

証明学習において証明の機能が活かされる様相

— 証明の機能としてのコミュニケーションの視点から —

松井 悠香

上越教育大学大学院修士課程 2 年

1. はじめに

筆者が中学校 3 年時に使用していた教科書において, 証明とは「すでに正しいと認められたことがらをよりどころとして, あることがらが成り立つことを筋道立てて述べること」(吉田稔, 2005 年発行, p.115) であると記されている。この証明の意味のもと, 「証明のしくみ」という証明の形式を修得した。そのため, 証明とは「仮定(条件)を順序よく並べ, 結論(命題)を導くこと」と捉えていた。このような捉えをすることで, 教科書に記されている証明の意味を理解することはできるが, 証明の「ある事象が正しいことをまず自分が納得し, 他人を説得する手だてである」(中学校学習指導要領解説数学編, 2008, p.41) ことまでの理解に至らないのではないかと考えた。

また, 就職活動における面接の場面での面接官とのコミュニケーションは, 証明のようだと感じた筆者の経験から, 証明とコミュニケーション能力との間には何か関係があるのではないかと考え, 証明学習におけるコミュニケーションに焦点を当て研究に取りかかった。学校教育においては, コミュニケーション能力の一つとして, 「表現する力」の育成に重点が置かれている。中学校学習指導要領解説数学編(2008)における「表現すること」, 「コミュニケーション」を踏まえ, 数学教育におけるコミュニケーション能力とは, ある事象について数

学的に考察し, 自己の考えを他者にも納得のいくよう論理的に示すことができる力ではないかと考えた。このような力を育むためには, 証明学習指導の充実が必要であり, ある事象について他者とかかわりあいながら互いの考えを共有し, 自己の考えを振り返りながら修正や正当化を行い, 事象に対する考えの質を高めながらいかに論を成す(筋道立てて説明する)か考える活動を重視していく必要があると考えた。これまでの研究(松井 2011a, 松井 2011b, 松井 2012)においては, このような問題意識のもと, 杉山(1975)と De Villiers(1990)の考えを併せ, 「証明」と「証明の機能」の捉えを広げ深めた。

本稿の目的は, 松井(2012)において行った調査授業の記録を証明(Proof)における証明の機能としてのコミュニケーション(communication)の視点から再度分析・考察し, 証明学習において証明の機能がどのように活かされているのかを明らかにすることである。そのために, まず第 2 節において松井(2012)を振り返り, 分析の視点を明らかにする。次に第 3 節において 2 回の調査授業の記録を分析・考察する。この分析・考察をもとに, 調査の総括的な考察を行うことで, 証明の機能を活かした授業を明らかにする。最後に第 4 節において本稿のまとめと今後の課題を述べる。

2. 分析の視点

本節では、松井（2012）を振り返ることにより、本稿における調査授業の分析の視点を明らかにする。

松井（2012）において、まず証明の捉えを広げ深めるために、中学校学習指導要領解説や教科書、参考研究を考察した。そして杉山（1975）と De Villiers（1990）の捉えを主として、「証明」と「証明の機能」を以下のように捉えた。

証明（Proof）

基本的な事項（公理/定義/定理）と命題（証明すべき事柄）において、相互的に双方向の関係を示すことであり、「証明の機能」が深く関係している。

証明の機能

主に基本的な事項から命題を導く際に活かされる“demonstration”の機能と主に命題と構成する基本的な事項を分析する際に活かされる“proof”の機能、およびそれら機能全てにかかわる「コミュニケーション」の機能がある。“demonstration”の機能内には、“verification”と“explanation”の機能，“proof”の機能内には“discovery”と“systematization”の機能が含まれる。

証明の機能の概要は以下の通りである。

verification（立証）

- ・証明するための前提条件
- ・厳密な証明よりも確信の水準は高く、証明しなくても疑問を打ち消すことができる

explanation（説明）

- ・結果がなぜ真であるのか十分な説明を与える
- ・洞察や理由に対して心理的な満足感を

与えることができ、いい証明の基準になる

systematization（体系化）

- ・仮定が正しいかどうかみることができること
- ・陳述、定理や概念などを統合することで理論を簡素化し、簡潔な結果を導くことができること
- ・証明しているものがよく見えること
- ・公理や定義の適合をチェックすることで、数学の内外面の適応に役立つこと
- ・新しい視点を与え、もっとよい体系を導くこと
- ・すでに真であることが分かっている論理上関係のない特定の陳述を論理的に統一された全体の中に構成すること

discovery（発見）

- ・新たな結果を導くこと

communication（コミュニケーション）

- ・数学的成果を伝達する独特の方法
- ・反例の発見により、否認することだけでなく、その証明の改善や誤りの識別を与える

この時点では、コミュニケーションの機能を他の機能全てにかかわる機能としか捉えることができなかった。なぜなら、“communication”を機能としてではなく、活動としてしか捉えることができなかったからである。その後、証明学習における「証明を考える」場面を分析し、証明の機能がどのように活かされているのかを考察することによって、証明の機能としてのコミュニケーションを次のように捉えた。

