイナス掛けるマイナスがプラスである」ことを知る一方で，「負数乗法とは何か」を考えることはできなかった。

そこで，自身で「負数乗法とは何か」を考えるために，これまで小林(2010a, 2010b, 2011)の研究を行ってきた。その中で，主には数学史に学ぶことを通して「負数乗法とは何か」を考えることができた。本稿で述べる「負数乗法とは何か」を考えるとは，生徒が「負数乗法」という対象の理解を深めることはもちろん，生徒が「負数乗法を学ぶよさ」（第2節で後述する。）を感じる活動を目指すことである。生徒が「負数乗法とは何か」を考えることで，先人達が負数乗法から様々な内容を学んだように，これまでの既習知識をより深く理解し，「負数乗法を学ぶよさ」を感得することができると考えられる。

| |
|--------------------------|
| $(-4) \times (+3) = -12$ |
| $(-4) \times (+2) = -8$ |
| $(-4) \times (+1) = -4$ |
| $(-4) \times (0) = 0$ |
| $(-4) \times (-1) = +4$ |
| $(-4) \times (-2) = +8$ |
| $(-4) \times (-3) = +12$ |

図 1.1 外挿法

現在の負数乗法の授業と「負数乗法とは何か」を考える授業の大きな違いは，規約の取り扱いである。当然のことながら，算数においても規約は存在する。例えば， 2×3 と 3×2 の答えが一致することから，交換法則を規約とする場面である。このことから，生徒は日常的な事象を基に規約を与えることで，算数の世界を創っていることが分かる。一方，「負数乗法とは何か」を考える授業は，日常的事象としては扱えないような事象に対して，類似する日常的な事象を基に規約を考えることで，非日常的な事象をも扱うことができるようになる。そのため，生徒が算数において規約を意識する必要はないかもしれないが，「負数乗法とは何か」を考えるためには必要なものとなる。また，生徒に規約を意識させていない現在の負数乗法の指導内容は，「負数乗法とは何か」を考えるに至っていないのではないかと考えられる。

本稿の目的は，筆者が行った授業観察の記録と現在用いられている教科書を基に，現在の負数乗法の指導の問題点を明らかにし，現在の負数乗法の授業から「負数乗法とは何か」を考える授業への改善方法を考察することである。

そのために，まず，第2節は小林(2011)の研究を振り返ることで本稿における視点を明らかにし，第3節は小林(2011)で行った授業

観察の記録を基に現在の負数乗法の授業の特徴をまとめる。この特徴を踏まえ、第4節は教科書における指導内容を基に現在の負数乗法の授業の問題点を明らかにする。

次に、第5節で、この問題点を改善するために、教科書における指導内容に小林(2011)が示している4つの「改善方法」を導入することで、「負数乗法とは何か」を考える授業を提示する。そして、第6節で、本稿におけるまとめと今後の課題を述べる。

2. 本稿における視点

本節は、小林(2011)の研究を振り返ることで、本稿における視点を明らかにする。

小林(2011)の研究では、まず、現在の負数乗法の指導内容を「戦後の教科書」と「現在の現場における指導内容とその展開」に分けて、特徴をまとめた。「戦後の教科書」とは、昭和26, 36, 46, 55年、平成4, 13年検定済教科書、現行（平成22年度用）の教科書（平成17年検定済）である。「戦後の教科書」分析により、現在の負数乗法の指導内容は、大きく3つのアプローチ「物理的(physical model)、発見的(pattern finding)、公理的(mathematical principle)」(Mary.L.Crowley, Kenneth.A.Dunn, 1985)に分けられると結論付けた。

物理的アプローチとは、日常事象を基に負数乗法を解釈する方法（第3節で後述する。）である。発見的アプローチとは、「外挿法」(図1.1)と呼ばれる指導内容（著者が学生時代に受けた指導内容）であり、乗数と積の変化の関係（比例）を基に負数乗法の積を予測するものである。公理的アプローチとは、図2.1のように分配法則と方程式を基に負数乗法を公理的な考え方から導く方法である。

次に、小林(2011)は、生徒が負数乗法の学習で何を学習しているのか（本稿では「負数乗法とは何か」と呼んでいる）を把握できる指導内容へと改善するために、「負数乗法の歴

