

# 算数・数学教育における「量と測定」領域の 指導改善に関する考察

一面積・体積を求める方法に焦点をあてて -

高橋 敦

上越教育大学大学院修士課程1年

## 1. 研究の目的と方法

現在の算数・数学教育において、面積、体積を求める学習として長方形、三角形などから始まり、円や錐体、球などの曲線図形や立体図形の求積を学んでいくものである。それらを歴史的には、一連の大きな流れの中で研究されてきたことに照らし合わせてみると、各々の学習は、学校数学において断片的になぜそのように求積できるのかという理由の理解までには至っていないようである。例えば、小学校第5学年で直径に対する円周の比として円周率を学習し、円の面積については小学校第6学年で学習するが、円周 $l = 2\pi r$ と円の面積 $S = \pi r^2$ の2式の比例定数はなぜ等しいのか、なぜ $\pi$ が用いられるのか、そのつながりについてはその後の数学教育では扱われることはないようである。この円周と円の面積の公式には一つ一つに意味があり、それぞれの意味を結ぶ数学的な関係性がある。それらを単独のものとしてだけ扱う場合、公式を暗記するという学習に終わりがちである。数学的なつながりを意識し、図形の面積や体積、その意味や関係性を考えることで、子どもたちの図形の性質や求積の意味における数学的な知識や理解を深めることができるのではないかと考えられる。

本稿ではまず、算数・数学教育における

求積の学習がどのように進められているか把握することから始める。そして、その学習の過程での問題点を明らかにしていく。特に、中学校第1学年で学習する「空間図形・基本的な図形の計量」で扱われる錐体の体積について着目していきたい。次に、図形の面積・体積を求める学習の指導の改善の方法を考えていく。過去の数学者がどのように図形の面積・体積を求めてきたかに学んでいきたい。求積の困難を克服する過程に現れたその素朴な考えは、図形の面積・体積を求める学習をする子どもたちにも受け入れやすいものと考えられるからである。本稿では、カバリエリの「カバリエリの原理」とその考えの基となっている「不可分量」という考えを取り上げ、中学校第1学年で学習する柱体と錐体の体積に焦点をあて、その指導改善について考えていきたい。

## 2. 教育過程における面積・体積を求める学習の扱いについて

この章では、小学校、中学校、高等学校それぞれの求積の扱いについて述べ、問題点と課題を明らかにする。

### 2.1 小学校学習指導要領での求積の扱い

次の図1は、小学校学習指導要領・算数編(2008)において、面積・体積を求める学習

の単元を示したものである。

第4学年

「量と測定」・正方形と長方形の面積の求め方

「算数的活動」・面積の求め方を考え説明する活動

第5学年

「量と測定」・三角形，平行四辺形の面積の求め方

・ひし形，台形の面積の求め方

「図形」・円周率

「算数的活動」・面積の求め方を考え説明する活動

第6学年

「量と測定」・およその面積

・円の面積の求め方

・角柱，円柱の体積の求め方

(図1)

ここで注目したいのは，第5学年で学ぶ，「円周率」と第6学年で学ぶ「円の面積の求め方」の数学的な繋がりについてである。

アルキメデスの「MEASUREMENT OF A CIRCLE」の命題1には，「円の面積は底辺を円周，高さを半径とする直角三角形の面積と等しい」とある。このことから，円周と円の面積には，等しい比例定数が用いられることを導き出し，命題3でこの比例定数を「 $3\frac{10}{71}$ より大きく， $3\frac{1}{7}$ より小さい」と評価した。これを現代の表記に直すと，面積をS，円周をl，半径をrとすると， $S = \frac{1}{2}lr$ が成り立つことを示している。これが，円周と円の面積に等しい比例定数が表れることを導くものである。この比例定数がπであり，小学校第5学年で学ぶ円周率である。

小学校学習指導要領や教科書とアルキメデスの方法を照らし合わせながら考えていく。まず，円周率を第5学年，円の面積の求め方を第6学年というふうに学年をまた

いで学習することは，子どもたちが円周と円の面積のつながりを意識して学習しにくい状況と考えられる。また学校図書(2010)では，円の面積を求める考えで，円を扇形に切り取り，それを並べ替えることで平行四辺形が作れるという方法を示している。そして，「(円の面積)=(半径)×(円周)÷2=(半径)×(直径)×3.14÷2=(半径)×(直径)÷2×3.14=(半径)×(半径)×3.14」と，円の面積を導き出している。子どもたちにとって，円という曲線図形を並べ替えて既習の直線図形にできるということは理解しにくいものであると考えられる。また，円の面積の公式を提示した後は，その公式を使う計算練習をしていくことに終わっている。これでは，円の周長と円の面積の関係性を子どもたちが理解することができているとは言えないと考える。

