

複素数学習における指導改善に関する研究

—生徒の虚数単位 i の演算の意味理解に焦点を当てて—

中澤 健二

上越教育大学修士課程2年

1. はじめに

小学校, 中学校, 高等学校の算数・数学の授業では, 様々な数とその拡張を学習する。その様々な数と数の拡張を学ぶ過程において学校数学で最後に学ぶ数が複素数である。複素数学習は, 現在の学校教育において数概念の集大成であり, 他の数概念を包含する意味からも学校数学にとって非常に大切な数概念であると筆者は認識している。筆者は, この認識を持つ中で, 教育実習中に不思議に思ったことがある。ある生徒が放課後に筆者の元へ数学の受験問題を質問しに来たときのことである。質問を受ける中で生徒がふと, 「複素数って計算とかは, なんとなくできるんだけど, なんでこれ(複素数)を勉強するのか, まったく分からない」「虚数(虚数単位 i)の存在意味が分からない」と筆者に言ってきたのである。その生徒によれば, 数学IIでいきなり2次方程式の解に関する学習で複素数が登場し, 一通り計算を行って授業が終わったために, 複素数の学習に疑問を感じたと述べていた。つまり, 数学Iでは解けなかった2次方程式の解において解を拡張し, 新たな数である虚数及び複素数を考え, 四則演算を行い複素数の授業は終了という現在の教科書の流れにより, 生徒はそう感じたと考え

ることができる。実際, 筆者の高校時代も同様に「虚数単位 i の導入」, 「2次方程式の解の拡張」及び「複素数の四則演算」という複素数学習の流れであった。

ここで筆者は, 複素数学習に対し一つの疑問が生じた。現在の複素数学習では, 2次方程式の解の拡張として導入され, 演算に関してもただ計算を行って終わりという流れであり, 従来の方の拡張で行っているような指導がなされていないのではないかと考えた。数の拡張には, 大小関係と演算可能性を述べる必要があると考え, 大小関係を持ちえない虚数及び複素数には演算可能性を生徒に理解させることが, 虚数及び複素数学習において重要であると考え。特に生徒の質問から虚数単位 i の理解が不十分だと感じた。

実際に虚数及び複素数がどういった指導の流れを行っているかを見る必要がある。中澤(2011a)では, 現在までの複素数学習を概観するために, 3冊の教科書分析を行った。教科書分析では, 虚数単位 i に関する解説や説明が少ないことを述べた。虚数単位 i に関する解説や説明とは特に, 虚数単位 i の演算についてである。この虚数単位 i の演算に関する説明や解説が不十分であることが, 生徒の複素数学習の意味理解を妨げる一つの要因と

考えるに及んだ。

本稿の目的は、複素数学習の導入である虚数単位 i の演算に焦点を当て、生徒が複素数学習の中で、複素数の意味理解に迫ることができる指導改善を目指すことである。

次の第2節では、現在の複素数学習における問題点を、筆者が実施したアンケート調査の分析結果より述べる。第3節では、アンケート調査の分析結果より述べた問題点の改善を図る際にどのような改善策があり、その内容を述べる。第4節では、複素数導入時の特に虚数単位 i の学習に焦点を当て、数学的活動の一例を述べる。第5章では、数学的活動の一例を、教師の問題提示と生徒の活動の2つにより授業展開案を提示した。

2. 学生・院生の複素数概念の理解の様相に関するアンケート調査について

本節は、学生・院生の複素数概念の理解の様相を調べるために実施したアンケート調査の結果を分析し、現在の複素数学習における問題点を述べている。調査の概要は以下の通りである。複素数概念の理解の様相とは、特に学生・院生の虚数単位 i における演算に関する理解の様相とする。

学校：国立大学教育系 及び 私立大学理系
日時：平成2011年,7月19日,21日,27日
調査時間：約30分
対象：大学2,3年生(191名),大学院生(12名)
7月19日：国立大学教育系 68名,
21日：国立大学教育系 77名
27日：私立大学理系 58名
既習知識：複素数平面 履修者 162名
：複素数平面未履修者 41名
記録内容：学生・院生によるアンケート調査用紙への記入

アンケート調査は各個人で回答するものとし、周囲と相談しないように指示したものである。このアンケート調査は、対象者個人の

これまでの複素数学習における傾向をその回答から見るができる。

アンケート調査において調査対象を学生・院生とした理由は、複素数平面履修者と未履修者がおり、複素数の理解に関して履修者と未履修者の回答の差異を見ることができると考えたためである。