史的
理
解
段
階」と
「負
数
乗
法
を
学
ぶ
よ
さ」を
導
入
し
た。

$$\begin{aligned} 3+(-3) &= 0 \\ (-4) \times \{3+(-3)\} &= (-4) \times 0 \\ (-4) \times 3 + (-4) \times (-3) &= 0 \\ -12 + (-4) \times (-3) &= 0 \\ (-4) \times (-3) &=? \end{aligned}$$

図 2.1 公理的アプローチ

「負数乗法の歴史的理理解段階」とは、先人達が負数乗法を理解するために考えた方法を負数乗法の指導内容に適用したときに負数乗法が解釈されていく段階であり、「負数乗法を学ぶよさ」とは、次に示すような「負数乗法の歴史的理理解段階」を基に、生徒が負数乗法を学習するとき、そこから学ぶ内容である。

- (1) 算数的な考え方だけで理解できない問題を解決するためには、代数的な考え方が必要であることを感じさせることができる。
- (2) 算数では、乗法を累加・倍加と解釈していたが、新たに分配法則を基に解釈しなおすことで、代数的な考え方を学ぶきっかけにできる。
- (3) 生徒が代数的な考え方に触れ、算数と数学における考え方の違いを感じることで、次の単元「文字と式」を学習するための基礎を築くことができる。

「算数的な考え方」とは、規約および数と量の関係を意識せず、日常的な事象を基に法則を導く考え方であり、負数乗法があたかも自然的に日常的な事象から生じているような印象を生徒に与える。そのため、計算はできるが、四則演算や正数、負数とは何かなどを考える必要が生まれないことから、生徒は既習知識を十分に理解できない。

「代数的な考え方」とは、規約および数と量の関係を意識することができる考え方であり、非日常的な事象に規約を与える活動を通

して、四則演算や正数、負数とは何かを考えるきっかけを生徒に与える。そのため、生徒は、既習知識を十分に理解できる。

さらに、現在の負数乗法の指導内容の問題点を示した上で、生徒が「負数乗法を学ぶよさ」を感じられるような指導内容へと改善するために4つの「改善方法」(第4節で後述する。)を提示した。

これらのことから、生徒が「負数乗法を学ぶよさ」を感じられるような指導内容を生徒に提示することで、「負数乗法とは何か」を考える授業を提示できると考えられる。本稿では、小林(2011)の研究を基に規約、数と量に関する取り扱いに重点をおき、現在の負数乗法の授業の特徴および問題点を明らかにしていく。

3. 現在の負数乗法の授業の特徴

本節は、小林(2011)の研究で用いた授業観察の記録の一部【1クラス、 $(+) \times (-) = (-)$ の指導】を基に、現在の負数乗法の授業の特徴をまとめる。

図3.1のように、生徒は負数乗法においても交換法則が成り立つことを示そうとしている。

| | |
|------|---|
| 教師 | $2 \times (-3)$ はいくつか? (プリントを配る。フォーマットは1組と同じ) |
| 生徒たち | -6 (手を挙げさせるが、9割近くが同じ意見。違う意見無し) |
| 教師 | どんな風に考えるか? |
| 生徒f6 | 足し算でやったようにする。 $2+3=3+2$ |
| 生徒f7 | $2 \times 3=3 \times 2$ がいえるので、 $2 \times (-3) = (-3) \times 2 = -6$ |
| 教師 | これは何という法則だったかな? |
| 生徒f7 | 交換法則 |
| 教師 | この意見と同じ人は? (数人手を挙げる) |
| 教師 | この法則が本当にいえるか分からないので、?マークにしておきます。 |
| 教師 | ほかには? |
| 生徒f8 | $2 \times (-3) = (+2) \times (-3)$ にして、加法や減法でもやったように絶対値を使う。絶対値の大きい方が前にくる。 -3 のほうが絶対値の大きいから、符号はマイナスになる。だから、 $2 \times (-3) = -(2 \times 3) = -6$ |
| 教師 | 同じ意見の人はいますか? (誰もいない) |

図3.1 交換法則の取り扱い

小学校算数においては答えが一致することを基に交換法則を決めたのに対して、この場面では $2 \times (-3)$ を求めることができないため、交換法則を利用して求めようとしていると考えられる。しかし、教師は、生徒に「なぜ、交換法則が成り立つことが分かるのか」といった質問をしないまま、交換法則に対する議論を終えている。そのため、生徒が規約を意識することなく授業が展開されているといえる。