## 2.2 中学校額指導要領での求積の扱い

次の図2は中学校学習指導要領(2008)の「図形」領域における，面積と体積を求め

第1学年

「図形」・基本的な図形の計量

→柱体や錐体の体積，表面積の求め方

(球の体積，表面積の求め方)

第3学年

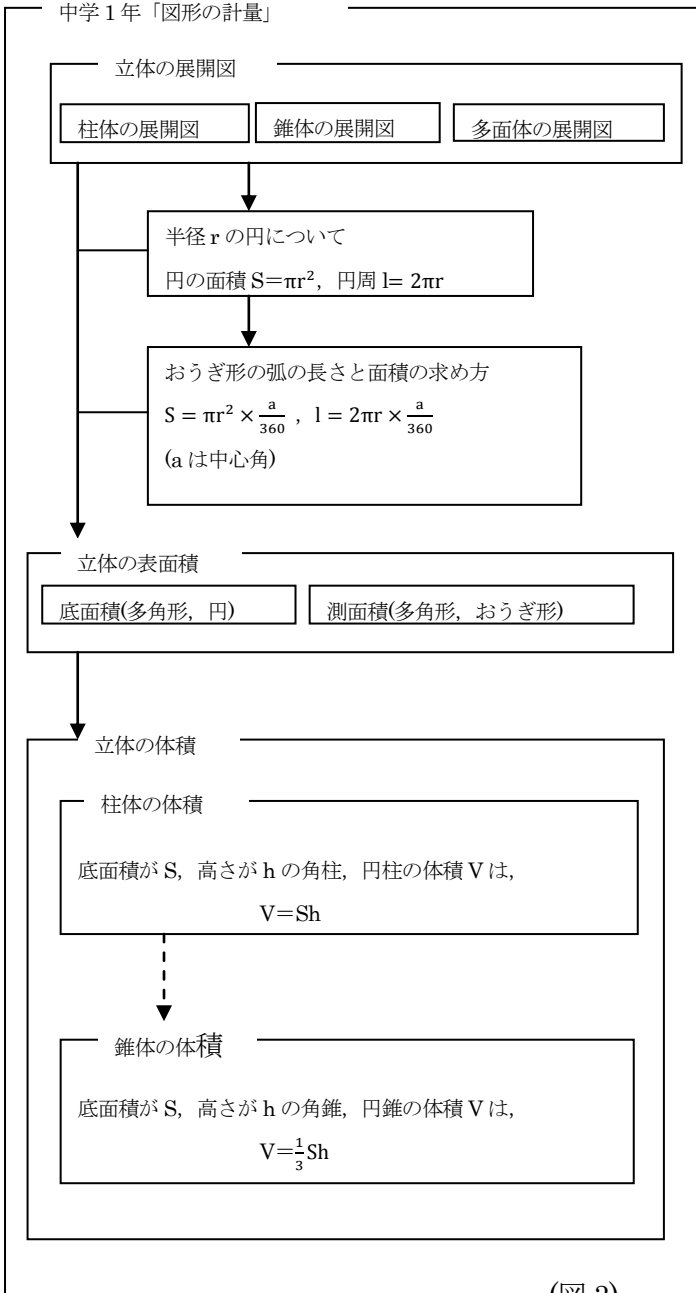
「図形」 相似な図形の相似比と面積比及び体積比の関係

(図2)

る学習に関わる単元を示したものである。

事項の図3は，学校図書(2010)で，中学1年「図形の計量」の単元における立体の展開図から立体の体積の学習の流れとそれらの結びつきを矢印で示したものである。

まず，図3における「図形の計量」の単元の前半部分の立体の表面積を求める学習までの流れを確認していく。柱体や多面体，錐体の図を描くことや実際の立体を用いて



(図 3)

展開図がどのようになるか確認する。そして、円とおうぎ形の面積の求め方を一般化する。そうすることで、円柱や円錐の展開図に表れる底面積と測面積の面積を求めることができる。ここまでの、中学校学習指導要領(2008)による「基本的な図形」の表面積を求めるまでの学習の流れである。展開図、円、おうぎ形、立体の表面積にそれぞれ具体的な図や物を例に挙げ、それらが成り立つことを中学生が理解できる範囲の