アンケート調査の調査問題を以下に記す。

- 問1 1に(-1)を掛けることを数直線(図)を使って説明してください。
- 問2 i に i をかけると(-1)になりますが、そのことを上の「問1」からどのように説明できるでしょうか。書いてください。
- 問3 $x^2 = -1$ を満たす x を求めてください。
- 問4 $1 \times i$ の計算結果はどうなりますか。なぜそうなるのか説明してください。
- 問5 $1 \div i$ の計算結果はどうなりますか。なぜそうなるのか説明してください。

図2.1 アンケート調査の問題

次から、各問題に対する結果と分析を述べていく。

表2.1 問1における学生・院生の回答結果のまとめ

学生・院生の区分	回答の種類	203人中、 回答者数	割合(%)
複素数平面履修者	反転として説明	14人	7.2%
	回転として説明	46人	23.1%
	無回答	66人	32.5%
複素数平面未履修者	反転として説明	12人	5.9%
	回転として説明	11人	5.6%
	無回答	52人	25.6%

問1は、1に(-1)を掛けることを数直

線 (図) を使って説明してもらった問題であった。問1は、問2と関連があり、まずは実数の $\times(-1)$ という演算について問う問題である。表2.1から分かるように、1に (-1) を掛けることを<回転>と<反転>という2つに分けた。回転として捉えていた者は、複素数平面未履修者に比べ、履修者のほうが多いという結果となった。この問1の結果を踏まえ、問2を見ていく。

問2は、問1を基に学生・院生に対し i に i をかけると (-1) になることを図形的に説明させる問題であった。しかし、複素数平面を履修した者ですら、 $i \times i$ の図形的な説明が1人も回答できていなかったのである。しかし、複素数平面未履修者の中に、 $i \times i$ の図形的な説明(図2.1)を試みた者がいた。

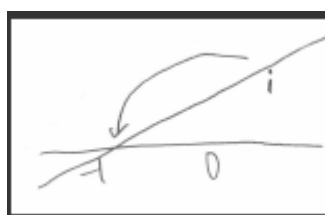


図2.1 $i \times i$ の複素数平面未履修者の回答の一例

図2.1は、 $i \times i$ の図形的説明を試みた複素数平面未履修者の回答である。実軸や虚軸などの直交に関する間違いはあるものの、 i から -1 の矢印があることから、回転と捉えていることが分かる。このことから、複素数平面未履修者であっても、複素数平面を用ずに $i \times i$ の図形的説明による理解の可能性があると考えられる。

問3は、虚数単位 i に関する簡単な2次方程式を解く問題である。問題の答えに関し、 $x^2 = -1$ を満たす解を求めるため、2次方程式の解は2つということと、解が虚数であることを生徒は理解していなければならない。この問題に対し、学生・院生の回答結果を以下にまとめた。(表2.2)

問3の「 $x^2 = -1$ を満たす解を求める」問

題では、複素数平面履修・未履修に関係なくどちらの正答率も低いことが分かる。また、全体の52.1%が解を i の1つのみで回答し、30.6%が無回答であった。このことから、2次方程式 $x^2 = -1$ を満たす解と虚数単位 i の定義を区別できていない学生・院生がいると考えられる。

表2.2 問3における学生・院生の回答結果のまとめ

	±iと回答した者(人数)	割合(%)
複素数平面 履修者	162人中 22人	14.1%
複素数平面 未履修者	41人中 13人	31.7%
全体	203人中 35人	17.3%

問4は、 $1 \times i$ の計算結果と、なぜそうなるかを説明する問題である。問4における学生・院生の回答結果を以下にまとめる。

表2.3 問4における学生・院生の回答結果のまとめ

解答例	回答数(人), 全203人	回答率(%)
i が1つ分と考える	8	3.9
i を文字として捉える	4	1.9
i に1をかけても(i を1倍しても) i という	23	11.3
i は2乗以外は文字として考える	1	0.4
iに着目し回答	36	17.7
1は省略できる	11	5.4
1に何をかけても、かけたものになる	10	4.9
1は単位元だから	1	0.4
1が <i>i</i> 個ある	1	0.4
0以外のものに1をかけても、かけられたものはかわらない	1	0.4
1に着目し回答	24	11.8
積の法則より	1	0.4
$1 \times 0 = 0$ のように	1	0.4
その他	2	0.9
合計	62	30.5

