

複素数学習における幾何的アプローチについて

中澤 健二

上越教育大学修士課程1年

1. はじめに

筆者は高校時代に複素数の授業の中で、虚数単位の導入について疑問を持ったことがある。現在の学校教育における虚数の導入は、「2乗して(平方)して-1になる数を i とし、その i を虚数単位とする。」であった。そのとき筆者は、数学Ⅰでは2次方程式の問題を解く際に“解なし”としていたものを、数学Ⅱにおいては、なぜ“虚数解をもつ”としなければならないのか、という疑問を持った。筆者だけではなく、平成16年度高等学校入学以降の教育課程で複素数を学んだ者は他にも、計算するだけで、それが何を意味しているのか理解できないのではないかと懸念される。

高校時代の複素数の授業は、計算一辺倒であったように感じられる。実際、そのとき筆者の中では、それまで複素数・ベクトル・三角関数は別々の数学概念に過ぎなかった。しかし、大学生になって初めて複素平面に触れた。それまで形を持たなかったように感じた複素数 $a + bi$ が極形式により三角関数ともベクトルとも関係を持ち、視覚的に捉えることができた。絶対値や偏角も、計算と図表と合わせて理解し、求められるようになった。頭の中で「繋がりのある数学の世界」が広がっていき、複素数理解の深まりを実感できた。

今考えると、高次方程式の分野で代数的に捉えていた複素数を複素平面を用いることで幾何的にも捉えることができた。代数的な計

算を主とする複素数の捉え方、またそれを視覚的に表す幾何的な捉え方により、複素数をその2つ以上の多面的な捉えもできたように思う。現在の高校の複素数の学習においては、代数的アプローチをとることがほとんどである。しかし、高校の複素数の学習においてその導入に幾何的アプローチを取り入れることができれば、生徒の理解が広がり深さを増すに違いない。

本稿は、過去の複素数平面学習を概観するとともに、複素数学習の幾何的アプローチの具体例として、小林(1973)と砂川(1995)を取り上げる。そして、先行研究を基に最終的には、複素数学習における幾何的アプローチを明示することである。

2. Panaoura (2005) による先行研究

Panaoura (2005)は、「複素数学習における異なった表現方法とその過程での生徒の能力についての調査」である。

Panaoura (2005)に記載されている表現方法とは、幾何的アプローチと代数的アプローチである。複素数の問題に対し、幾何的アプローチを実行した生徒は、代数的なアプローチを使用した生徒よりも多く正答している結果があった。しかし、Panaoura (2005)によれば、「生徒の中には幾何的表現と代数的表現を同じ概念を表すものとしてではなく、2つの異なった数学的対象と考えている。」

(p.700) と述べられている。これは、生徒の複素数概念の習熟に対する困難のしるしであると考えられる。また、「複素数に対し、代数で幾何的表現ができることは、基本的な概念の1つで、幾何から代数的表現に対しても同じく、その2つは複素数全体の理解に必要である。」(p.701)とも述べられている。

以上により筆者は、数学教育の重要な目的の1つには、「生徒が効率的に様々な形式の同じ数学概念を特定して、使用して、異なるアプローチを使用することで1つの表現から別の表現に柔軟に移行できること。」であるとも考える。

また、Panaoura (2005)には、「代数的アプローチと幾何的アプローチは、生徒の複素数の問題解決に用いる表現方法である。」(p.702)と述べている。ここで筆者は、生徒の複素数の問題解決に用いる表現方法は、教師に教授された方法と同一視できると考え、幾何的アプローチについては、過去の教科書の複素平面における幾何的な教授方法と2つ具体事例におけるアプローチ方法を考察していく。

3. 教科書分析

これまで複素数平面は、昭和35年、45年、53年、平成元年、10年改訂の高等学校学習指導要領を見ると、複素平面は、昭和35年と平成元年の改訂の学習過程で学習し、その他の年では学習しない。

本稿では、複素平面が扱われていた昭和35年改訂(同45年発行)の高等学校用教科書と平成元年改訂(同15年発行)の教科書について、複素数から複素平面への指導における学習の広がりを確認し、現在までの複素数学習のアプローチ方法を調べる。また、複素平面の呼び方は、学習指導要領 昭和35年改訂では「複素平面」、平成元年改訂では「複素数平面」と表記されているため、教科書の考察については、それぞれの名称で