中で演繹的に証明が与えられている。また、段階を踏んで学習が進められるように配慮されているため、子どもたちにも理解しやすい内容となっていると考えられる。

次に、立体の体積の学習の流れを確認する。角柱の体積の学習では、小学校で学んだ直方体の体積の求め方、(直方体の体積)=(縦)×(横)×(高さ)の考え方を活かし、(四角柱の体積)=(底面積)×(高さ)と定義している。その上で、三角柱の体積は、四角柱の体積の半分という考えと、(底面積)×(高さ)と考えの結果が等しいことから、柱体の体積を(底面積)×(高さ)と帰納的に求め、「底面積が  $S\text{cm}^2$ 、高さが  $h\text{cm}$  の角柱、円柱の体積を  $V\text{cm}^3$  とすると、 $V=Sh$ 」と定めている。錐体の体積は、等しい高さで底面積を持つ円柱形、円錐形の容器を用意し、円錐形の容器いっぱいに入水を入れ、そのかさの円柱形の容器の約  $\frac{1}{3}$  になることから、「底面積が  $S\text{cm}^2$ 、高さが  $h\text{cm}$  の角すい、円すいの体積を  $V\text{cm}^3$  とすると、 $V=\frac{1}{3}Sh$ 」となることを示している。

ここで着目したいのが、錐体の体積を「 $V=\frac{1}{3}Sh$ 」と定める根拠となる部分である。

「図形の計量」の単元のそれまでの学習とは違い、中学生がわかる範囲での演繹的なあるいは帰納的な証明を与えることなく、簡単な実験だけで公式の根拠としている。柱体と錐体の体積は数学的なつながりがある。直前に柱体の体積を学習しているにも関わらず、その数学的なつながりを感じることができない内容となっている。これでは、公式をただ暗記するだけの学習になってしまう。

### 2.3 高等学校学習指導要領での求積の扱い

次の図4は平成20年度版高等学校学習指

導要領・数学編において、面積・体積を求める学習を扱う内容のものを示したものである。

数学Ⅰ

「図形と計量」

- ・図形の計量

数学Ⅱ

「微分・積分の考え」

- ・積分の考え(面積)

数学Ⅲ

「積分法」

- ・積分の応用(面積, 体積, 曲線の長さ)

(図4)

ここでは、中学校で学習する錐体の体積と深く関わりのある回転体の体積を求める「積分の応用」の単元に着目していく。回転体の体積を求める学習をするのは、数学Ⅲの「積分の応用」の単元である。つまり、円錐の体積が等しい底面積と高さを持つ円柱の体積の  $\frac{1}{3}$  となることの厳密な証明に触れることができるのは、数学Ⅲを履修する生徒だけである。

## 2.4 教育過程における面積、体積を求める学習の問題点と課題

ここでは、学習指導要領(2008)と学校図書(2010)から得た教育課程の問題点を明らかにしていく。そして、その問題点から考えられる課題を解決する方法を示す。これまでに特に明らかにした教育課程における問題点を、次に二つ挙げる。

①円周と円の面積を結び付けて学習を行うことができないように、教育課程における「量と測定」領域の指導には、基本的事項間の数学的なつながりや広がりを意識しにくい部分がある。

②錐体の体積が等しい高さで底面積を持つ柱体の体積の  $\frac{1}{3}$  になることの根拠が中学校

数学における学習では、生徒に理解できるものになっていない。

本稿では、特に②の問題について、その指導改善に着目していきたい。2.2 で示した通り、学校図書(2010)では、錐体の体積が柱体の体積の  $\frac{1}{3}$  になることの根拠としているのは、水かさを利用した実験によるもののみである。錐体の体積が等しい高さで底面積を持つ柱体の体積の  $\frac{1}{3}$  になることを積分を用いて数学的に学ぶのは、高校数学で数学Ⅲを履修している生徒たちだけである。中学生にも錐体の体積が柱体の  $\frac{1}{3}$  になることをより明確に捉えられるように、求積の困難を克服する過程に現れた素朴な考えに学びたいと考える。次章では、2.2 と 2.4 で明らかにした教育課程の問題点を踏まえ、錐体の体積をどのように捉えるのか、カバリエリの考えをもとに考えていく。