問4について、言葉を用いて説明できていた学生・院生は全体の30.5%しかいなかった。また、言葉を用いた説明であっても、1や*i*

の数に着目しており、 $\times i$ という演算に関する説明を行っている者はいなかった。このことは、虚数単位 i の学習において学生・院生には虚数単位 i の演算という数学的な概念がほとんど存在していないことが要因の一つと考えられる。つまり、現在の複素数学習には、虚数単位 i に関する演算の指導が不十分であると言えよう。

問 5 は、 $1 \div i$ の計算結果と、なぜそうなるかを説明する問題である。問 5 における学生・院生の回答結果を次のページにまとめる。

問 5 は、言葉を用いて説明できた学生・院生は全体の 13.7%しかいなかった。学生・院生の問 5 の正答率が、問 4 の正答率から半分以下となっている。つまり、虚数単位 i の割り算は掛け算と比べても特に、説明や理解が困難だということが分かる。

表 2.4 問 5 における学生・院生の回答結果のまとめ

解答例	回答数 全28人	回答率(%)
i はマイナスから分取れない	1	04
i は2乗以外は実数と一緒に	1	04
i は文字と一緒に	1	04
iに着目	3	14
1を i で割るから	4	19
0以外の i にどんな数をかけてもかわらないから	2	09
$1i$に着目	6	29
$A \div B = A/B$	6	29
$1 \div i/i$	3	14
公式として	9	44
有理化の説明	4	19
割り算が分数で表せる	6	29
その他	10	40
合計	28	100

表 2.4 から読み取れるように、問 4 と同様 1 や i の数に着目し説明しており、 $\div i$ という虚数単位 i の割り算に着目し、説明している者はいなかった。また、計算結果であっても $1/i$ で回答を止めている者も多く、有理化まで行い i と回答していた者は全体の 32.2%であった。これは、複素数の演算が閉じていること、つまり複素数の演算の結果は常に複素数

であることが、現在の複素数の授業にでほとんど触れられられないことに起因していると考えられる。

学生・院生の複素数概念の理解の様相に関するアンケート調査の分析結果から、現在の複素数学習導入時に見られる問題点が指摘できる。

【問題点】

- ① 虚数単位 i の定義と 2 次方程式 $x^2 = -1$ を満たす解との区別ができていない。
- ② 現在の虚数単位 i についての学習では、演算の意味についての学習がほとんどなされていないため、生徒の虚数理解に繋がらない。
- ③ 特に、 $1 \div i$ の答えを $-i$ ではなく、 $1/i$ としている者が多く、複素数の演算が閉じているということについて理解できていない。

ここで注意したいのは、複素数平面履修者ですら、虚数の演算における意味を理解できておらず、幾何的説明にも至っていないということである。

これらのアンケート調査の結果と問題点を踏まえ、虚数・複素数の理解を深める授業展開を述べる。

アンケート調査の結果から、学生・院生は虚数単位 i の演算における説明について、代数的説明を多くの者が回答できることが分かった。しかし、回答はしているものの今回の問題に対し、ほとんどのものが正しく説明することが出来ていない。教科書では、導入から演算の代数的説明を行っているにも関わらず、何故このような正答率の低い結果となったかを考える必要がある。その結果の要因の一つには、虚数単位 i の演算に関する指導が少ないことがあると考える。もう一つは、虚数単位 i の演算の説明において代数的説明だけでは、虚数単位 i 自体や演算の説明が不十分であると考えられる。なぜならば、アンケート

結果から分かるように、 $1 \times i$ や $1 \div i$ などの説明ができていないことや、複素数の演算が閉じていることが理解できていないからである。複素数平面履修者であっても正答率は低い結果となったが、 $1 \times i$ や $1 \div i$ などの演算は幾何的に説明することが可能であり、それは生徒にとって演算の理解を行う際のもう一つの考え方と言える。つまり、虚数単位 i における演算の理解には、代数的側面と幾何的側面を用いる必要があると考える。

教科書の概観によって、現在の複素数学習は、代数的側面による指導がほとんどであり、虚数単位 i の演算の説明が少ないことが言える。

図 2.2 は、アンケート調査の問題点を基に、虚数単位 i の幾何的説明を加えた指導方法と虚数単位 i の演算に焦点を当てた指導の 2 つが重要と考え、提示した。教師による指導で生徒は、虚数・複素数概念の理解を目指す。本節では、教科書の分析とアンケート調査の結果から、生徒は虚数・複素数概念の理解を目指すにあたり、代数的側面と幾何的側面による虚数・複素数の演算に関する理解が必要であることを述べた。図 2.2 におけるベクトル(矢印)は生徒の数学的活動による理解の流れを示している。太い矢印は、代数的側面・幾何的側面という指導によって虚数・複素数概念の理解へ繋がることを示している。