記す。

(1) 昭和35年改訂 数学ⅡB (好学社) に関する考察

昭和35年改訂 数学ⅡB (好学社) においては、ベクトルにおいて空間ベクトルまでが既習知識となり、続けて「複素数とベクトル」で複素数平面を学習する。また、高次方程式を解く際に複素数を学習するが、それは前学年で既習している。

以下では、「複素数とベクトル」で学習する内容を大きく分けて記す。

第1節 複素平面→第2節 複素数の計算
(①複素数の四則計算②ド・モアブルの定理)

以降では節毎に考察していく。

第1節 複素数平面では、複素数 $a + bi$ を複素平面で表現することから始まる。その後、共役な複素数、極形式を学習する。極形式では、 $a = r \cos \theta$ 、 $b = r \sin \theta$ を図により導き、 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と絶対値や偏角についても同時に学習する。節の最後では、複素数を極形式で表す問題がある。

第2節 複素数の計算では、まず複素数の加法・減法を複素平面上におけるベクトルとして計算する。次に極形式を用い、複素数の積と商の公式を導き、複素平面上にできる三角形の相似に触れ、例題として複素数の積 $z_3 = z_1 z_2$ を複素平面上に作図させている。

また、教科書には図を用い、点の回転を以下のように示している。

「 z に i を掛けた iz は、原点を中心として z を $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点で表される。つまり、 i を掛けるとは 90° の回転を意味する。」(数学ⅡB, 好学社, p.96)

次に、ド・モアブルの定理、

$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$
を極形式を用い、帰納的に導いている。また、

$z^n = 1$ などの問題において定理を用いて解くと同時に、複素平面上における単位円上に解が存在することを、図を用いて表現、学習している。

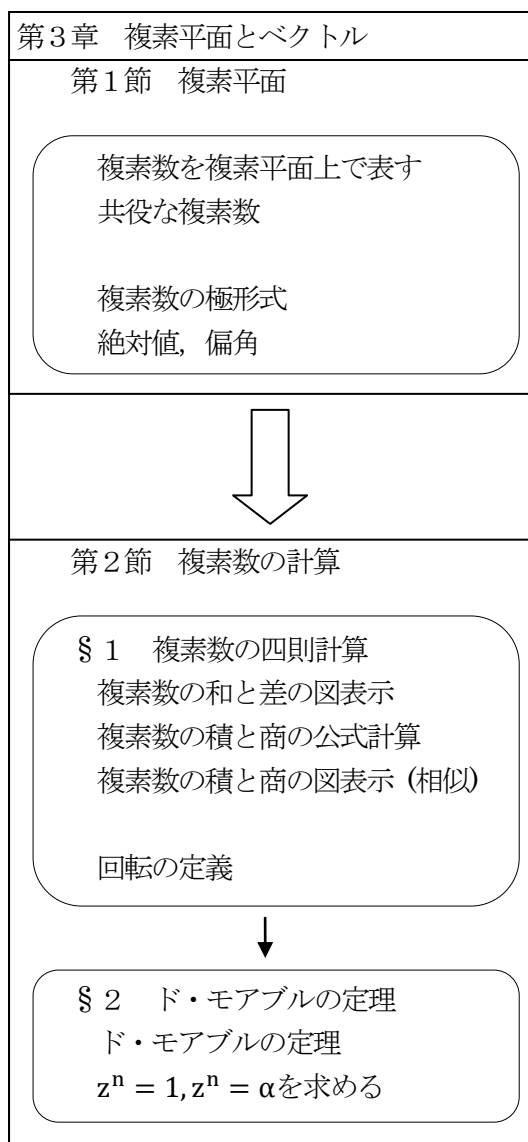


図1. 昭和35年改訂 数学ⅡB (好学社)の複素平面における学習の流れ

昭和35年改訂 数学ⅡB (好学社)における考察として、複素数から複素平面に学習が広がる際に、今まで数としてのみ扱ってきた複素数を平面に座標を置くことから始まる。代数的な捉え方をしていた複素数から、幾何的な捉えとなる複素平面の導入においては、

a を実数軸, bi を虚数軸に置くことを確認することは、生徒にとっても単純かつ明快に理解できると思われる。次に、複素数 $a + bi$ を図にかき、その点と原点と実数軸に垂直になる点、3つを考えると直角三角形となり、三角関数を用いて表すことが出来き、これが極形式となった。

ここで、生徒は複素数を平面上で扱うことに対し、三角関数との繋がりを感じることが出来るであろう。生徒の中には、納得したり、不思議に思う生徒がいると思われるが、生徒が複素数を見直し、理解を深める1つのアクションであるといえる。