証明の機能としてのコミュニケーション

- ① 基本的な事項と命題との間の関係性を録し、社会に発信することができるだけでなく、記録を自分の中で吟味することもできる。

- ② 数学的表現により他者と互いの数学的知識を伝達可能なものにすることで、理解し合い、数学的知識の質を互いに高めることができる。
- ③ 時と場所を超えて活かされ、先人の考えた数学的知識を受けとることや、数学的知識を後世に確実に伝えることができる。

①の機能を根底として②，③の機能が存在すると考えた。また，証明学習の中では，ワークシートやノートの記録を媒体としてコミュニケーションすることで，数学的知識が洗練されていくと考え，記録は必ずしも紙面に表されるものではないと考えた。以上の証明（Proof）および証明の機能としてのコミュニケーションを含む証明の機能の捉えを証明学習の授業をみる視点とした。この視点を基に，証明学習における活動から，証明の機能，特に証明の機能としてのコミュニケーションを捉えるために，調査授業を構想・実施した。その調査結果を分析・考察することによって，証明（Proof）における証明の機能としてのコミュニケーション（communication）は「“demonstration”の機能と“proof”の機能を繋げる役割がある」という考えに及んだ。

先に述べたように，松井（2012）における証明（Proof）とは，基本的な事項と命題との関係性を示すことであった。この関係性に関する理解を深めるためには，“demonstration”の機能と“proof”の機能の両機能を理解する必要がある。つまり，「基本的な事項を基（根拠）にして命題が真であることを示すこと」ができるということを理解するだけでなく，「どのような基本的な事項を基（根拠）にしてその命題が真であると示されているかを理解する」ことも必要である。根拠を分析することによって，その論の矛盾や妥当性を判断したり，

命題の発展性を発見したりすることができる。また，矛盾が発見されたならば，基（根拠）にしていた基本的な事項を改め，妥当であると判断されるように再構築することができたり，命題の発展性を発見したならば，その命題が真であることを新たに示したりすることができる。それゆえ，両機能は相互的に活かされ，活動の中で機能することによって，証明（Proof）に関わる数学的知識が洗練され，その質が高まっていくと考えた。それゆえ，証明（Proof）を次のように図示した（図1）。

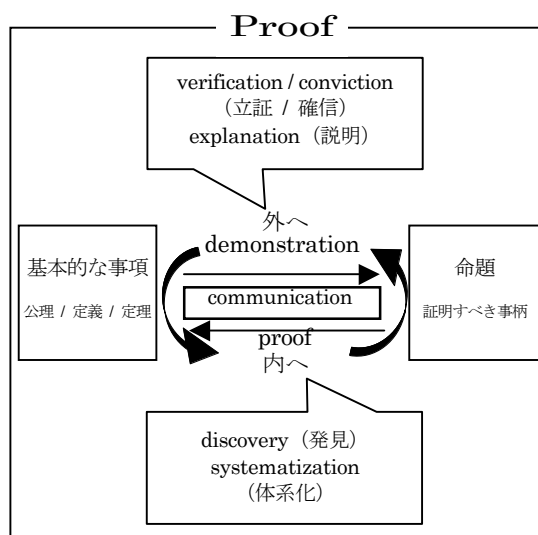


図1

松井（2012）において得た証明（Proof）における証明の機能としてのコミュニケーション（communication）の捉えを本稿における調査授業を分析する視点とし，証明学習における証明の機能を次に考察していく。

3. 調査授業の分析と考察

3.1. 調査授業の概要

平成23年11月下旬から12月上旬にかけて，長野県公立K中学校第2学年1クラス34名を対象とし，調査授業を実施した。授業内容は，図形領域の単元内の2時間，第

1 時「三角形の内角の和」、第 2 時「三角形の合同条件」とし、VTR と筆記により授業の様子を記録した。

3.2. 調査授業の分析と考察

3.2.1. 調査授業第 1 時

「三角形の内角の和は 180° であることは、どのように確かめられるか」という学習課題が提示された。基本的な事項を基に命題「三角形の内角の和は 180° である」が真であることを示すという学習である。全体で共有された追究の見通しは、次の 4 つである。