図3.2では、生徒が外挿法、数直線上で提示しているが、教師は「なぜ、比例の関係を用いてよいのか」など根拠に関わるような質問をしていない。そのため、負数乗法は正数乗法から自然的に求められるように提示され、「負数乗法とは何か」を考える場面が生じていない。

| | |
|-------|--|
| 教師 | ほかには? |
| 生徒f9 | <p>黒板使ってもいいですか? (外挿法を黒板に書く)</p> <p>$2 \times (-3)$ から求めるのは難しいので、掛ける数を小さくしていく、答えが2つずつ減っていくので、0より小さい数が$-2, -4, -6$と考えていく。そうすると、$2 \times (-3)$ のときは-6になる。</p> <p>(黒板)</p> $\begin{array}{rcl} 2 \times 3 & = & 6 \quad \leftarrow 2 \text{ へ} \\ 2 \times 2 & = & 4 \quad \leftarrow 2 \text{ へ} \\ 2 \times 1 & = & 2 \quad \leftarrow 2 \text{ へ} \\ 2 \times 0 & = & 0 \quad \leftarrow 2 \text{ へ} \\ 2 \times (-1) & = & -2 \quad \leftarrow 2 \text{ へ} \\ 2 \times (-2) & = & -4 \quad \leftarrow 2 \text{ へ} \\ 2 \times (-3) & = & -6 \quad \leftarrow 2 \text{ へ} \end{array}$ |
| 教師 | 似た方法を10くんも考えたみたいだよ。発表してみて。 |
| 生徒f10 | <p>数直線で考えると、2×3 は2が3つあがっていく。(-3) は3つ下がっていくことになる。(先生が黒板に以下のような数直線を書く)</p> <p>(黒板)</p> |

図3.2 外挿法と数直線

図3.3では、生徒が言葉による解釈(物理的アプローチではない)を提示しているが、教師は「この考え方は、本当に乗法と

いえるか」,「答えが-6になることに合わせて, 解釈を考えていないか」など乗法の考え方を確認するような質問をしていない。生徒がマイナス符号のみを考えるだけでなく, 時間の概念に着目できれば, 物理的アプローチを導入できたと考えられる。

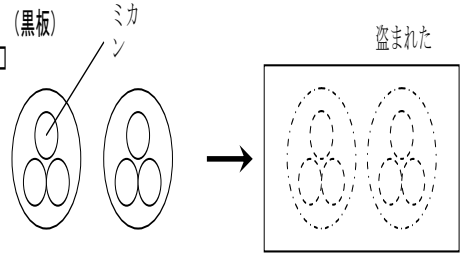
| | |
|-------|---|
| 教師 | ほかには? |
| 生徒f11 | 〇〇家からミカンが2つ入ったバケツが3つ盗まれました。倉庫に入っているミカンは何個でしょうか? |
| 教師 | はじめ, 倉庫に何個あったの?(先生が板書しながら質問をする) |
| 生徒f11 | バケツが3つあった。 |
| 教師 | つまり, 全部無盗まれたってこと? |
| 生徒f11 | はい。  |
| 教師 | じゃあまとめるよ。交換法則は使えます。(ただし, 理由の説明をしない) |
| 教師 | 絶対値は残念ながら使えない。(4組のように反例は出していない) |
| 教師 | プラスよりマイナスがつよい。十と十は十になる。マイナス掛けるマイナスの場合は, また後で説明します。次回は, 教科書を参考にもう少し進めていきます。(外挿法に関する説明はなかった。) |

図 3.3 言葉による解釈

これらのことから, 現在の負数乗法の授業は, 生徒に「負数乗法とは何か」を考える活動に至っていないといえる。この授業にみられる問題点を考慮しながら, 次は現在の負数乗法の授業の基となる教科書において検証していきたい。

4. 教科書における指導内容

本節は, 現行で使用されている平成 17 年検定済教科書(大阪書籍, 学校図書, 教育出版, 啓林館, 大日本図書, 東京書籍)を基に, 教科書における指導内容の特徴と問題点をまとめる。

(1)東京書籍

東京書籍における指導内容は, 図 4.1 に示すような日常的な事象(物理的アプローチ)を用いている。まず, (速さ) × (時間) = (距離) の関係から $(+4) \times (+2) = +8$ を求め, 2 時間前を -2 時間後と置き換えた後, $(+4) \times (-2) = -8$ と提示している。この指導内容は, 数直線を基に現在の位置(距離)にいるためには, 2 時間前の位置(距離)を何 km にするかを生徒に考えさせるものである。また, $(+4) \times (+2) = +8$, $(+4) \times (0) = 0$, $(+4) \times (-2) = -8$ と考えているため, 外挿法の考え方をを用いているといえる。しかし, 外挿法の考え方は答え(-8)を求めるためだけに用いており, $(+4) \times (-2)$ と(-8)を結びつけることのできる理由(規約)を提示していない。



