

グループ活動を取り入れた中学校の数学授業における 数学的知識の社会的構成過程

笹原 佑介

上越教育大学大学院修士課程 2 年

1. 本研究の動機と目的

学校の授業において自分の考えを他者に説明するという機会は多くある。その説明の質について、小学校から続く経験的・帰納的な推論と中学校以降に教師から求められる演繹的な推論との間には隔たりがあり、生徒たちが克服するために教師はどのような手立てを講じることができるか、あるいは必要であるか、ということを筆者は問題意識として持っていた。

この問題意識を解決するために、まず、そもそも生徒たちは数学的知識を構成する際、どのようにしてその正当性を主張し、受け入れていくのかを明らかにする必要があると考えた。また、日本の中学校の数学授業では、グループ活動を取り入れ、生徒同士の相互作用によって数学的知識の構成の促進を図る授業が多く実践されている。

そこで本研究では、生徒が社会的に相互作用を通して数学的知識を構成していく過程を、生徒がどのように数学的知識の正当性を主張し、受け入れ、洗練していくか、その際、教師がどのような影響を及ぼしているかに焦点を当てて明らかにすることを目的とした。

2. 数学授業を解釈・考察する枠組み

2.1. 数学的知識の社会的構成過程

本研究では、Ernest(1998)が提唱する社会的構成主義の立場から、中学生による数学的知識の社会的構成過程を解釈し、考察する。

社会的構成主義とは、数学的知識は主に個人内の会話、あるいは他者との会話を通して構成されるという立場であり、中原(1994)は、社会的構成主義は子どもの数学的知識の認識過程、算数・数学の授業過程、そして数学者による数学の構成過程の各々の実態に該当し、それをよく説明していると述べている。

Ernest(1998)は、数学的知識の社会的構成過程を図1のような一連のサイクルとして示している。Ernest(1998)のサイクルによれば、数学的知識は個人のレベルと公のレベル、学究的文脈と学校的文脈を交互に行き来しながら洗練され、発展していく。このサイクルを、学校の数学授業に沿って解釈すると次のようになる。

学校数学では、まず教師から課題を与えられることから始まることが多い。その課題は、社会的に正当性を認められた“公的な数学的知識”(例えば、概念、計算のアルゴリズム、定理)を教師が“再文脈化”したものであると言える。つまり、再文脈化は数学的知識の教材化と捉えることができ、教材化された数学的知識はしばしば数学的問題として文章の形式で表される。

教師によって課題を提示された生徒は、各々この課題を解釈し、問題の解決に取り組み、数学的知識を構成していく。この過程は、“個人による再公式化”と捉えられる。数学的知識を構成した生徒は、その数学的知識に自分が納得できるような正当性を与える。こ