- ① 三角形を作図し、分度器で三つの内角を測り、たすことで確かめる方法
- ② 様々な三角形を作図し、分度器でその内角を測り、たすことで確かめる方法
- ③ 三角形の三つの角を切り取り、合わせることで確かめる方法（半円になる）
- ④ 三角形の底辺に平行な線を引いて確かめる方法

①, ②は実測により確かめる方法であり、基になる事項は基本的な事項ではなく実測結果である。③は実験により確かめる方法であり、基になる事項は実験結果である。④は平行線と角の性質により確かめる方法であり、基本的な事項が基になる。したがって、命題が真であることを示すことができるのは、④の方法のみである。しかしながら、抽出生徒 chiaki は②, ③の方法で示したにも拘らず、命題が真であるということに納得していた。そこで、chiaki に焦点を当て分析・考察を行う。

(1) 第 1 時の分析

chiaki の②の方法による確かめ方に着目する。次の図は chiaki の作図である。

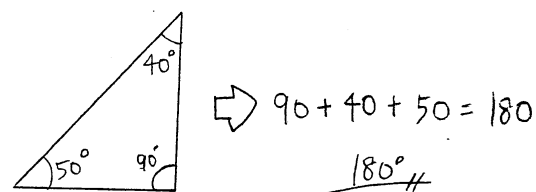


図 2：1 つ目の作図

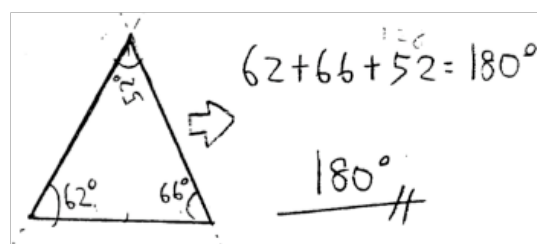


図 3：2 つ目の作図

図 2 の三角形を作図する際には、「 50° にならない」といいながら何度も分度器で角度を測り直し、「あ、なった？」といい 50° と記入した。図 3 の三角形を作図する際にも、「ぴったりにならない」といいながら何度も分度器で測り直し、「 62° でいいや」と正確な値ではないにも拘らず、 62° と記入した。

生徒同士の意見交換の場面であるコミュニケーションタイムにおいて、この結果に関して「62, 66, 52 ってちょういい数字だよ」と話した。chiaki は個人追究の場面において、②の実測により確かめる方法では正確な値が測定できないという経験をしている。しかしながら、コミュニケーションタイムの場面では、その結果をクラスメイトに肯定的に話している。したがって、この方法に対して疑問を抱いていないことが分かる。また、コミュニケーションタイムの場面において、④の方法により確かめた抽出生徒 nagata の記録にふれ、自身の実測による方法と nagata の平行線と角の性質による方法との差異を感じながらも、実測による方法について疑問を抱くことはなかった。その要因として、chiaki の記録を目にした者がこの②の方法により確かめ、そ

の結果を肯定的に捉えていたため、否定されなかったことが考えられる。それゆえ chiaki はコミュニケーションタイムの場面においてクラスメイトとの根拠に対する考えのズレが生じず、②の方法を否定的に捉えることができなかったのだと考える。

以上のように、chiaki は個人追究やコミュニケーションタイムにおいては②の方法による確かめ方を否定的に捉えることができなかった。しかし、全体追究の場面におけるクラスメイトの「手作業なので、切ってる作業の中とか、描く作業の中でやっぱり誤差が出てきてしまうと思う」、「直線になるときもあるかもしれないけど、ならないときもあると思うので、あまりよくないと思う」、「 180° に)必ずなるとは限らない」という発言から、クラス全体において①、②、③の方法が否定され、chiaki 自身の中で根拠と結論に対する考えのズレが生じ、②、③の方法を否定的に捉えることができた。ここで生じた根拠から結論を結ぶ考えに対する考えのズレは、コミュニケーションタイムの場面においてふれた④の方法を nagata が説明することにより解消された。nagata (N) の説明のプロトコルは次の通りである。T は教師、S は生徒を示す（以下同様）。また、図 4 は nagata が説明中に行った板書である。