毎時 4 km の速さで 2 時間歩くと, 何 km 歩くことになるでしょうか。

東への移動を正の数で, 西への移動を負の数で表すことにする。

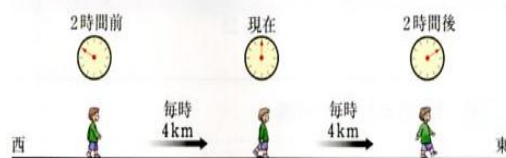
まず, 東へ向かって毎時 4 km の速さで歩く場合を考えよう。

問 1 次の①, ②の場合, 歩いている人はどこにいますか。

現在の位置からの移動を, 正負の数を使って表しなさい。

① 現在より 2 時間後

② 現在より 2 時間前



問 1 の①の結果の +8 km は, 次の式で求められる。

$$(+4) \times (+2) = +8$$

②の場合も, 結果を求める計算をかけ算で表す。

2 時間前は -2 時間後であるから, 次のようになる。

$$(+4) \times (-2) = -8$$

図 4.1 物理的アプローチ①

この指導内容では、量を用いているため、 $(+4) \times (-2)$ という立式の規約（マイナスの時間を認める）においてもこの関係式が成り立つことが必要であり、これを基に $(+4) \times (-2)$ と-8を結びつける規約（マイナスを戻す操作として意味づけし、負の向きを持つ距離を認める）を示す必要がある。これらの規約によって、生徒にこの事象【(速さ) × (時間) = (距離)】における $(+) \times (-) = (-)$ を提示できるのである。

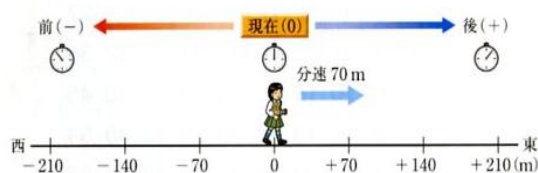
次に、この指導内容は量のみを扱っているため、生徒が数と量を意識することに繋がらない。生徒が代数的な考え方を養うためには、数を扱う指導内容にも触れる必要がある。

(2)学校図書（大阪書籍，大日本図書，教育出版）

指導内容が類似していることから、ここでは、学校図書を例に指導内容を考察していくことにする。学校図書は、図 4.2 のような日常的な事象（物理的アプローチ）を用いている。

ゆかりさんは、東へ向かって分速 70 m で歩いています。下の図のように、現在の地点を 0 m とします。

- (1) ゆかりさんは、1 分後、2 分後にはどの地点にいますか。
また、1 分前、2 分前にはどの地点にいましたか。下の図に矢印↓で示しましょう。東の方向を正の向きとします。



- (2) 次の表の () にあてはまる数を入れて、ゆかりさんがいる地点を式で表しましょう。1 分後を +1 分とします。

| 時間 | 地点 | (速さ) × (時間) = (地点) |
|-----------|----------------|------------------------------|
| 2 分後 (+2) | 140 m 東 (+140) | $(+70) \times (+2) = (+140)$ |
| 1 分後 (+1) | 70 m 東 () | $() \times () = ()$ |
| 現在 (0) | 0 m () | $() \times () = ()$ |
| 1 分前 (-1) | 70 m 西 () | $() \times () = ()$ |
| 2 分前 (-2) | 140 m 西 () | $() \times () = ()$ |

図 4.2 物理的アプローチ②

まず、数直線の図を用いて、速さと時間に対する距離を求めている。この結果（数値）を表【(速さ) × (時間) = (距離)】に代入することで、 $(+) \times (-) = (-)$ を提示している。また、表【(速さ) × (時間) = (距離)】の見方をかえれば、外挿法によって比例の関係を示しているといえる。

この指導内容は、(速さ) × (時間) = (距離) を扱う際に、負数を代入することを前提にしていることから、負数乗法を量ではなく数として扱っている。そのため、(速さ) × (時間) = (距離) の公式を基に、負数乗法を求める指導内容であるといえる。量を扱う指導内容とするためには、(速さ) × (時間) = (距離) の関係が成り立つ条件（正数のみにおいて扱える）を確認し、規約となる事柄（東京書籍で述べたもの）を示す必要がある。