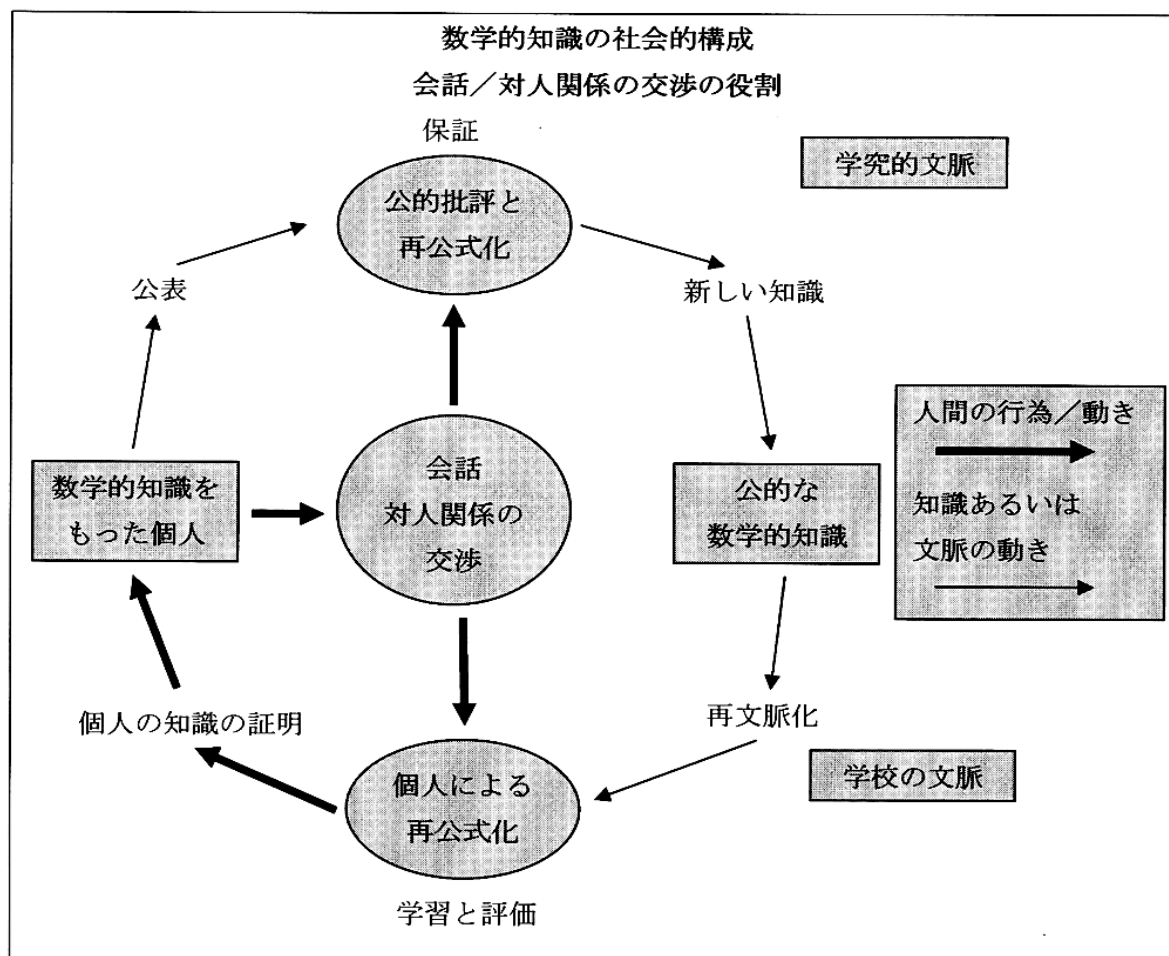


図 1. Ernest(1998)による数学的知識の社会的構成過程のサイクル

の過程は“個人の知識の保証”であり，その形式は記号的に，表象的に，そして手続き的に多様である。

自分なりに正当性を与えた“数学的知識をもった個人”は，その考えは授業の中で，隣の生徒，小グループのメンバー，あるいは学級全体にしばしば“公表”される。

個人が構成した数学的知識が公表されると，“会話・対人関係の交渉”が起こり，公表された数学的知識に対して共同体(小グループや学級全体)によって解釈され，同意や論駁などの“公的批評”を受ける。そして，公表された数学的知識が共同体にその正当性を受け入れられると，その数学的知識は“再公式化”され，共同体にとっての“新しい知識”として再構成される。一方，共同体に正当性を受

け入れられなかった数学的知識は反論・論駁を受け，それらに応じた“個人による再公式化”が繰り返されるのである。これらの過程は，数学的知識が社会的に正当性を認められるために必要不可欠な過程である。

2.2. 数学的知識とその客観性の所在

社会的構成主義の論に立脚する場合，数学的知識には三つの状態が同定できる。一つは，個人が構成したそのままでは客観性を持たない主観的知識である。残りの二つは，他者との相互作用を通して主観的知識にある程度の客観性が付加された状態である準客観的知識と間主観的知識である。