## 3. 錐体の体積について

### 3.1 カバリエリの原理と不可分量

円錐の体積と柱体の体積の数学的なつながりを考える上で、カバリエリの原理とその原理の考えの根本的な支えとなっている不可分量という考えが非常に重要になってくる。以下に示す内容は、カバリエリの原理(Stryuik,D.J.,1969,P.210)を和訳したものである。

#### 【カバリエリの原理】

ある平行線の中に二つの平面図形があるとき、その平行線の中にその平行線から等距離に引かれたどのような直線においてもその直線の図形に含まれる線分がどのような場合にも等しいならば、その二つの平面図形は等しい。

また、ある平行な面の中に二つの立体図形があるとするとき、その平行な面の中にその平行な面から等距離にあるどのような平行な面においてもその平行な面に含ま

れる面がどのような場合にも等しいならば、その二つの立体図形は等しい。

カバリエリは、平面図形は線分の集まりであり、空間図形は面分の集まりであると考えた。この図形の次元を下げ、それ以上分けることのできない量として捉えたものが不可分量である。カバリエリは、この不可分量という考えを用いて、三角形の面積が四角形の 1/2、錐体の体積が柱体の体積の 1/3 に比例することを次のように説明している。

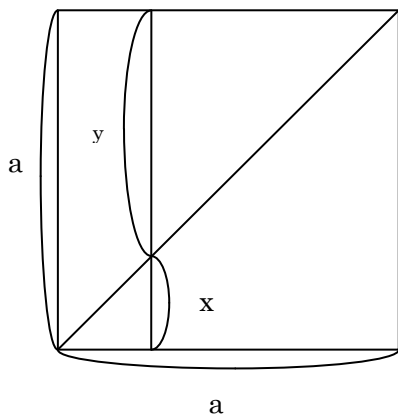
ここで、 $a^2$  は一辺  $a$  の正方形(図 5 より、 $a$  という線素が  $a$  という幅で集まったもの)の面積であり、 $\sum_A^B x$  は、底辺  $a$ 、高さ  $a$  の直角三角形の面積を表す。よって、 $\sum_A^B a = a^2$

図形の対称性から、

$$x+y=a$$

$$\sum_A^B a = \sum_A^B (x+y) = \sum_A^B x + \sum_A^B y = 2 \sum_A^B x$$

$$\therefore \sum_A^B x = \frac{1}{2} \sum_A^B a = \frac{1}{2} a^2$$



(図 5)

これが平面における三角形の面積を不可分量を用いて求める方法である。この考えを 3 次元に用いることで、錐体の体積を求めることができる。

$$\begin{aligned} \sum_A^B a^2 &= \sum_A^B (x+y)^2 \\ &= \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B xy + \sum_A^B y^2 \\ &= 2 \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B xy \end{aligned}$$

図 7 より、 $x = \frac{a}{2} - z$ ,  $y = \frac{a}{2} + z$

$$\sum_A^B a^2 = 2 \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B \left(\frac{a^2}{4} - z^2\right)$$