第2節 複素数の計算では、計算だけではなく図表示を用い学習するため複素数自体と複素数の四則計算に形を持たせ理解が深まるであろう。

また回転では、 $\times i$ とはどのような幾何的性質を持つかを述べ、 $i \times i = -1$ の幾何的解釈を教えている。複素数学習における一番注意すべき点である“虚数の導入”であるが、多少簡潔過ぎると思われるが、虚数の導入に置いて「 $\times i$ は90°回転」という事実は生徒の複素数の幾何的アプローチによる導入において使用すべきだと考えられる

ド・モアブルの定理は、
(極形式) \times (極形式) \times (極形式) $\times \dots$

というように帰納的に考え、求めている。その後、ド・モアブルの定理を用い、 $z^n = 1, z^n = \alpha$ のような問題を解くことで、複素平面におけるすべての計算・公式を図表示に行い、生徒の複素平面学習と同時に、複素数の理解を深めることが出来たのではないか。

(2) 平成元年改訂 数学B (東京書籍) に関する考察

平成元年改訂 数学B (東京書籍)において、第3章 複素数平面に単独の章で扱われている。しかし、ベクトルや複素数は全段

階で既習している。この教科書でも前回の教科書同様、複素数から複素数平面への学習を広げる際の、幾何的アプローチをみていく。

以下では、「複素数平面」で学習する内容を大きく分けて記す。

第1節 複素数平面 → 複素数の極形式 → ド・モアブルの定理 → 第2節 図形への応用 → 円と分点 → 複素数と三角形

以降では節毎に考察していく。

第1節 複素数平面では、昭和35年改訂教科書と同様に複素数を複素数平面で表すことから始める。ここでも、同様に平面上で表すのだが、平面上の三角形を考えたときに絶対値を学習してしまう。その後、複素数の和と差の式による代数的アプローチと図で表現する幾何的アプローチの両方で生徒は複素数の計算に対し、理解を深める。次の複素数の極形式では、絶対値を求めたときの三角形を用い、極形式と偏角を求め、積と商に移る。また、積と商に関しても幾何的に図表を用いたり、回転についてや、ド・モアブルの定理・計算も教授されるが、昭和35年教科書と大きな差はない。

第2節 図形への応用では、軌跡や内分点・外分点、直線の方程式を学習する。第2節のここまでは、数学Ⅱで「図形と方程式」を学習するため、同様な平面として関連をもつため複素数平面内でも学習すると考える。

その後は、複素数と三角形に焦点を当て、相似や図形の証明を行う。最後については、応用を感じ、複素数平面理解のために学習する内容だと考える。

昭和35年改訂教科書とは、複素数平面における図形に関する学習範囲が異なるものの、複素数から複素数平面への導入、複素数の和・差・積・商に対する幾何的アプローチなどはほぼ同様であった。