N: えっと、まず私は。三角形を、描いて。

三角形 ABC を、描きました。で、この。BC。線分 BC を延長させて。

T: ちょっと待って。それさっき S(⑤)を発表した生徒)が言ったこれ(延長線)か。

N: そうです。

T: はい、はいはいはい。延長させてってやつだねえ。

N: で、させたこのここを E として。この辺 AB に平行な直線を点 C から。

T: 平行記号付けといて。

N: で、えっと私は、平行線の性質を使って、やりました。えっと、AB に平行な直線が。えっとここを D として、CD なので。平行線の性質を使うと、 $AB \parallel DC$ 。で、錯角は。ああ。錯角は等しいので、この角 ($\angle BAC$) が、ここ ($\angle ACD$) で。ここで、今度は $AB \parallel DC$ なので、えーっと。ここ、この角 ($\angle ABC$) とこの角 ($\angle DCE$) はこの辺で同位角になるから、ここ ($\angle ABC$) とこの角 ($\angle DCE$) は等しいってことが分かります。で、角 C はここなので、角 C 足す、角 ACD 足す、角 DCE は、直線、直線 180° なので、全部の角の和は 180° になります。

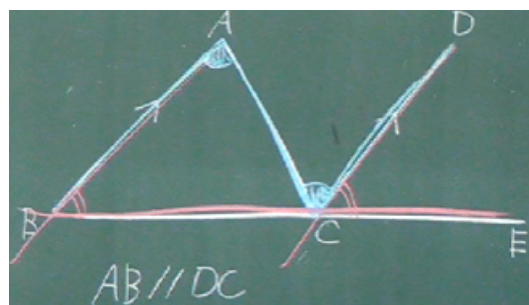


図 4 : nagata の説明

②により確かめる方法を否定したクラスメイトの発言と nagata の④の方法に関する説明を受け、chiaki は授業の感想として、「私は、始め“分度器”を使って計る…ということしか考えてませんでした。でも、nagata の考えを聞いて、すごい納得しました。平行線の性質を使っているの、疑いようのないものです」と記述した。この記述から、chiaki は nagata が根拠としていた平行線のような疑いようのないものを根拠にすることで、納得することができると考えていることがわかる。

(2) 第 1 時の考察

第 1 時の授業では、4 つの追究の見通しをもとに個人追究が行われ、個人追究での

考えをもとにコミュニケーションタイムや全体追究が行われ、平行線と角の性質という疑いのないものを根拠として説明することで、「三角形の内角の和は 180° である」という命題が真であることを示すことができると結論づけられた。個人追究の場面においては、命題が真であることを示すことを考えるため、“demonstration”の機能が活かされているといえる。この場面で個々人の考えを振り返り、その考えの妥当性を判断することができる場面が、コミュニケーションタイムや全体追究の場面であるといえる。コミュニケーションタイムの場面においては、クラスメイトに自分の考えを正確に伝えたり、クラスメイトから質問を受け、回答することによって自分の考えを客観的に捉えることができたり、矛盾や誤りを発見することができる。全体追究の場面においては、コミュニケーションタイムにおいて発見した矛盾や誤りから生じた根拠のズレをクラス全体における共通の認識へと変えることができる。そのため、コミュニケーションタイムの場面や全体追究の場面は“proof”の機能が活かされているといえる。第1時の授業においては、与えられた命題を分析することにより、新たな命題を作るという学習は為されなかったため、“discovery”の機能を活かされることはなかった。しかしながら、コミュニケーションタイムの場面において意見交換を行う際には、ワークシートを媒体として系列化された根拠を概観し、各々の記述を理解しようとする活動は行われていたため、“systematization”の機能は活かされていた。

また、抽出生徒 chiaki は実測による方法で内角の和が 180° であることを示したにも拘らず、コミュニケーションタイムの場面においてクラスメイトと根拠に対する考えのズレは生じていなかった。つまり、実

測や実験の方法において説明を行ったとしても、他者も同様に納得し、説得することができたならば、他者との間に根拠に対する考えのズレは生じないといえる。しかしながら、全体追究の場面においては、互いの根拠に対する考えのズレを解消し、互いの考えを共有することができ、自分の考えの矛盾や誤りに気付くことができた。したがって、小集団によって行われるコミュニケーションタイムの場面において根拠に対する考え方や捉え方にズレが生じなくとも、全体追究の場面において教師が生徒の考えを引き出すことによってズレを生じさせることができる。このズレを解消するために全体追究の場面において、命題が真であることを示した記録を振り返ることで皆が記録を体系的に分析することができ、矛盾や誤りを発見することができる可能性が得る。つまり、活動としてのコミュニケーションの中で機能が活かされることにより、“demonstration”の機能から“proof”の機能を繋ぐことができ、数学的知識の質を高めることができた。