準客観的知識は，共同体に公表された主観的知識が共同体によってその正当性を保証さ

れ、受け入れられ、再構成された状態である。

“準客観的”とは、社会的構成主義の相対主義性を象徴するような客観性の捉え方である。相対主義の立場では、事柄の正当性には絶対的な基準は存在しないため、同様に絶対的な客観性は存在しない。しかしながら、共同体において“ある一定の”基準を満たし、その共同体に受け入れられる事柄があり得る。それを絶対的な客観性と区別して“準客観的”と呼ぶこととする。準客観的知識はこの特徴ゆえに、他の基準によって秩序付けられた共同体によって論駁される可能性を有している。

間主観的知識は、二通りの解釈がある。一つは、Ernest(1998)の論に沿った解釈であり、主観的知識が共同体内で共有され、他者によって思考に用いられた時、知識に間主観性が付加されるという解釈である。このような解釈は、複数の個人に主観的知識が共有されることを前提としているため、間主観性が社会的な客観性の側面を有していると考えられる。

もう一つは、中野(1995)による解釈である。中野(1995)は、主観の内に自己と似ているが、同じではないもう一人の主観である“他我”の存在を認めることを起源とし、他我との自己内対話を通して主張を一致させることで主観的知識に間主観性が付加されることを主張している。間主観性をこのように解釈する場合、間主観性は主観の域を越えない。

本研究では、Ernest(1998)と同様に間主観性が客観性の側面をもつように捉えることとする。

準客観的知識と間主観的知識はどちらも、主観的知識が共同体内の他者に受け入れられた状態であるが、間主観的知識はその正当性の保証を必ずしも必要としない。このことから、間主観的知識は主観的知識と準客観的知識の狭間の状態であると言える。

学校の数学授業では、構成された数学的知識の正当性を最終的に保証するのは、多くの場合教師であり、学級全体に公表され、その

正当性を受け入れられた数学的知識を準客観的知識と捉えることができる。一方、間主観的知識は、教師による正当性の保証なしに構成され得るため、学級内のペアや小グループにおける生徒同士の相互作用を通して構成された数学的知識であると捉えることができる。

2.3. 正当化と論駁

主観的知識が客観性を付加されるために必要な公表の場では、公表された主観的知識が共有されてはいるが、その正当性については同意されていないという状況が生じる場合がある。このような状況においては、主観的知識の主張者がその正当性を他者が納得するように説明する、正当化という行為が起る。

熊谷(1998)は、正当化を“過程としての正当化”と“結果としての正当化”の二つに区別できるとしている。本研究で言う正当化は結果としての正当化にあたり、過程としての正当化は社会的構成主義の立場から見ると、生徒個人が持つ主観的知識が社会的にその正当性を受け入れられ、準客観的知識になるための社会的構成過程そのものであると言える。ただし、熊谷(1998)は、授業で示される正当化を解明するにはこの二つの側面の両方に着目しなければならないことを主張している。

生徒の示した正当化に対する教師の介入に関する研究としては、Stylianides (2007)がある。Stylianides (2007)は、証明問題に従事する学級において、生徒が示した議論が証明とみなされるまで修正、洗練される過程における教師と生徒の相互作用の枠組みを示している。Stylianides (2007)の枠組みは、教師は生徒の議論の質を分析する上で、議論の三つの構成要素—受け入れられた陳述の組、議論の様式、議論表象の様式—に着目し、それ以上洗練し得る構成要素に議論の焦点を移していくことを示している。これに対して筆者は、証明は事柄の正当性を演繹的に説明するものであるので正当化の一種と捉えること

ができ、議論の洗練過程では、証明とはみなされない様々な様式の議論が含まれることから、この枠組みは証明学習以外の学習にも拡張し得ると考察する。

3. 授業の参与観察

3.1. 参与観察の方法と授業内容

実際の中学校の数学授業において、生徒が相互作用を通して数学的知識を構成していく過程を明らかにするために、参与観察を実施した。

参与観察は、新潟県に位置する大学附属中学校第2学年の二学級(A組:40名, B組:40名)を対象に、平成23年6月中旬から7月初旬にかけて計11時間(A組:6時間, B組:5時間)行った。毎時間の授業は、デジタルカメラ六台によって記録した。本研究では、特に相互作用が多く見られた第1時から第4時について解釈と考察を行う。