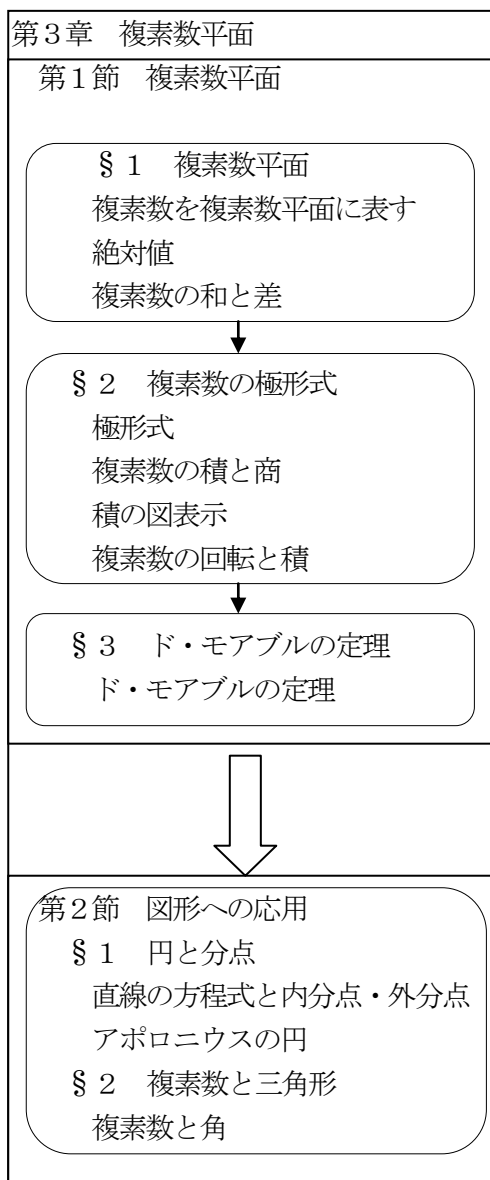


図2. 平成元年改訂 数学B (東京書籍) における学習の流れ

以上が、過去の2点の教科書分析では、主に複素数から複素平面に学習を広げる際の幾何的アプローチについて考察した。この考察では、複素平面の様々な場面における幾何的アプローチを調べた。複素数に複素平面を用いることで、幾何的アプローチを使うことになったが複素平面の理解が深まる。しかし、複素数の理解を深めるには教科書による、複素平面からの幾何的アプローチの導入ではな

く、複素数の段階からの幾何的アプローチが必要であると感じた。なぜならば、複素数の根源である虚数自体は教科書において、幾何的アプローチをとっておらず、虚数自体が生徒に理解されていないと考えるからである。

4. 小林(1973)の複素数導入事例

この節では、現時点で筆者の考える複素数学習における幾何的アプローチを紹介しているため、虚数単位 i を導入する小林(1973)の導入事例を考察する。

「虚数はほんとに“虚”か」—複素数の導入の基本—小林道正(東京教育大) 数学教室(1973)で次のように述べている。

「複素数を知らずして、教科書のように「平方して -1 になる数を新しく考えそのひとつを i とかく。こうすればすべての2次方程式が根を持つ」(p.128)などといくら説明しても生徒が納得するはずもない。実数しか知らず、実数の -1 しか知らない生徒に理解できる道理がない。」

「複素数の導入(構成)をしてからではなくては方程式の意味さえ明確になっていないのである。」(p.128)と述べている。その背景には、

「数学を具体的な物との関連においてとらえることは、数学教育の基本であるばかりでなく、数学の基本であると考えからである。」

上記の3つの主張は、筆者の考えに相通じるものがある。さらに、小林(1973)は「複素数指導するにあたって虚数というものが実際に存在する量であること、日常接している具体的な物の性質を表しているものであることを理解させたい。」と述べている。

筆者も生徒が理解を深める方法として具体例を用いることは、生徒が主体性をもつひとつの要因であると考え、小林氏の事例を取り

上げる。

(1) 複素数の説明(高校1年生を除く)

中学校での座標平面の導入を思い起こさせ、座標を使うことにより平面上の点だけではなく、2つの量の変化の仕方を見やすくするのに有効であったことを復習する。「複素数とはこのように“2つの量を組にしてまとめた量”であるが、いままでと違うのは、 $(3,2) + (1,5)$ とか、 $(3,2) \times (1,5)$ などのように、2つの量の組どうして、和(差)と積(商)を考えたものである。」

(2) 複素数の和(差)

小林氏は現実事象として、飛行機の移動・回転を使い複素数の指導事例を記している。

以下は、小林氏の指導例を図も含めそのまま掲載する。

[例: 飛行機の運動](p.129-p.132)

羽田空港を座標平面の「0」のに起き、 x 軸プラス側を西、 y 軸プラス側を上空とする(今回の距離の単位は km)。羽田を起点とし、飛行機が「西へ 3km 、上空へ 1km 」なる飛行をすることを $(3,1)$ とし、「西へ 2km 、上空へ 1km 」さらに、「西へ 2km 、上空へ 3km 」飛行すると、羽田から「西へ 5km 、上空へ 4km 」なる飛行をしたと同じ。これを、 $(3,1) + (2,3) = (5,4)$ と表す(図3)。