$$\sum_A^B a^2 = 4 \sum_A^B x^2 - 4 \sum_A^B z^2 \dots (\text{ア})$$

ここで、 $\sum_A^B x^2$  は、底面が一辺  $a$  の正方形で、高さ  $a$  の四角錐の体積を表していると考ええる。

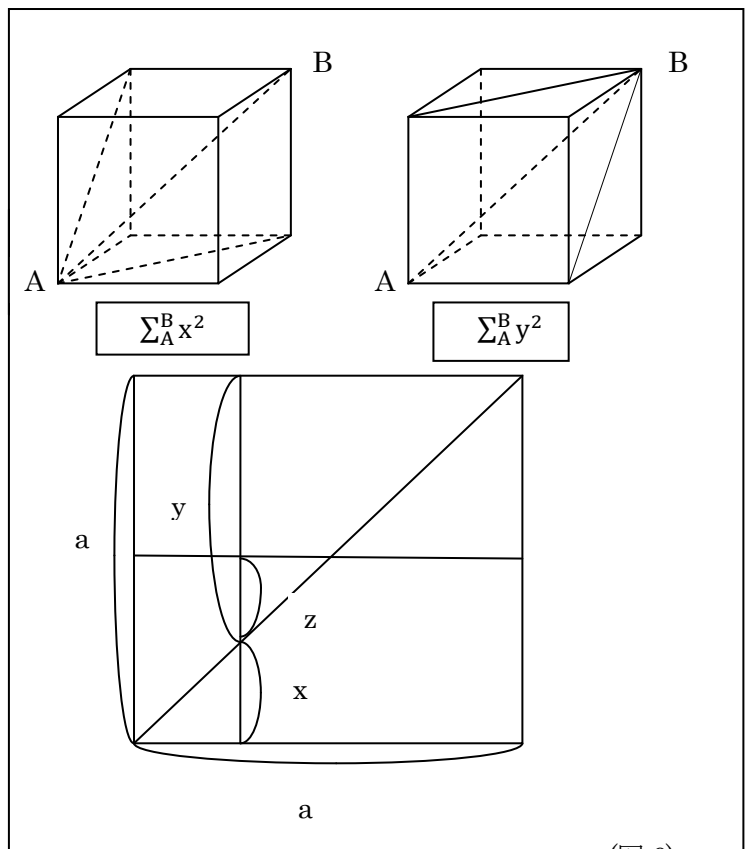
また、 $\sum_A^B z^2$  は、底面が  $\frac{a}{2}$ 、高さが  $\frac{a}{2}$  の四角錐が二つあり、その体積の合計であると考ええる。

$$\sum_A^B z^2 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \sum_A^B x^2 = \frac{1}{4} \sum_A^B x^2 \dots (\text{イ})$$

(イ)を(ア)に代入すると、

$$\sum_A^B a^2 = 4 \sum_A^B x^2 - \sum_A^B x^2$$

$$\sum_A^B x^2 = \frac{1}{3} \sum_A^B a^2 = \frac{a^3}{3}$$

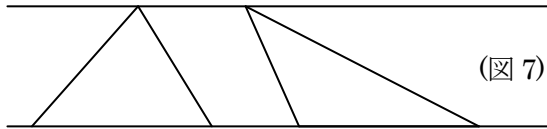


(図 6)

### 3.2 カバリエリの原理とずらし

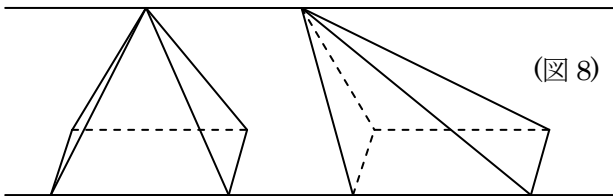
3.1 で示したカバリエリの原理から次のことが言える。

底辺が等しく高さが等しい二つの三角形の面積は等しい。



(図 7)

つまり底辺と高さが決まっていれば、頂点のずらしによって三角形の面積は変わらないということを示している。これは、錐体の体積についても同様のことが言える。



(図 8)

学校図書(2010)では、頂点が常に底面の中心の真上にある錐体を扱っている。カバリエリの原理を用いることで、平行な面で描くことのできる図形ならば、頂点をずらしても立体図形の体積が変わらないことを知ることができる。この原理を知ることにより柔軟に錐体を捉えることができると考える。

### 3.3 既知の図形から未知の図形の面積・体積を求める

安倍(1989)によれば、「カバリエリの考えは、今日でいうところの不可分量という思想を判然と捉えている。面積の要素を線分、体積の要素を面分として捉えている。したがって、異なる平面図形の面積を比較するのに、1対1に対応する線分の長さを考え、既知の図形の面積から未知の図形の面積を求めるという方法をとる。また、二つの立体図形の体積を比較するのに、1対1に対応する面分の面積の比を考え、既知の図形の体積から未知の図形の体積を求めるとい

う方法をとる。これは、次のような形でカバリエリの定理として述べるができる。」(P.53, 54)とある。カバリエリの定理の内容を次に示す。(伊達, 1993, P.134)

#### 【カバリエリの定理】

- ・二つの平面図形が互いに等しい高さを持ち、底辺に平行で、底辺から等しい距離に在る直線がそれぞれの図形から切り取られるときの線分の長さの比が常に一定であるならば、その二つの図形の面積の比も同じである。
- ・二つの立体が互いに等しい高さを持ち、底面に平行で、底面から等しい距離に在る平面による切断面の面積の比が常に一定であるならば、その立体の体積の比も同じである。