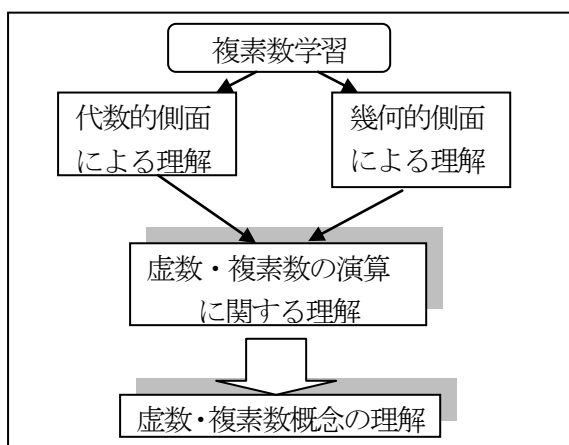


図 2.2 虚数・複素数の理解を深めると考える授業展開図

以上が、学生・院生を対象とした複素数の演算（特に虚数単位 i の演算）に着目したアンケート調査の結果とそこから見える問題点である。次の節では、虚数単位 i の演算においてどのような指導改善が必要かを述べていく。

3. 虚数単位 i の演算に焦点を当てた指導改善について

第 3 章は、虚数単位 i の演算に焦点を当て、いつ、どのような指導が必要かを述べる。第 2 節では、学生・院生を対象としたアンケート調査の分析結果及び図 2.3 から現在の代数的側面による虚数・複素数学習に幾何的側面を用いた虚数・複素数の演算理解が必要であると述べた。本研究では特に、虚数単位 i に焦点からの幾何的側面を用いた指導が必要であると述べているため、虚数単位 i の導入時（複素数導入時とも言える）から必要であると考えられる。

本稿では、虚数・複素数学習における幾何的アプローチを次のように定める。

「図や図形的性質の説明に焦点を当て、幾何的に演算の理解や複素数学習の理解を深める指導内容」

従来の代数的側面による指導だけではなく、幾何的アプローチを用いることで生徒の虚数・複素数の理解を深めていく必要がある。

虚数・複素数の演算における幾何的アプローチには、複素数の四則演算における性質、虚数単位 i の累乗や逆数の値の循環性、複素数の演算が閉じていること等がある。

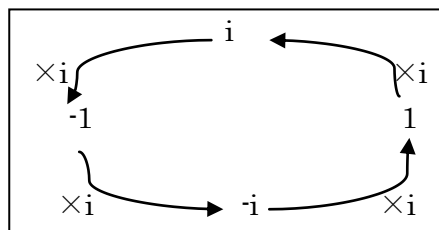


図 3.1 虚数単位 i の累乗の幾何的側面の一例

ここでは、虚数単位 i の累乗や逆数の値の循環性を幾何的側面を用いて詳しく述べる。虚数単位 i の累乗の値は、 $i, -1, -i, 1$ であり、

これら4つの値は循環する。これを複素数平面を用いず、幾何的説明を行うと図3.1となる。

図3.1は実軸や虚軸を用いない虚数単位*i*の累乗の4つの値が循環することを図を用いて説明している。図3.1を用い指導を行うことで、虚数単位*i*の演算に関する一端を生徒が理解できると考える。また、図3.1の虚数単位*i*の累乗の説明は、虚数単位*i*の累乗における幾何的アプローチである。同様に、虚数単位*i*の逆数の累乗、つまり虚数単位*i*の割り算の繰り返しは図3.2となることがわかる。

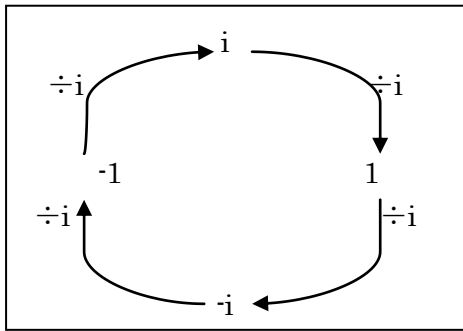


図3.2 虚数単位*i*の逆数の累乗(割り算)の幾何的側面の一例

図3.2も実軸と虚軸を用いずに虚数単位*i*の逆数の累乗(*i*の割り算)を図を用いて説明している。図3.2は、 $\div i$ を $\times 1/i$ と同値であることの指導を通すことで、アンケート調査の結果にある、 $1/i$ と*i*について同値であることが生徒にとって分かりやすいと考える。