第1時においては、生徒から命題が真であることを正確に示すことができる説明が為されたため、根拠に対する考えのズレを解消し、共通の認識を得た上で再度命題が真であることを示す活動（学習）はなかった。そのため、“proof”の機能による活動（学習）を行った後に、“demonstration”の機能による活動（学習）を行うことはなかった。証明の機能としてのコミュニケーション（communication）の機能により、“demonstration”の機能から“proof”の機能を繋ぐことはできたが、“proof”の機能から“demonstration”の機能を繋ぐことはできなかったといえる。

3.2.2. 調査授業第2時

「右の三角形と合同な三角形を描きたい。

では、どのような情報がわかっていれば合同な三角形を作図できるか」という学習問題のもとに授業が進められた。したがって、第2時も主に“demonstration”の機能を活かした授業であるといえる。全体で共有された追究の見通しは、以下の6つである。

- ① 3つの辺の長さ
- ② 2つの辺の長さ
- ③ 1つの辺の長さ
- ④ 3つの角の大きさ
- ⑤ 3つの辺の長さ
- ⑥ 底辺の長さ

①、⑥は作図することはできるものの、必要以上の情報が含まれているため、要素を限定する必要がある。②、③は情報として与えられた要素間の位置関係が示されていないため、作図できる場合とできない場合がある。④は相似な三角形を作図するための情報である。に気付くことが必要である。⑤は三角形の合同条件であり、作図することができる。したがって、合同な三角形を作図することができるのは、②の情報中の1つの角が2つの辺の間の角の場合、③の情報中の2つの角が1つの辺の両端の角の場合、⑤の情報である。②、③には反例があることや位置関係を示すことが必要であることに気づき、その位置関係を示すことができること、④は一辺でも長さが定まっていなければ、合同な三角形を作図することができないことに気付くことが必要となる。抽出生徒 chiaki は③の情報では合同な三角形を作図することはできないと結論づけ、抽出生徒 nagata は③の情報は合同な三角形を作図することはできるが、1辺の両端の角でなければならないと結論づけた。二人はコミュニケーションタイムにより意見を交わし、根拠と結論のズレを解消

し、共通の認識を生成した。そこで、chiaki と nagata に焦点を当て、③の情報に関して分析・考察を行う。

(1) 第2時の分析

chiaki の③の情報に関する記録は次の図の通りである。

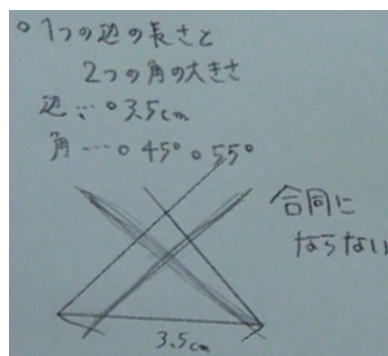


図5：③に対する chiaki の作図

chiaki は辺の長さと角の大きさを自身でランダムに選択し、その要素を基に1つ辺の長さとその両端の角として作図を行っていることがわかる。その結果、作図しようと試みた三角形と合同な三角形を作図することができなかったため、合同にならないと結論づけた。

一方、nagata の③の情報に関する記録は下図の通りである。

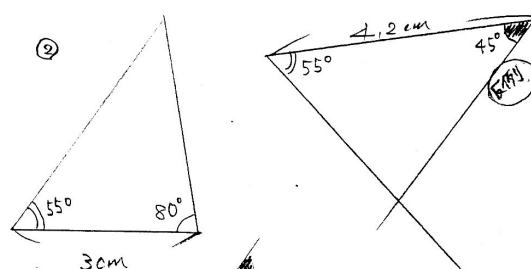


図6：③に対する nagata の作図

nagata は1つの辺の長さとその両端の角を用いて作図していることがわかる。その結果、合同な三角形が作図でき、「② (③) の場合、1つの辺の長さと1辺の端にある2つの角の大きさがわかっていれば合同な三

角形を描くことができる」と結論づけた。その後、教師の「合同な図形が描けない場合があったら、この情報っていうのは、正しいの？正しいくないの？」という問いかけにより、「逆に1辺の端にない2つの角の場合にはできない」と追記した。この記述から、nagataは③の情報を限定しなければ、合同な三角形を作図することができないことを理解していることがわかる。

以上のように、個人追究の場面において個々人で③の情報について検証し、その妥当性を判断した。この検証の過程と結果を基に、コミュニケーションタイムにおいて意見交換を行う。chiaki (C) はnagata (N) に次のように自分の考えを伝えた。