この定理について、次の例を示す。

円錐 C, 四角錐 P(図 10)があり、いずれも高さ h とする。C の底面の円の半径は r とし、四角錐の底面は一辺の長さが 1 の正方形であるとする。P の体積 V(P) は  $\frac{1}{3} \times 1^2 \times h = \frac{h}{3}$  で既知であるとする。ここで、円錐の体積 V(C) をカバリエリの定理を用いて求める。

頂点よりの距離が x である水平な平面で円錐及び四角錐を切断し、その断面積をそれぞれ  $S_1(x)$ ,  $S_2(x)$  とするとき、比例を用いれば、次のように求めることができる。

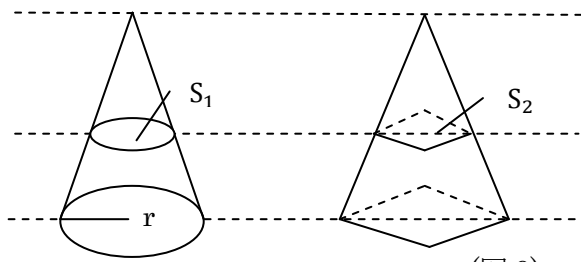
$$S_1(x): \pi r^2 = x^2: h^2 \text{ より, } S_1(x) = \frac{\pi r^2 x^2}{h^2}$$

$$S_2(x): 1 = x^2: h^2 \text{ より, } S_2(x) = \frac{x^2}{h^2}$$

よって、

$$\frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \pi r^2$$

$$V(C) = \pi r^2 V(P) = \pi r^2 \times \frac{h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

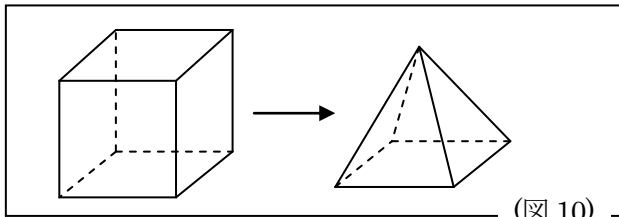


(図 9)

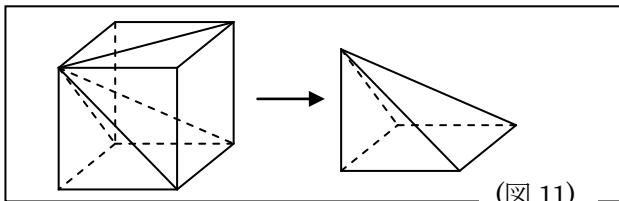
### 3.4 カバリエリの原理から錐体の体積の指導を見直す

2.2 と 2.4 で示した通り、錐体の体積と柱体の体積をつなぐ部分には数学的に曖昧な部分がある。そのつながりの部分に 3.1～3.3 で示したカバリエリの考えを持ち込むことで、その曖昧さをなくし、柱体の体積と錐体の体積を結び付けて理解することができる。以下にその思考の順序を示す。

①一辺の長さが 1 の立方体と等しい高さで底面積を持つ四角錐の体積が  $1/3$  になることを説明する。



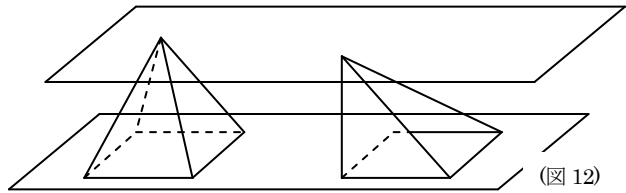
(図 10)



(図 11)

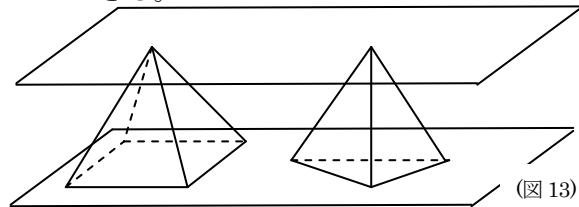
図 10 は一辺の長さが 1 の立方体と、底面積と高さが立方体と等しい四角柱を表したものである。また、図 11 は一辺の長さが 1 の立方体とその立方体を三等分してできる四角柱を表しているものである。図 10 の四角柱の体積がカバリエリの考えのもと、 $1/3$  になることを 3.1 で示したが、それをそのまま中学生に対して説明し、理解させることは困難であると考えられる。ここでは、実際の箱を三等分するなど具体物を扱うことを考える。図 10 と図 11 の四角錐を平行