第1時から第4時では、生徒たちは一筆書き可能なグラフの特徴を探究した。筆者は、中学校の数学授業において一筆書きの問題を扱う利点として以下の二点を挙げる。

- ・一筆書きの問題で扱われるグラフは、二つの構成要素(辺と頂点)からなる単純な構造であり、その特徴を捉えることは小学生でも可能である。
- ・一筆書きの問題に関する証明は、操作的、帰納的側面が強く、証明という形式にとらわれなければ、生徒の論理的思考の育成のための教材の入り口として有効である。

4. 参与観察した授業の実際と解釈

4.1. 辺の数え方を統一する会話

次のプロトコルは、A組第2時において見られた、サキとタエが一筆書きを実演したグラフ(図2)を基にした二人の会話の様子である。

01.タエ:(前略)で、サキここ(F)から始めたじゃん。4つの所から始めてんじゃん。

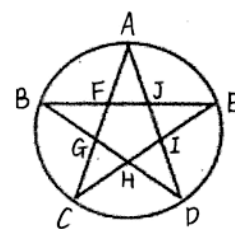


図2

02.サキ:ん。僕ね、ちなみにここ(B)だよ。

03.タエ:あ、ここ(B)ですか。ここ何個ですか?これ(ABとBC)って1個になるの?丸。

04.サキ:んー?

05.タエ:こうなったら、(図3のように数えて)1個, 2個, 3個じゃんか。1, 2, 3.それとも(図4のように数えて)1, 2, 3, 4?



図3

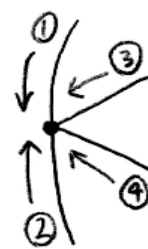


図4

06.サキ:でも、こう、こうなれば(外周をなぞる),

07.タエ:でも、この点だから、やっぱ4つなのか。

08.サキ:うーん。

09.タエ:え、じゃあ4つだから(始点の次数が)奇数でも偶数でも両方できちゃう。

この会話以前、二人の辺の数え方はグラフによって異なっていた。ここでは、“辺は頂点毎に区切る”という二人にとっての間主観的知識が構成されている。タエの、頂点があることを理由にしている“この点だから”という発言(07)は正当化と見ることができ、サキはタエの考え方に共感し、同意している(08)。このように間主観的知識は、主観的知識が明確な正当化なしに二人の生徒の間で共感的同

意によって構成され得ることが分かる。

4.2. 教師の介入による準客観的知識の構成

B組第2時においては、教師が特定の生徒に学級全体へ主観的知識や間主観的知識を公表させた場面が二度見られた。

一度目は、教師が探究の進まないグループのために二つのグループに数学的視点を公表させた場面である。教師はそのうち“点から出てる辺の数”という言葉強調した。その結果、いくつかのグループでは探究活動に進展が見られた。

二度目の共有の場では、教師はタクの主観的知識である“コントロール”の考え方を学級全体に共有させた。この“コントロール”はもともと“辺や頂点の数を数えても意味がない”という主観的知識を正当化するための主観的知識であったが、教師が意図的に公表させたことで、“コントロール”の考え方自体が数学的視点として他のグループでも探究に用いられるようになった。

これらの主観的知識や間主観的知識は、学級全体に受け入れられ、準客観的知識として再構成され、それぞれの個人、あるいはグループにおける探究に用いられていった。しかし、このような主観的知識や間主観的知識を共有する場が設けられなかったA組では準客観的知識がほとんど構成されず、探究の視点がなかなか定まらない、自らの構成した主観的知識や間主観的知識に対して確証を得ることができない、などの影響を及ぼしていた。

4.3. グループ追究への教師の直接的介入

A組第3時においては、教師がヒントを与えることでグループ探究に直接介入していた場面が見られた。教師から数学的視点を与えられたグループは、誘導的ではあるものの、準客観的知識として構成されるべき数学的知識に近い主観的知識、間主観的知識を構成することができた。また、同じ授業において、