以上が本論文における虚数・複素数学習における幾何的アプローチの定義と具体例である。次の節では、これらの幾何的アプローチを活用するための、虚数・複素数学習導入時の改善方法及び虚数・複素数学習の数学的活動を考える。

4. 虚数・複素数学習導入時における幾何的アプローチを生かした数学的活動

本章ではまず、虚数・複素数学習導入時において幾何的アプローチを用いるための改善方法を述べる。まず、現在の虚数・複素数学

習における問題点を振り返る。

【問題点】

- ① 虚数単位*i*の定義と2次方程式 $x^2 = -1$ の解との区別ができていない。
- ② 現在の虚数単位*i*についての学習では、演算の意味についての学習がほとんどなされていないため、生徒の虚数とその演算の理解に繋がらない。
- ③ 特に、 $1 \div i$ の答えを*i*ではなく、 $1/i$ としている者が多く、複素数の演算が閉じているということについて理解できていない。

以上が現在の虚数・複素数学習における問題点である。問題点①から③までを幾何的アプローチを用いる解決方法以下の(1)~(3)が考えられる。

- (1) 数の拡張により実数と比較することで複素数の持つ性質や複素数の必要性を理解させる。
- (2) 代数的な計算だけではなく、従来ではほとんど指導されていなかった演算の意味について学習させることで、複素数の理解を深めさせる。
- (3) 演算の理解には、幾何的側面に焦点をあてた指導が必要であり、複素数導入段階の学習で幾何的側面による指導が必要となる。

次に(1)から(3)の解決方法と虚数・複素数学習における幾何的アプローチの概念を用い、生徒が虚数・複素数の必要性や演算理解を深めることができると考える数学的活動の流れを提示する。複素数学習に関しても虚数同様の幾何的アプローチに焦点を当て、数学的活動の流れを作成した。

A 虚数の導入

2次方程式で解が虚数となる問題をいくつか取り上げ、解の公式から $\sqrt{-0}$ となる形を導出する。この $\sqrt{-0}$ を2乗して -0 になる新しい数(虚数)として定め、元の方程式に代入し、

検算させることで虚数の存在を確認させる。

B 虚数の演算

虚数の四則演算を取り上げ、実数との比較や計算結果がどのような数になるかを確認させる。特に虚数単位 i の累乗が4つの値 $1, i, -1, -i$ で循環することを確認させる。このことは i の幾何的側面の一端として捉えることができる。

C 複素数の導入

虚数を新たな数として加えることで複素数 $a+bi$ という形を導入し、実数との比較を行い、新しい数である複素数について考えさせる。複素数は2つの元となる数によって表現され、直線上には図示できないことを確かめさせる。

D 複素数の演算

複素数を例えば $a+bi, c+bi$ と置くことによって、複素数の四則演算の結果はすべて複素数となる、すなわち、複素数が演算について閉じていることを確かめさせる。このことは複素数の四則演算の結果は全て $a+bi$ という形で表されることを示しており、複素数学習にとって大きな意味を持つものである。

以上が、複素数学習における幾何的アプローチを生かした数学的活動の流れである。

次に、A から D の幾何的アプローチを生かした数学的活動の流れを基に、授業展開を考えていく。

5. 複素数学習導入の虚数単位 i に関する幾何的アプローチを生かした授業展開案

本節では、まず授業展開案の「問題提示」を取り上げ、次に生徒が行う虚数単位 i に演算の意味理解を目指した数学的活動を述べる。

<問題提示>

① $x^2 - 1 = 0$, $x^2 - x + 1 = 0$,
 $2x^2 + x + 3 = 0$ を解く。

② 数学 I では解がなかった。解は解の公式を使うとどのような形になったか。

③ $\sqrt{-1}$ の形のまま元の式に代入してみよう。

④ これまで実数の範囲では負の数であっても2乗すると正になる。実数は2乗して負になることはない。今回の問題のように $\sqrt{-1}$ の形のものを数と考えると2乗すると負になる数である。 $\sqrt{-1}$ という形になるものを新しい数として考え、それを虚数単位 i と定めることにしよう。そう定めると、 i^2 はどのようなようになるだろう。