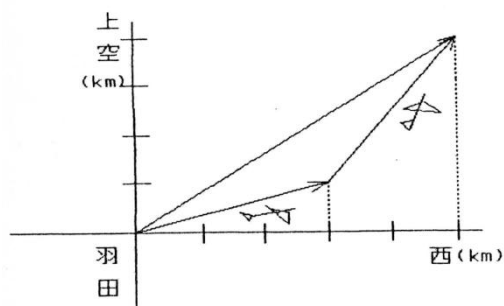


図3. 飛行の定義

また、東へ 3km は、西へ -3km 、下空へ 0.2km は、上空へ -0.2km と表す。

次に、反対飛行を定義し、差を定義する。
「西へ 3km, 上空へ 2km」の飛行は「西へ 3km, 上空へ 0km」飛行しさらに「西へ 0km, 上空へ 2km」の飛行をすることと同じだから、 $(3,2) = (3,0) + (0,2)$ と表せる。また、「西へ 3km, 上空へ 0km」の飛行は、「西へ 1km, 上空へ 0km」の飛行を 3回 (倍) したのだから、 $(3,0) = 3 \cdot (1,0)$ と表せ、同様に考えて $(0,2) = 2 \cdot (0,1)$ だから、 $(3,2) = 3 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1)$ 。つまり、 $(a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1)$ になりすべての飛行は $(1,0)$, $(0,1)$ になる飛行 (単位飛行) が基本となる (図4)。そこで $(1,0) = 1$, $(0,1) = i$ とおく。すると、 $(-2,3) = -2 \cdot 1 + 3 \cdot i$ と表せ $(-2 \cdot 1 = -2, 3 \cdot i = 3i)$ と略す。)

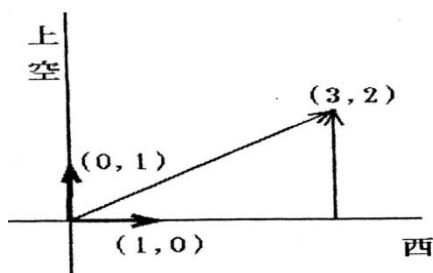


図4. 単位飛行

(3) 複素数の積 (商)

「西へ 3km, 上空へ 2km」 $= (3,2)$ と表したが、別の表し方を考えよう。 $1 = (1,0)$ を基本にし、「西へ 1km, 上空へ 0km」の移動の後、羽田を中心に反時計回りに 50° 旋回 (回転) し、羽田を後ろに 4 倍の位置まで飛行したと考えられる。このような飛行を $\langle 50^\circ, 4 \rangle$ と表す (図5)。

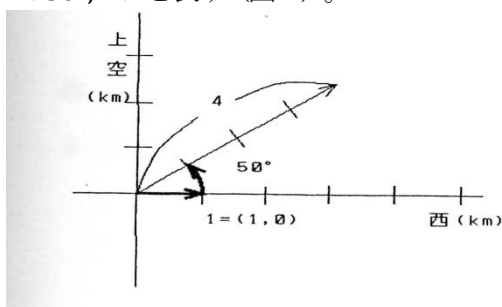


図5. 飛行と回転

「 50° 回転し、3 倍の位置に飛行」したあとさらにそこから「 20° 回転し、2 倍の位置に飛行」すると、「 70° 回転し、6 倍飛行」したことになる。これを次のように表す。

$$\langle 50^\circ, 3 \rangle \times \langle 20^\circ, 2 \rangle = \langle 70^\circ, 6 \rangle$$

$\langle 20^\circ, 2 \rangle$ なる飛行の「反対飛行」を $\langle -20^\circ, \frac{1}{2} \rangle$ とすなわち「 20° 時計回りに回転し、 $\frac{1}{2}$ の位置に飛行」することとし、反対飛行することを \div とかく (図6)。

$$\text{例: } \langle 50^\circ, 3 \rangle \div \langle 20^\circ, 2 \rangle$$

$$= \langle 50^\circ, 3 \rangle \times \langle -20^\circ, \frac{1}{2} \rangle$$

$$= \langle 30^\circ, \frac{3}{2} \rangle$$

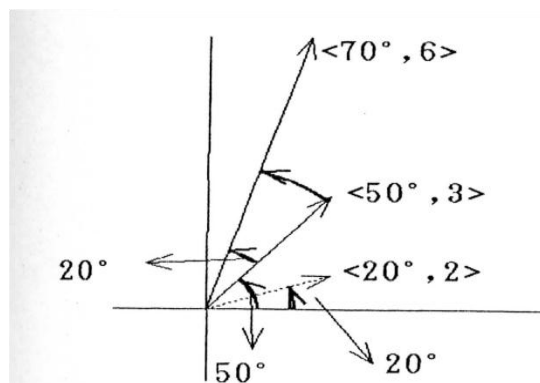


図6. 回転と積 (商)