次に、この教材は、負数乗法を数として扱っている指導内容であると述べたが、これは代入という視点からであり、教材自体は量を扱っている。そのため、負数乗法を数として扱う指導内容を提示する必要がある。

(3)啓林館（大日本図書）

啓林館は、図 4.3 に示すような外挿法（発見的アプローチ）を用いている。

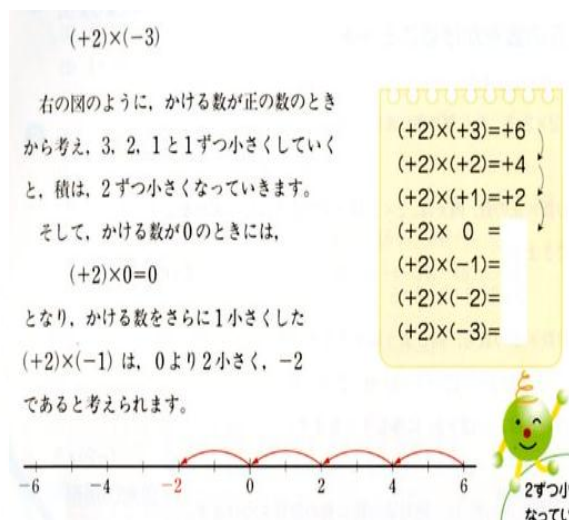


図 4.3 外挿法（発見的アプローチ）

まず、 $(+2) \times (-3)$ を求めるために、比例の係に注目し、答え (-6) を提示している。この指導内容は、数のみを対象としているが、比例の関係（量）を基に負数乗法を求めていることから、数と量が混在しているといえる。そのため、比例の関係を認めるために、何を規約としたかを提示する必要がある。

次に、この指導内容において、何を規約としたかを示せたとしても、あくまで負数乗法を数として理解したに過ぎない。生徒が、代数的な考え方を養うためには、量に重点を置く指導内容に触れる必要がある。

以上のことから、現在の負数乗法の指導内容の特徴と問題点をまとめる。現在の教科書では数と量が混在しており、負数乗法を量としても数としても提示できていない。また、負数乗法を量として提示する指導内容であったとしても、規約を示していないため、公式【(速さ) \times (時間) = (距離)】から負数乗法を導く指導内容といえる。そのため、この指導内容では、負数乗法を量と認める必要も生じていない。さらに、すべての指導内容が比例の係を用いており、負数乗法を数として扱う指導内容(例えば、第2節で述べた「公理的アプローチ」や第5節で述べる「比例的アプローチ」である。)が不足しているといえる。

小林(2011)が「現在の負数乗法の問題点」で述べているように、現在の負数乗法の指導内容では、生徒は算数的な考え方に留まり、代数的な考え方を学ぶことができないといえる。これにより、生徒は既習知識を十分に理解できていないと考えられる。

これらの指導内容を改善するために、小林(2011)では次の4つの改善方法を提示した。

- (α) 交換法則の規約を基に、比例の係を規約(比例的アプローチ)することで、代数的な考え方を意識させる。

- (β) 物理的アプローチにおける規約となる内容を提示することで、算数的な考え方および代数的な考え方を養う。

- (γ) 数的な規約(例:改善方法 α)と量的な規約(例:改善方法 β)から一般的な規約を示し、数と量の関係を意識することで代数的な考え方の基礎を築くきっかけを生徒に与える。

- (δ) 合成量的アプローチを基に、負数乗法を数的な規約と量的な規約の比較から解釈することで、生徒に算数的な考え方と数学的な考え方の繋がりを意識させる。

次節では、教科書の指導内容を4つの改善方法を用いて、改善した場合の指導内容を提示する。

5. 「負数乗法とは何か」を考える授業

前節は、小林(2011)の視点を基に教科書分析を行い、現在の負数乗法の指導内容の特徴と問題点をまとめた。

(1)改善方法 β を主とする指導内容の改善

学校図書(大阪書籍,教育出版,大日本図書)の教科書の指導内容は、外挿法と日常的な事象の取り扱いが複合されているため、数と量における指導内容で分ける必要がある。そのため、指導内容は外挿法と日常的な事象を扱うものになる。