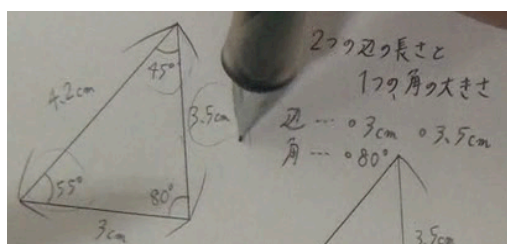
C: 2つの角が分かればいいから、どこの角でもいいわけじゃん、分かれば。

N: うん。

C: 例えば適当に55と45選ぶじゃん。

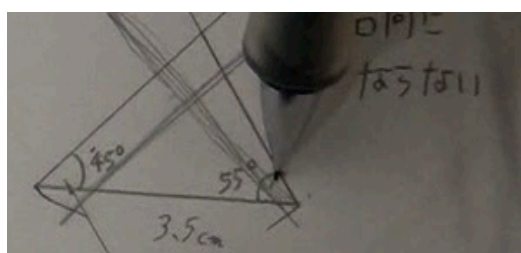
N: だから、全部の場合ね。うん。で、一辺の長さは？

C: それで3.5を選んだんだよ。3.5しましたじゃん。



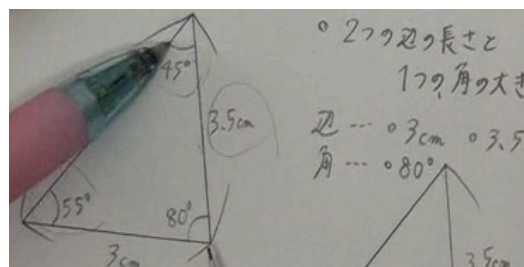
N: 3.5にしましたじゃん。

C: で、45°と55°が分かっているから、ここにしたわけさ。



N: でもさ、今これ3.5基点でしょ？

N: 3.5のところが45なの。ここ(3.5cmの辺と4.2cmの辺の間の角)が45なんだよ？



N: で、ここ(3.5cmの辺と3cmの辺の間の角)は80だけど…

N: ここ(80°)が分かってないんだよ？

C: だからだからだから…

N: で、こっち(55°)の…

C: え、だから…

N: chiakiがやってるのは、ただ分かっている情報をここにさ…

C: そうだよ。

N: 両端にやってるだけでしょ。

chiakiは2つの角にはどの角でなければならないという指定がないため、2つの角は適当に選ばれること、三角形を作図するために1つの辺の両端の角として2つの角を位置づけることを主張している。一方、nagataは角の位置は定まっており、その情報を基に作図を行わなければならないことを主張している。つまり、二人には③の「1つの辺の長さ」と2つの角の大きさ」に位置関係が含まれているか否かという根拠についての捉え方についてズレが生じている。しかしながら、他のクラスメイトとも意見交換することにより、nagataはchiakiの考えを理解し、根拠に対する捉え方のズレが解消され、共通の認識(結論)を生成していく。次がその場面のプロトコルである。

S1: 底辺を基準にして、その両端の角の長

さがわかつ、間違えた。長さじゃない。
角度が分かるとするじゃん。

N: でもさ、この場合さ。二つの角の大き
さって言うてるからさ。

S1: でしょ？だからここの両端の角の大き
さが分かるとして。

S2: でもさ、これさ、3.5 を底辺にして 80
と 45 じゃないといけないのに、なんで
か知らないけど 55 が出てきてるじゃ
ん。

N: うん。

S2: それがおかしい。

C: だってさあ。80° は分かってないんだ
もん。

N: え、でもそういう場合もやんなくちゃ
いけないんですよ。そういう場合も…

C: これは反例ってやつじゃないの？

N: だから、そう。できるかどうか、確か
めてって、できないってことでしょ。

nagata は③の情報における 2 つの角の大
きさには、1 つの辺の両端の角という位置
指定がないことに気づき、chiaki が示した
場合も検証しなければならないと考えてい
ることがわかる。そして、chiaki が「反例」
という言葉を用いたことにより、nagata も
chiaki の示した記録は反例であり、それぞ
れの情報において反例があるかについて検
証する必要があることを理解し、chiaki と
nagata は③の情報には「反例がある」とい
う共通の認識を生成することができたとい
える。

(2) 第 2 時の考察

第 2 時の授業では、6 つの追究の見通し
をもとに個人追究が行われ、個人追究での
考えをもとにコミュニケーションタイムが
行われた。コミュニケーションタイムの場
面においては、③の情報に対する chiaki
と nagata の根拠に対する考え方のズレを