(4) 和と差の関係

同じ飛行を 2 種類の飛行で表すことを考える。

$(1,0)$ から 60° 回転し 2 倍の位置に飛行する $\langle 60^\circ, 2 \rangle$ ことは、西へ 1km, 上空へ $\sqrt{3}$ km 飛行すること $(1, \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}i$ と同じであるから、

$$\langle 60^\circ, 2 \rangle = 1 + \sqrt{3}i$$

よって次の式が成り立つ (図7)。

$$\langle \theta, r \rangle = (r \cos \theta)1 + (r \sin \theta)i$$

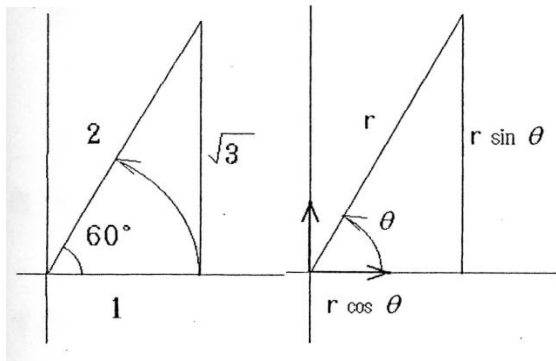


図7. $\langle \theta, r \rangle$ の一般化

$$(2 \cos 30^\circ)1 + (2 \sin 30^\circ)i = \langle 30^\circ, 2 \rangle$$

$$i = (1 \cos 90^\circ)1 + (1 \sin 90^\circ)i = \langle 90^\circ, 1 \rangle$$

であるから,

$$i \times i = \langle 90^\circ, 1 \rangle \times \langle 90^\circ, 1 \rangle$$

$$= \langle 180^\circ, 1 \rangle$$

$$= -1$$

すなわち $i^2 = -1$, これですべての飛行を表現できるような数(虚数)が出来た。

以上が小林氏の発案した幾何学的側面からの複素数の導入である。

次に、小林(1973)の各節毎について考察していく。

まず、小林氏は生徒への理解を促すために具体的な事象である飛行機の運動について説明していく。ここでは、西と上空を定義し平面として捉えさせる。生徒は中学校で、座標平面を既習しているため、飛行機の移動などについては理解が容易だと考えられる。また、飛行の最小単位である $(1,0) = 1, (0,1) = i$ をつくりだし、すべての飛行を表現できるようにする。次に、飛行における回転と積(商)を定義し、生徒が複素平面上の積(商)が回転と密接に関わるという説明がある。また、 $\langle 60^\circ, 2 \rangle = 1 + \sqrt{3}i$ という式から、 $\langle \theta, r \rangle = (r \cos \theta)1 + (r \sin \theta)i$ の $\langle \theta, r \rangle$ における極形式を導き、 $i \times i$ の説明をおこなっている。一見、導入までに長いと思えるこの事例は、 $i \times i$ を幾何的に導くアプローチ方

法をとり、筆者が現在の複素数学習に必要と考えている幾何的アプローチに通じるものがある。しかし、「 $(0,1) = i$ とおく」について何故おくのかなどの詳しい理由を述べていないため、現段階において改良すべき点は多分にあると思われる。

小林(1973)の学習の流れを以下に記す。

複素数の導入事例(以下の概要には、複素数という言葉を用いるが、授業では複素数という言葉は用いていない。)

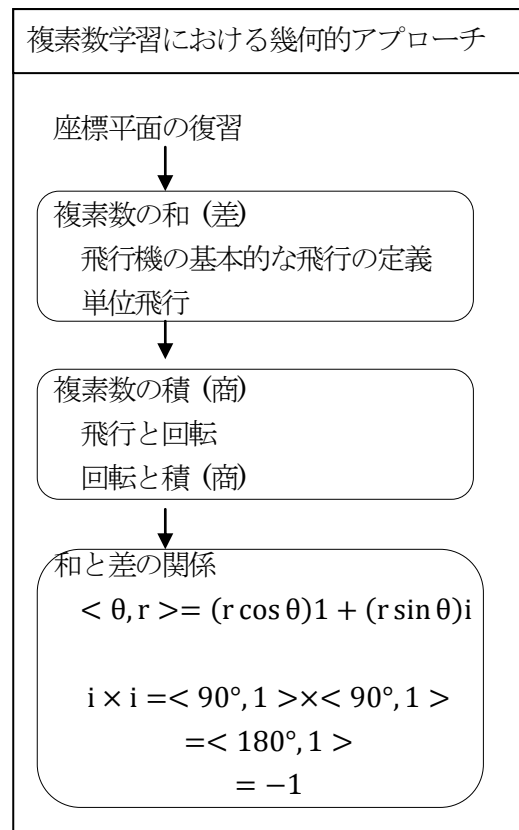


図8. 小林(1973)における複素数学習の流れ

5. 砂川(1995)の複素数の導入事例

次に、砂川氏の幾何学的側面からの複素数の導入をみる。砂川氏は、『「実数直線上のある数を-1倍したものが原点に関して点対称なものと数の反数となる。つまり、-1倍することは原点の回りに反時計回りに、 180° 回転することと捉えられる。」を生徒の既習事