“一つ正しいってのをもらえればすぐわかると思うんだよな”という生徒から教師への要望と捉えられる発言もあった。このことから、生徒たちの数学的知識の構成には、教師によって正当性を与えられた数学的知識がいくらか必要であることが明らかになった。

4.4. 正当化の自己修正

次に、B組第3時において見られた、カイ、タク、シンが自ら構成した間主観的知識に対する正当化を洗練しようとする場面を取り上げる。三人は、自らが構成した間主観的知識に対して“何故そうなるか？”という問いを持ち、具体的なグラフを用いて何度も確認していった。次のプロトコルは、三人が“奇頂点が四個の場合は何故一筆書きできないか”について図5を基に探究している場面である。

10.タク：(図5を $B \rightarrow A \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow I$ の順で描いて)こうって($D \rightarrow I$)、こうって($I \rightarrow B$)、こうって($B \rightarrow C$)、こう($C \rightarrow D$)だから、ここ(FGHの部分)は辺の数コントロールできるからこうする(FHを結ぶ)と奇数の点(H)と奇数の点(F)を結ぶ辺(図6の点線)が余る。

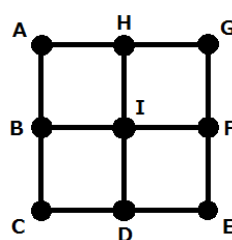


図 5

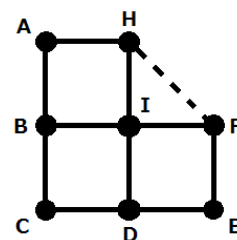


図 6

- 11.カイ：1個。
- 12.タク：余る。
- 13.カイ：そう。
- 14.シン：余っちゃう。うーん、なんか、なんかしっくりこない。ふふふ。
- 15.タク：来ないね。
- 16.シン：なんだろう。

- 17.タク：なんか式で表せてないから、
 18.カイ：そう。
 19.タク：この図形で何個かやって証明するってパターン俺苦手なのね。
 20.シン：うん。
 21.タク：式でこうだって証明できると気持ちいいじゃん。
 22.カイ：まあね。
 23.シン：でもしっくりこないね？
 24.タク：だってさ、5回やって1回成立しなかった場合よ、
 25.カイ：そう。
 26.タク：80%の確率だけど100%じゃなくなるじゃん。
 27.カイ：うんうん。
 28.タク：だからしっくりこないんだよ。

“しっくりこない”理由としてタクは、“図形で何個かやって”(19)、“1回成立しなかった場合”、“100%じゃなくなる”(24)などと発言したことから、帰納的な推論では一般性、普遍性が保証されないと考えていることが分かる。つまり議論の形式に関してさらに洗練する余地があると判断している。さらに、“式で表せていないから”(17)という発言から、その普遍性の保証のために主張の表象の形式に関しても洗練の余地があることを指摘している。

このことから、Stylianides(2007)の議論の三つの構成要素—受け入れられた陳述、議論の様式、議論表象の様式—への着目は、教師が生徒の示した正当化を洗練させようとする時だけでなく、生徒同士で自らが構成した間主観的知識に対する正当化を反省し、洗練しようとする時にも見られると言える。

5. 総括的考察

5.1. 教師の介入の差異

参与観察を実施した授業を通して教師は、各授業の始めと終わりに作業の指示や、各グ

ループの探究の進捗を確認する程度の介入をし、問題解決に関わる数学的知識を教師から生徒に与えることはほとんどなかった。しかし教師は、B組ではA組に比べて個々の生徒や小グループの構成した主観的知識や間主観的知識を共有する場を多く設けていた。そのため、学級全体で共有している数学的知識が二つの学級の間で異なっていた。