本稿では、改善方法 β を基に日常的な事象のみを扱っている東京書籍の教科書の指導内容に注目する。

まず、この指導内容では、量を扱っているため、 $(+4) \times (-2)$ という立式の規約が必要である。これにより、表記上でマイナスの時間を認めることができる。また、答え (-8) は、乗法ではなく、数直線上の操作によって求めたことを生徒に意識させる必要がある。

次に、マイナスを戻す操作として意味づけ

し、負の向きを持つ距離を認めることで、 $(+4) \times (-2)$ と -8 を結びつける規約を示すことができる。これらの規約によって、負数乗法を量として示すことができる。しかし、これらの規約により求めた演算規則は、この事象においてのみ有効であることを生徒に意識させる必要がある。これにより、負数乗法を数として学習する必要性が生じる。そのため、改善方法 γ では、数と量の2つの視点から指導内容の改善を述べている。

(2)改善方法 α を主とする指導内容の改善

啓林館の教科書の指導内容では、数のみを対象として、外挿法で負数乗法を導いていた。 $(+) \times (-) = (-)$ と比例の関係が成り立つことにその根拠が明示されていなかった。このことから、改善方法 α を導入し、負数乗法を数として扱う指導内容として改善する。

比例的アプローチとは、図5.1に示すような手順で指導が展開される指導内容である。

まず、 $(-) \times (+)$ を累加で解釈する(矢印①)。これにより、 $(-) \times (+)$ の積を求めることができるため、交換法則が負数乗法においても成り立つと規約とする(矢印②)ことで、 $(+) \times (-)$ の積を求めることができる(矢印③)。しかし、単に、負数乗法においても交換法則が成り立つと規約するだけでは、 $(-) \times (-) = (+)$ を導くことが難しいと考えられる。 $(-) \times (-) = (+)$ を導くためには、交換法則が成り立つことによって、負数乗法においても比例の関係が成り立つことを生徒に意識させる必要がある。