項により理解できる範囲内にあると考えて、虚数単位 i の導入を考えていく。』と記している。

砂川氏は複素数導入時の指導案の概要を書いている。今回は、その中でも重要と感じた部分について紹介する。(p.198-p.203)

① 180°の回転

数直線上で、正の数負の数関係について復習絶対値が等しい正の数と負の数は、原点 O に関して点対称である。では、正の向きに 180° 回転 (反時計回り) するとはどういう意味だろう(図6)。

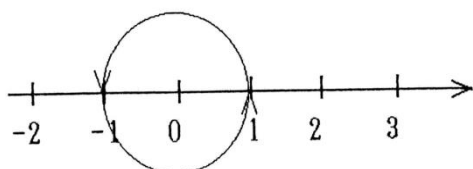


図7.実数直線の1における180°回転

元の位置 回転後

1 → -1

2 → -2

-3 → 3

$a \rightarrow -a$

② 原点 O の回りを正の向きに回転することを“ \times ”で考える。

原点の回りを+90° 回転する操作はどう表すのか。

例えば、(x軸上の) 2の90° 回転は、(y軸上の) 2である(図7)。それを区別するためにy軸上の2を $2i$ と表す。

ここで、横軸を実数直線、縦軸を i を単位とする直線により平面が出来た。

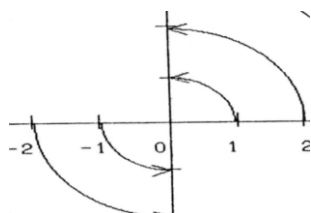


図8.90°回転

③ 複素数の定義

あらためて $i^2 = -1$ を確認し、定義する。そこから複素数 $a+bi$ を定義する。加法・減法をベクトルの考えを用い行う。

④ 複素数の図形的性質

平行四辺形の性質、三角形の重心などを学習。

⑤ 複素数の乗法を図形を用いて求める

$\times i$ は、原点の回りに+90° 回転する操作を表していた。そのことは、縦軸、横軸以外の平面上の点 i を乗じた場合もいえるだろうか。
例: $(2+3i) \times i$

以上が砂川氏の発案した幾何学的側面からの複素数の導入である。

次に、砂川 (1995) について考察していく。

まず、砂川 (1995) では、実数直線において (-1) を掛ける意味から導入する。中学校までの慣れ親しんだ実数直線を用い、掛けられた数が原点 O を点対称に180°回転することを確認し、次に90°の回転を考える。180°の回転を考え、別の角度の回転を考えることは一般的であり、生徒からみても自然な学習の流れといえよう。

そこで90°回転を考えると、実軸 x に対し直交する y 軸を考えることになる。つまり、 x 軸上の「1」の90°回転は、 y 軸上の「1」となる。しかし、どちらも同じ「1」であるため、区別するために y 軸上の「1」を i とおき学習を進める。生徒は、 $1 \times [90^\circ] = i$ であることを確認しなければならない。

以上により $i \times i$ は、 y 軸上の i を90°回転することになるので、 $i \times i = -1$ と学習することになる。ここで求めた、虚数単位 i を用いることで複素数を表現できるようになり、ベクトルの概念を用い、図形的性質を学習する。