教師の介入による差異は、第1時で既に現れている。例えば、B組では“ケーニヒスベルグの橋の問題”を導入として用いていた。教師は、“ケーニヒスベルグの橋の問題”は状況を簡略化することで問題の本質を変えずに問題を言い換えることができることを伝えた。つまり、岸や島を点で、橋を線で置き換えることで、“全ての橋を調度一度ずつ渡る渡り方はあるか？”という問題から、“このグラフは一筆書き可能であるか？”という問題に置き換えた。

この授業で、教師は授業の終わりに黒板上に描いた簡略化したグラフ(図7)と生徒に配布したプリントに載っているグラフ(図8)は、形は異なるが同じ“ケーニヒスベルグの橋の問題”を簡略化したグラフであり、頂点と辺の繋がり方が等しいことからこの二つのグラフは同一のグラフとみなすことができると生徒に伝えた。

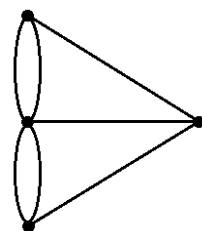


図7

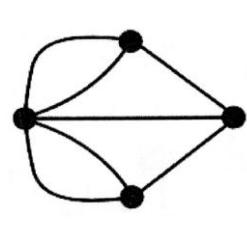


図8

これらの教師の発言は、B組の間で準客観的知識として構成され、各々の生徒によって解釈されていった。第2時のタクによって構成された“コントロール”の考え方は、この教師によって提示された準客観的知識から少なからず影響を受けていると考えられる。A

組では、これらの教師による準客観的知識の提示はなく、“コントロール”のようなグラフの頂点と辺の繋がりを変えずにグラフの外形を変化させるような数学的知識は構成されなかった。

B組では、教師によって主観的知識や間主観的知識を学級全体で共有する場が何度か設けられた。一方、A組では、教師は個人の前時の感想を公表することはあっても、学級全体に数学的知識を示すことはなかった。例えば、B組では第1時に配られたプリントに載っているすべてのグラフについて一筆書き可能かどうか学級全体で確認したが、A組ではその半分程しか確認をしなかった。

特に、A組において教師が図9について一筆書き可能かどうか明確にしなかったことは、A組のほとんどのグループ探究に影響していた。グループでの探究の間いくつかの主観的知識や間主観的知識が構成されたが、図9が一筆書き可能かどうかでその構成された数学的知識の正当性が左右される場面が多く見られた。また、構成された主観的知識、あるいは間主観的知識によれば図9は一筆書き可能だが、やり方がわからないという場面も見られた。

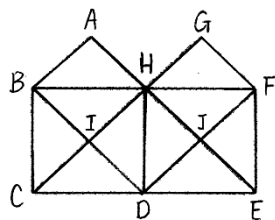


図 9

その際、多くの生徒が教師に“これはできるんですか、できないんですか？”と尋ねたが、教師は結論を言わなかった。またA組の第3時には、生徒から教師への要望と思われる“1つ正しいってのをもらえればすぐわかると思うんだよな”という発言があった。これらの発言はB組では現れていなかったことから、もしA組でもB組のように、図9が一筆書き可能でないことが準客観的知識として学級に受け入れられていたならば、このような葛藤は起こらなかったと考えられる。

5.2. 数学的知識の社会的構成過程の様相

Ernest(1998)の示すサイクル(図1)によれば、個人の構成した主観的知識は公表の場で共同体のメンバーとの相互作用を通してその正当性が受け入れられるようになるまで修正、洗練される。共同体に正当性を受け入れられた主観的知識は、共同体によって新しい準客観的知識として再構成される。共同体によって構成された準客観的知識は個人によって再解釈され、新たな主観的知識の構成に用いられる。このように、Ernest(1998)のサイクルは、主観的知識と準客観的知識の再構成のサイクルとして捉えることができる。

ところが、グループ活動を取り入れた授業においては、共同体への公表以前に、グループ内での会話において数学的知識が発展する過程が現れることになる。つまり、Ernest(1998)のサイクルと併行して、主観的知識と間主観的知識の再構成のサイクルを捉えることが可能である。学校の数学授業で起る過程であるため、教師が準客観的知識を教材化した課題を生徒が個人的に解釈し、自らの持つ準客観的知識を用いて主観的知識を構成するという過程は、Ernest(1998)のサイクルと同じである。4.2.で取り上げた場面のように、学級全体に主観的知識を公表する場が設けられたとすれば、その後の過程はErnest(1998)のサイクルに倣うこととなる。