他のクラスメイトと共にワークシートを媒
体として意見交換することにより解消し、
「③の情報で作図した場合、反例がある」
という共通の認識を得た。第 1 時と同様に、
個人追究の場面においては、命題が真であ
ることを示すことを考える活動（学習）で
あるため、“demonstration” の機能が活か
されているといえ、この場面において記録
された個々人の考えを振り返り、その記録
（考え）の妥当性を判断することができる
のが、コミュニケーションタイムであり、
“proof” の機能が活かされているといえ
る。第 2 時においては全体追究が行われる
ことなく授業は終了した。そのため、クラ
ス全体で自分の捉え方を伝え合い、根拠と
している事柄を分析することで、根拠と結
論に対する考えのズレが生じることや共通
の認識（結論や知識）を生成するという
“systematization” の機能を活かした活
動（学習）は行われなかった。しかしなが
ら、コミュニケーションタイムの場面にお
いてワークシートを媒体として自分の記録
を伝え合うことによって、chiaki と nagata
の間には根拠と結論に対する捉え方のズレ
が生じ、共通の認識を得ることができた。
したがって、第 2 時においても第 1 時同様、
証明の機能としてのコミュニケーション
（communication）により、“demonstration”
の機能から “proof” の機能を繋ぐことが
できた。また、“proof” の機能から
“demonstration” の機能を繋ぐことも同
様にできなかった。

3.3. 調査授業の総括的な考察

2 回の調査授業から、証明の機能として
のコミュニケーション（communication）
により “demonstration” の機能から
“proof” の機能を繋ぐことは可能である
と考える。自分の考えを基に命題が真であ
ることを記録し、その記録を自分自身で振

り返りながら吟味することができ、反例や誤りを発見することが可能である。しかしながら、第1時における chiaki のように、自分の考えに対して強い確信があれば、反例や誤りを発見することは困難である。つまり、誤った考えをしているにも拘らず、強い確信により自分の考えを体系的にみることができず、分析しようとする意識が芽生えないため、矛盾や反例を発見することができないことがある。それゆえ、“communication”の機能により命題が真であることを記録するという活動（学習）ができて、“demonstration”の機能による活動に留まってしまう。証明（Proof）の意味を広げ深めるためには、やはり“proof”の機能を活かした活動（学習）を行う必要がある。したがって、“communication”の機能をさらに活かし、“demonstration”の機能と“proof”の機能を繋げ、証明学習の質を高めることが重要である。数学的知識を数学的表現で示したワークシートを媒体として他者とコミュニケーションすることによって、自分の考えを体系的にみることができ、矛盾や誤りを発見することができる。また、他者との間に根拠や結論、それらを結ぶ考えに対する捉え方や考え方のズレが生じ、互いに互いの考えを理解し合いながらそれらのズレを解消し、共通の認識を生成することができる。このような過程を経ることにより、数学的知識および記録を質的に高めることができる。他者とコミュニケーションすることによって根拠や結論、それらを結ぶ考えに対する捉え方や考え方のズレが生じる状況が起こり得るため、証明学習の質を高めていくためには他者と互いに互いの考えを伝え合うことが大変重要となる。つまり、“communication”の機能を活かしながら活動（学習）を行うことが何より大切である。

他者との間に生じたズレを解消していく

ために、互いに互いの考えを体系的にみながら構成要素を分析する活動（学習）は、“systematization”の機能による活動（学習）であるといえ、“proof”の機能による活動（学習）である。それゆえ、“communication”の機能により“demonstration”の機能と“proof”の機能が繋がれ、数学的知識の質が高めることができる証明学習を行うことができるからである。

さらに、“discovery”の機能による活動（学習）を行うことにより、質の高い証明学習を展開することができる。なぜなら、“discovery”の機能は「新たな命題を発見することができる」という機能だからである。2回の調査授業においては、命題の真偽を示すことが学習課題であり、命題自体も発展性や一般化できるものではなかった。しかしながら、真偽を示すべき命題が広い領域に関していえることならば、その命題から新たな命題を発見することができる。このような命題を扱うことによって、証明（Proof）の機能全てを網羅することができ、より質の高い証明学習を行うことができる。その上、“discovery”の機能による活動（学習）を行うことにより、発見した新たな命題が真であることを示すという活動（学習）を行うこともでき、“proof”の機能から“demonstration”の機能を繋ぐこともできる。この活動により新たに生成された記録の妥当性を判断するためには、構成要素を分析する必要がある、記録を体系的にみることが必要になる。したがって、“demonstration”の機能による活動（学習）から“proof”の機能へと繋ぐことができ、“communication”の機能により活動（学習）がスパイラルに続くといえる。それゆえ、証明の全ての機能を授業の中に取り込む、活かしながら展開していくことが重要である。