砂川 (1995) は、小林 (1973) とは異なり、具体的な事象を用いず、中学及び高校の既習

である数学の概念により、虚数単位の導入がおこなわれている。

砂川 (1995)の学習の流れを以下に記す。

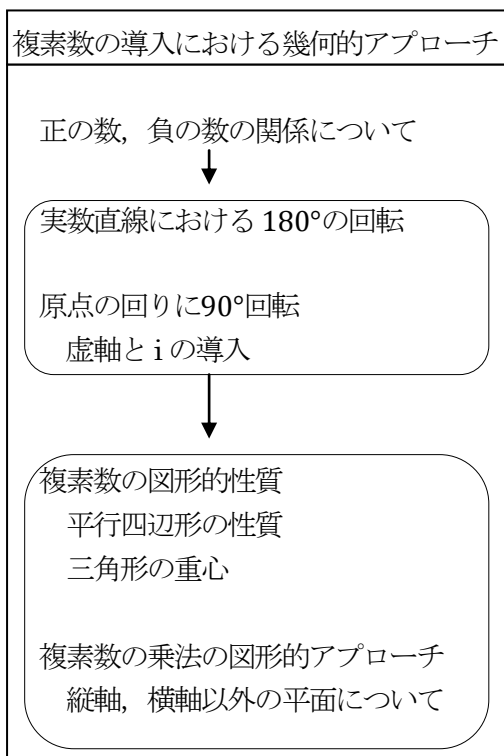


図9. 砂川(1995)における複素数学習の流れ

以上, 小林 (1973)と砂川 (1995) の複素数学習の流れを考察した。2つの比較は, 6. まとめ に示す。

6. まとめ

昭和35年改訂 数学II B (好学社) 及び, 平成元年改訂 数学 B (東京書籍) の考察により, 現在までの複素数学習において複素数が理解できないのは, 虚数・複素数の導入時虚数単位を「2乗 (平方) して-1になる数 i 」と認めることで止まっており, 計算によって i を掛けることにどのような意味を持つのか, という幾何的アプローチ, つまり i の回転という幾何的解釈を取り入れた授業が施されていない。複素数平面の学習において幾何学的解釈が用いられるのは当然であるが, 虚数・

複素数の導入時において幾何的解釈が用いられていることは皆無に等しい。そのため, 虚数・複素数自体を正しく理解できずにいる生徒がいると思われ, 虚数・複素数指導に幾何的アプローチを導入することを考えていく必要がある。

また, 小林 (1973), 砂川 (1995) ではベクトルや実数平面の性質などの既習事項を用い, 虚数・複素数の導入における幾何的アプローチが示されていた。しかし, 両者のアプローチ法は, それぞれ異なり, 複素数の和 (積) などにおいて学習する段階にも違いがあった。その違いは, 複素数学習において虚数単位導入をどこで学ばせるかに関わり, 複素数学習領域の構成が全体に影響を及ぼす。そのため, 筆者が複素数学習における幾何的アプローチを行う際に留意すべき点が2つあり, それは次の通りである。

- ① 複素数全体及び虚数に対し幾何学的アプローチが必要であり, そのアプローチの仕方, 複素数学習における学習の流れが変化することに留意する。
- ② 幾何的アプローチを行う際に, どの既習事項の幾何的性質を用いるかによってもアプローチ方法が変わることに留意する。

このように, 本稿で考える「複素数の幾何的アプローチ」には, どのようなものがあるか検討する必要がある。

筆者は, 複素数平面の幾何的アプローチの考察と, 小林 (1973) と砂川 (1995) より考えた①, ②をもとに複素数学習における幾何的アプローチを次のような捉えをするに至った。「複素数概念には代数的な側面と幾何的な側面があり, 幾何的なアプローチとは, 既習事項の幾何的性質などを用いることによって, 複素数の幾何的側面に迫るものである。」と考えた。

本稿では, 現在までの複素数平面の学習に

における幾何的アプローチの分析を行った。「複素数学習の導入における幾何的アプローチの適用」の可能性を示した。また小林 (1973), 砂川 (1995)の導入事例の考察から, 複素数の幾何的アプローチを行う際に留意すべき点を明らかにした。

今後の課題としては, 小林 (1973) と砂川 (1995)の具体事例および, 今回規定した「幾何的の導入アプローチ」を基に, 複素数学習における幾何的アプローチを作成したい。また, 代数的アプローチにも迫りながら, その関係の上での幾何的アプローチのさらなる充実を図り, ひいては複素数学習全体に関わる指導改善を目指したい。

【引用・参考文献】

Panaoura,A, et al. (2005) , *Geometric and algebraic approaches in the concept of complex numbers*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology , Vol.37,No.6,15 September 2006,681-706

文部科学省 (2009) , 高等学校学習指導要領, 文部科学省

文部科学省 (2009) , 高等学校学習指導要領 解説数学編 理数編, 実教出版

砂川哲雄 (1994) , 高等学校における教材開発に関する研究—複素数を事例にして—, 上越教育大学大学院修士論文

庄司大祐 (2009), 複素数の理解に関する調査研究, 新潟大学教育学部数学教室『数学教育研究』

小林道正 (1973) , 「虚数はほんとうに“虚”か」—複素数の導入の基本—, 数学教室.(No.246)

吉田洋一 他 (1970), 高等学校 数学ⅡB 改訂版, 好学社

藤田宏 他 (2003) , 数学B, 東京書籍