一方で、個人での探求の後にグループでの探究活動を取り入れる授業の場合、個人によって構成された主観的知識はまず学級という共同体内のより小さな集団であるグループ内で公表されることとなる。グループ活動の間、主観的知識の正当性の保証は基本的には生徒同士の相互作用に委ねられる。そして、グループ内において正当性を受け入れられた主観的知識は、グループのメンバー間において間主観的知識として再構成される。この間主観的知識もまた個人によって再解釈され、新たな主観的知識の構成に用いられるようになる。

例えば、4.4.で取り上げた場面で、カイ、タク、シンの三人は、帰納的な推論によって幾つかの主観的知識を個々に構成し、互いの共感的同意によってそれらを間主観的知識として再構成していった。彼らは、その間主観的知識を正当化するためにさらに帰納的な推論を繰り返した。その結果、“グラフが奇頂点を0個または2個もつ時一筆書き可能である”という間主観的知識の正当性を確認するために一筆書きの始点と終点へ着目したことで、タクが“奇頂点を始点とする一筆書きは始点と終点が異なる”という新たな主観的知識を構成し、その主観的知識もまたカイとシンに受け入れられ、三人にとっての間主観的知識として再構成された。

このように、グループ活動を取り入れた授業では、間主観的知識が新たな主観的知識の構成に関与し、新たに構成された主観的知識が他者に受け入れられることで間主観的知識として再構成される、という主観的知識と間主観的知識の再構成のサイクルが存在することがわかる。

このようなサイクルの繰り返しによってグループ内で修正、洗練された間主観的知識は、参与観察を実施した授業の第4時に設けられたような公表の場において共同体のより広範囲のメンバーに公表される時、主観的知識と同様に扱われ、他のグループとの相互作用によってその正当性を受け入れられるよう修正、洗練されていく。さらに、最終的に学級全体にその正当性を受け入れられた間主観的知識は、学級全体にとっての準客観的知識として再構成され、各々の生徒によって個人的に再解釈されていくと考えられる。

以上のことから、学校の数学授業において数学的知識の社会的構成過程を見る時、主観的知識と準客観的知識の再構成のサイクルと主観的知識と間主観的知識の再構成のサイクル、そして二つのサイクルを包括した主観的知識、間主観的知識、準客観的知識を順に巡

る再構成のサイクルの三つのサイクルが併行して存在していることが明らかになった。

6. まとめと今後の課題

本研究では、中学校の数学の授業において構成される間主観的知識の特徴をいくつか捉えることができた。また、準客観的知識が正当化や論駁なしに、教師の発言によって暗黙のうちに正当性を与えられることがあるという知見を得た。これらは、グループ活動を多く取り入れた我が国の授業の特徴であると考えられる。

しかし、学級全体で相互作用を通して準客観的知識を構成していく場面がほとんどなく、その特徴を明らかにすることはできなかった。今後は、間主観的知識が構成される生徒同士の会話の特徴から、学級全体における相互作用を通じた準客観的知識の構成過程に必要であろう教師の介入や、生徒の活動を考察していきたい。

【引用・参考文献】

- Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. New York : SUNY.
- 中原忠男. (1994). 数学教育における構成主義の展開—急進的構成主義から社会的構成主義へ—. *日本数学教育学会誌*, 76(11), 302-311.
- 中野俊幸. (1995). 数学教育における Radical な構成主義の現象学的視点からの考察. 第28回数学教育論文発表会論文集, 日本数学教育学会, 113-118.
- 熊谷光一. (1998). 小学校5年生の算数の授業における正当化に関する研究—社会的相互作用論の立場から—. *数学教育学論究*, 70, 日本数学教育学会, 3-25.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 3, 289-321.