次に、算数の掛け算における比例の関係(乗数が1つ減少すると積が3減少する。)と負数乗法における比例の関係(乗数が1つ減少すると積が3減少する。)が一致することか

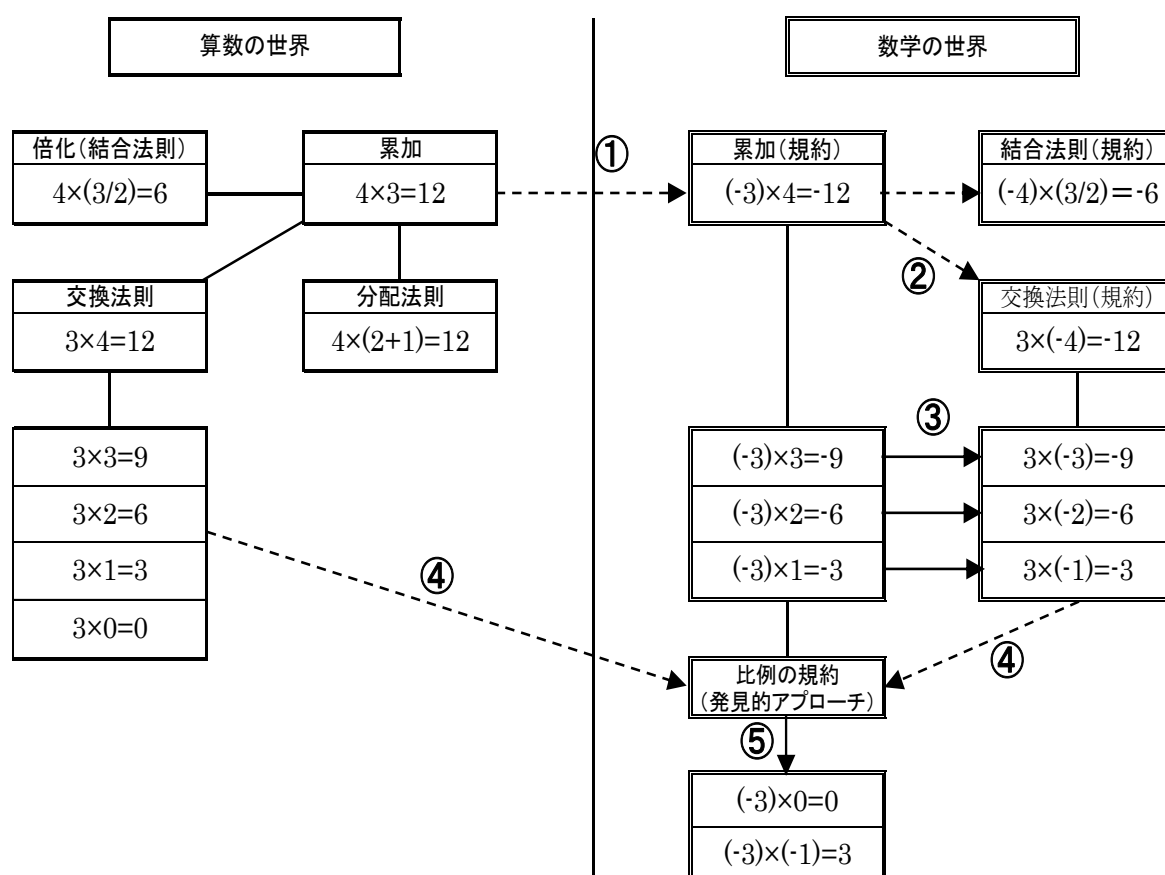


図5.1 比例的アプローチ

ら、比例の関係を規約（矢印④）でき、比例の関係を規約を基に、 $(-) \times (-) = (+)$ を導くことができる（矢印⑤）。

この改善した指導内容では、数のみを扱うために交換法則を先に規約とする必要があり、これを基に正数における比例の関係と負数における比例の関係を結びつけることを目標としている。そのため、生徒にいかにして交換法則の必要性を感じさせるかが課題である。

(3)改善方法δを用いた指導内容の改善

合成量的アプローチは、面積と分配法則を結びつける指導内容である。

まず、A の考え方（図 5.2）のように、面積の計算方法と乗法の分配法則を結びつける

A. 面積と分配法則を結びつける。

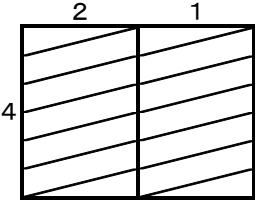
$$\begin{aligned}
 4 \times 3 &= 4 \times (2+1) \\
 &= 4 \times 2 + 4 \times 1 \\
 &= 8 + 4 = 12
 \end{aligned}$$


図 5.2 合成量的アプローチ①

ことができるかを確認し、大きな面積から小さな面積を引くことと分配法則の関係（図 5.3）を考える。

これを基に、B（合成量）と C（面積を用いて計算）の考え方（図 5.3）を比較し、分配法則を用いることができるかを吟味する。

B と C の考え方を結びつけることができないため、D の考え方（図 5.4）を用いて負数においても分配法則が成り立つことを認めることで、負数乗法を求めることができる。この指導内容では、面積において量、分配法則において数として負数乗法を扱うことができ

るため、量から数への指導が円滑に行えると考えられる。

B. 引き算を用いて合成量を示す。

$$4 \times 3 = 4 \times (4-1)$$

C. B の式を面積を用いて計算する。

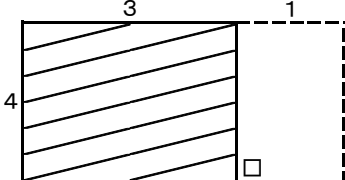
$$\begin{aligned}
 4 \times 3 &= 4 \times 4 - 4 \times 1 \\
 &= 16 - 4 = 12
 \end{aligned}$$


図 5.3 合成量的アプローチ②

D. 負数においても分配法則を認める。

$$\begin{aligned}
 4 \times 3 &= 4 \times (4-1) \\
 &= 4 \times \{4+(-1)\} \\
 &= 4 \times 4 + 4 \times (-1) \\
 &= 12 + 4 \times (-1) \\
 &\rightarrow 4 \times (-1) = -4
 \end{aligned}$$

図 5.4 合成量的アプローチ③

6. まとめ・今後の課題

本稿では、まず、現場における負数乗法の指導を基に現在の負数乗法の授業の特徴として、生徒に負数乗法があたかも自然に生じているように提示し、生徒に規約を意識させていないことを明らかにした。

次に、現場における負数乗法の指導の基になっている内容が教科書における指導内容であることから、小林(2011)の視点を基に教科書における問題点を考察した。その結果、問題点は、何を規約としたかを示していないこと、数と量を混同して扱っていること、であることを示した。