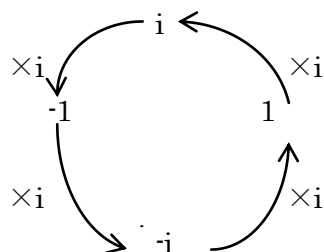
⑤ この虚数単位 i についての計算をしましょう。

$$i+i, i-i, i \times i, i \div i$$

⑥ 次の計算をを考えてみよう。

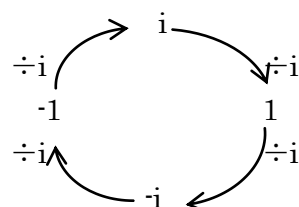
$$1+i, 1-i, 1 \times i, 1 \div i$$
$$1 \times i \times i, 1 \times i \times i \times i \dots$$
$$1 \div i \div i, 1 \div i \div i \div i \dots$$

⑦



図を提示する。

⑧



図を提示する。

⑨ $(-1) \times i$ を $-i$ と表すことにすると、 $(-i) \times (-i)$ はどうなるか。

⑩ $x^2 = -1$ の解は i と $-i$ の2つである。

- ⑪ $\sqrt{-3}$ は、 $\sqrt{-1 \times 3}$ と考えると、 $\sqrt{-3}$ は i を用いてどのように表されるか。
では、元の方程式の解を i を使って表してみよう。
- ⑫ $(3+2i)-(4-5i)$, $(-2+i) \div (3+6i)$ の計算結果から形はどうなるだろう。

①から⑫は教師による問題提示である。次に生徒の活動を①から⑫までを見ていく。①は、計算の結果ルートの中がマイナスになる問題を解くことで、生徒が解がないことに気付く。②は、ルートの中がマイナスのまま値を導く。③は、②で出た値を元の式に入れて計算してみる。④は、(新しい数)² < 0

を考える。2乗して-1となる新しい数を考え、それを虚数単位 i と定める。そうすると $i^2 = -1$ となることを確認する。⑤は、計算結果がどのようになるかを考える活動を行う。⑥についても、計算の結果を考える活動を行い、教師やクラス全体で確認する。⑦及び⑧は、⑥の計算を基に、教師により提示することで、生徒は容易に理解できる。⑨は、虚数単位 i にマイナスがついている状態を考えることで、虚数単位 i の計算の特質を生徒は理解していく。⑩は、簡単な2次方程式を改めて解くことで、方程式と虚数の繋がり、つまり2次方程式の解としての拡張を考える。⑪は、虚数単位 i の表現が可能になった生徒が初めて、①における解を虚数単位 i を用いて表現する。⑫は、複素数の導入に繋げるために、虚数と実数はどこまで計算できるかを確認することで、複素数の $a+bi$ の導入に繋げる。

以上が、虚数単位 i の導入時における幾何的アプローチを生かした授業展開案の一例である。この授業で重要な点は、虚数単位 i の演算をより丁寧に行い、累乗や逆数の累乗の説明には、演算のサイクルを意識できる図を

用いて説明するところである。

6. まとめと今後の課題

本稿の目的は、虚数・複素数学習の虚数単位 i の導入時の演算に焦点を置き指導改善を図ることであった。学生・院生を対象としたアンケート調査により現在の複素数学習における問題点を提示した。次に、生徒に虚数単位 i の演算の意味理解をさせるためには、従来ほとんど指導されていなかった、幾何的アプローチを行う必要があることを述べた。さらに、虚数単位 i の学習における幾何的アプローチとは何かを提示し、虚数・複素数学習の導入時に幾何的アプローチを生かした授業展開案の一例を提示した。

今後の課題は、本論文の授業展開案を実際の教育現場で実践し、生徒の虚数・複素数に対する理解の様相を調べていくことである。

【引用・参考文献】

- Panaoura, A, et al. (2005), *Geometric and algebraic approaches in the concept of complex numbers*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol.37, No.6, 15, September 2006, 681-706.
- 庄司大祐(2009)「複素数の理解に関する調査研究」, 新潟大学教育学部数学教室『数学教育研究』, 第44巻, 第1号. pp.11-23.
- 砂川哲雄(1994).「高校数学における教材開発に関する研究—複素数を事例にして—」. 上越教育大学修士論文.
- 中澤健二(2011a)「複素数学習における幾何的アプローチについて」., 上越数学教育研究 26. pp. 113-122.
- 中澤健二(2011b).「複素数導入時における学習改善に関する考察—複素数学習の幾何的アプローチを志向して—」. 第44回数学教育論文発表会文集(第1巻). 日本数学教育学会. pp. 417-422.