4. まとめ

本稿の目的は松井（2012）において行った調査授業の記録を“communication”の機能の視点から再度分析・考察し、証明学習において証明の機能がどのように活かされているのかを明らかにすることであった。研究成果は以下の4点にまとめることができる。

- “communication”の機能により命題が真と考えるところを記録するという活動（学習）ができて、個々人で考える場合には確信の度合により“demonstration”の機能による活動に留まる可能性がある。
- 他者とコミュニケーションすることにより、捉え方や考え方にズレが生じ、共通の認識を生成しようとする動きが生まれ、“demonstration”の機能と“proof”の機能を繋ぐことができる。
- 広い領域を包括する命題を与えることによって、新たな命題を発見することができる“discovery”の機能による活動（学習）を起こすことができ、“proof”の機能と“demonstration”の機能を繋ぐことができる。
- “communication”の機能を活かしたり、与える命題を工夫したりすることによって、証明の機能がスパイラルに活かされ、証明学習の質が高められる。

調査授業の中に現れた「ズレ」には、根拠に対する考えのズレ、結論に対する考えのズレ、それらを結ぶ考えに対する捉え方や考え方のズレがあった。さらに chiaki と nagata の記録にみられるように、表現のズレも存在する。考えを表現する方法には、言葉のみによるもの、図や記号のみによるもの、両者によるものがあると考えられる。このようなズレのある互いの表現を用いながら、自分の考えと他者の考えをコミュニケ

ートすることで、根拠や結論、それらを結ぶ考えに対する捉え方や考え方のズレを明確にしていき、それらのズレを解消し、共通の認識に至ろうと活動していく。このように、表現のズレが他のズレを解消する推進力になる。このような活動が証明の機能を活かす活動のスパイラルにのることを可能にするのではないかと考える。

5. 今後の課題

これまで述べてきたように、「証明」の理解を深めるためには、“demonstration”の機能と“proof”の機能の両者を活かしながら授業を展開していくことが重要である。学習段階によって証明の機能の活かし方は異なることが考えられる。どのような場面では主に“demonstration”の機能、主に“proof”の機能を活かすことが有効であるかを分析・考察し、証明学習の更なる発展を目指したい。

また、先にも述べたように、表現のズレは証明の機能を活かす活動のスパイラルにのる推進力となると考えている。これから表現のズレに焦点を当て、証明学習を分析・考察することで、証明の機能を活かす活動のスパイラルにのせる推進力を明らかにしていきたい。

今後の課題は、本稿で得られた知見を基に、理解段階に合わせた証明の機能を活かした授業案を作成し、実践することである。

〔引用・参考文献〕

- Michel de Villiers, (1990), *The role and function of proof in mathematics, Pythagoras*, 17-24.
- Freudenthal, H. (Ed), (1958), *Report on Methods of Initiation into Geometry*. Groningen: Wolters.
- 杉山吉茂, (1975), 証明の意味—demonstration と proof—, 日本数学教育

- 学会誌, 第 57 巻第 5 号, pp. 23-27.
- 茅野公穂, (2002), 学校数学における証明の機能としての「発見」—証明とその適用範囲との関係についての 4 つの状態—, 数学教育論文発表会論文集 35, pp. 439-444.
- 松井悠香, (2011a), 証明学習におけるコミュニケーションの役割, 上越数学教育研究, 第 26 号, pp. 133
- 松井悠香, (2011b), 証明の機能としてのコミュニケーションに関する考察, 第 44 回数学教育論文発表会論文集, 日本数学教育学会, pp. 795-800.
- 松井悠香, (2012), 中学校証明学習における証明の機能を活かした授業に関する研究 — 証明の機能としてのコミュニケーションに焦点を当てて —, 上越教育大学大学院修士論文.
- 文部科学省, (2008), 中学校学習指導要領解説数学編, 教育出版.
- 《平成 17 年検定済教科書》
- 岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武ら, (2005), 楽しさひろがる 数学 2, 啓林館.
- 岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武ら, (2005), 未来へひろがる 数学 2, 啓林館.
- 澤田利夫・坂井裕ら, (2005), 中学数学 2, 教育出版.
- 重松敬一ら, (2005), 中学数学 2, 大阪書籍.
- 杉山吉茂・俣野博ら, (2005), 新編新しい数学 2, 東京書籍.
- 吉田稔ら, (2005), 新版 中学校数学 2, 大日本図書.