この問題点を改善するために、小林(2011)で示した4つの「改善方法」を用いて、教科書の指導内容を「負数乗法とは何か」を考え

る授業へと改善する可能性を示した。

外挿法（発見的アプローチ）を提示した場合には、数として負数乗法を扱っているため、比例の関係とそれによって求められる積は予想でしかなかった。そこで、交換法則を規約とすることで比例の関係を導き、正数における比例と負数における比例を結びつける規約を提示することを改善点として示した。その際に、生徒に「なぜ、交換法則を認めることができるのか」、「交換法則が認めたとしたら、 $(-) \times (-)$ を求めることができるのか」などの交換法則と比例の関係を結びつけるための問いかけを行う必要がある。これにより、数として負数乗法を学習することができ、量としての負数乗法（物理的アプローチなど）や一般的な規約が必要であることを生徒に感じさせることができると考えられる。

物理的アプローチを提示した場合は、量として負数乗法を扱っているため、負量を認めるために立式の規約と答えを一致させる規約を提示することを改善点として示した。例えば、 $(\text{速さ}) \times (\text{時間}) = (\text{距離})$ を扱う際に、 $(\text{速さ}) \times (\text{時間})$ を乗法として計算することで (距離) を導いているわけではなく、 (距離) は図を用いて得られた結果であることを生徒に意識させる必要がある。また、求まった演算規則は、その事象においてのみ成り立つことを意識させることで、数としての負数乗法（発見的アプローチなど）や一般的な規約が必要であることを生徒に感じさせることができると考えられる。

特に、筆者は一般的な規約（どのような事象を扱う場合でも $(-) \times (-) = (+)$ である）を導くためには、数と量に分けて負数乗法を指導する必要があると考えている（改善方法γ）。そのため、現在の負数乗法の指導内容を基にした場合は、改善方法を適用した外挿法（発見的アプローチ）と物理的アプローチの両方を生徒に提示する必要がある。

合成量的アプローチは、現在の負数乗法の

指導内容に代わる指導内容として提示した。

この指導内容は、数（分配法則）と量（面積）を結びつける活動を通して、「負数乗法とは何か」を考えることをねらったものである。特に、 $(+) \times (-) = (-)$ であることを確かめる際に、本当に負の面積と分配法則が結びつけることができるのかといった活動が考えられる。そのため、単独で生徒に提示するだけでなく、改善方法α（発見的アプローチなど）や改善方法β（物理的アプローチなど）と組み合わせた教材を提示することで、「負数乗法とは何か」を考える授業に繋ぐことができるものと期待できる。

本稿では、負数乗法の指導内容の3つの改善を提示した。しかし、その3つ全てが必要というのではない。「負数乗法にはどのような規約が必要なのか」、「規約をどのように決めたらよいのか」、「そのように規約したらこれまでの既習知識はどのようなになるのか」、などを生徒に考えさせる活動を起こし、その活動から生じた生徒の意見、考えを尊重し、それに応じて本稿において示した改善を合わせ組んで展開していくことが大切であると考ええる。

今後の課題は、本稿で示した「負数乗法とは何か」を考える授業を実践し、生徒の理解の様相を検証していくことである。

【引用・参考文献】

- [1] Mary.L.Crowley, Kenneth.A.Dunn(1985).
“On Multiplying Negative Numbers”
MATHEMATICS TEACHER vol.78
No.4. National Council of Teachers of
Mathematics. pp.252-256.
- [2] 小林孝至(2010a).「教科書分析からみる
『負数の乗法』 - 歴史的観点を用いた問
題提起 - 」。上越数学教育研究 25.
pp.77-86.

- [3] 小林孝至(2010b).「負数乗法の指導改善に関する一考察 - 歴史から紐解く『学ぶよさ』 -」. 第 43 回数学教育論文発表会論文集 (第 1 巻). 日本数学教育学会. pp.331-336.
- [4] 小林孝至(2011).「負数乗法の指導改善に関する研究」. 上越教育大学大学院修士論文.

<平成 17 年検定済教科書>

※著者は、代表者のみを示す。

- [5] 重松敬一(2006).「中学数学 1」. 大阪書籍.
- [6] 一松信(2006).「中学校数学 1」. 学校図書.
- [7] 澤田利夫(2006).「中学数学 1」. 教育出版.
- [8] 岡本和夫(2006).「楽しさひろがる数学 1」. 新興出版社啓林館.
- [9] 吉田稔(2006).「新版中学校数学 1」. 大日本図書.
- [10] 杉山吉茂(2006).「新編新しい数学 1」. 東京書籍.