な二つの面の間に描く。二つの四角錐は底面積と高さが等しい。3.2 で示した通り、カバリエリの原理の考えを用いると、図 10 の四角錐は図 11 の四角錐の頂点を平行にずらしている図形なので、二つの図形の体積は等しい。そのため、図 10 と図 11 の四角錐の体積は等しい。



(図 12)

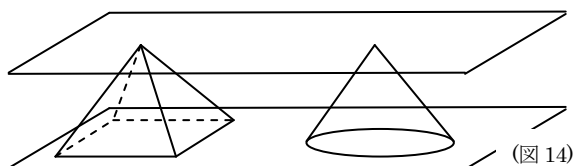
②底面積が  $S$ 、高さが図 10 の四角錐と等しい三角錐の体積を考える。この三角錐と図 8 の四角錐は図 13 に示すように、平行な面の間に描くことができる。3.3 で示したカバリエリの定理より、この二つを平行な面できった切断面の面積の比が常に  $1 : S$  であるため、この二つの体積比も  $1 : S$  である。よって、三角錐の体積を  $\frac{1}{3}S$  と求めることができる。



(図 13)

同様に、どのような角錐であってもその体積は底面積と高さの積の  $1/3$  に比例する。

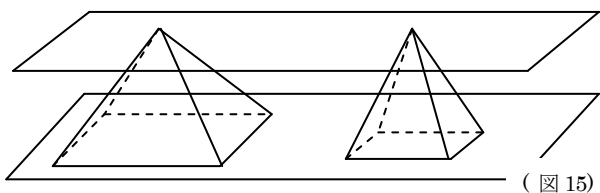
③円錐の体積について考える。底面の半径が  $r$ 、高さが 1 の円錐の体積を考える。この円錐と図 10 の四角錐は次の図 14 のように平行な二つの面の間に描くことができる。この二つの立体図形は、平行な二つの面の間において平行な面から等距離のどのような切断面でもその面積の比は  $1 : \pi r^2$  である。ゆえに、体積比も  $1 : \pi r^2$  である。よって、この円錐の体積は  $\frac{1}{3}\pi r^2$  である。



(図 14)

④高さについても一般性を持たせる必要がある。ここでは、①で用いた立方体の一辺を  $h$  として考える。すると、内部を三等分してできる四角錐の体積は  $\frac{1}{3}h^3$  である。この四角錐と底面が一辺  $1$  の正方形で高さが  $h$  の四角錐の体積を比較する。(図 15)カバリエリの定理より、この二つの図形の体積比は  $h : 1$  である。よって、底面積が  $1$  で高さが  $h$  の四角錐の体積は、 $\frac{1}{3}h$  である。こ

の体積  $\frac{1}{3}h$  の四角錐に関して、②・③の手順を踏めば、学校数学で学ぶ錐体の体積の公式  $\frac{1}{3}Sh$  ( $S$ : 底面積,  $h$ : 高さ) を導き出せる。



## 5.まとめと今後の課題

S. ラング(1987)によれば、「現在、学校で使われている大部分の教科書の内容は、私には首尾一貫していないように思われます。小さい、つまらないことが、脈絡も理由もなく積み重ねられています。」(P.9)とある。これは、現在の「量と測定」領域の指導についても当てはまると考える。本稿では、面積・体積の学習に焦点をあて、その指導に関しての問題を明らかにした。歴史的な数学の発展から考えると、それらの指導の内容には、数学的なつながりや広がりには欠けているものがある。本稿では、中学校第1学年で扱われる錐体の体積について、その教育課程の問題点を具体例として挙げた。子どもたちが数学的なつながりや広がりを意識し、それを理解するには、水かさの実験だけでは不十分であると考えたから

である。その指導を改善するために、カバリエリの考えを用いて柱体の体積と照らし合わせながら、段階的に錐体の体積を捉える指導を提案した。

今後の課題は、小学校「量と測定」領域、中学校「図形」領域において、特に面積・体積を求める学習で、数学的なつながりや広がりを把握し、求積の本質的な理解が得られるような展開を実践していくことである。さらに、「量と測定」領域、「図形」領域の指導改善に関する考察を深めていきたい。

## 【引用・参考文献】

- Archimedes, *Measurement of circle*, [Heath, T.L., (1912); *The Works of Archimedes with A Supplement "The Method of Archimedes"*, Dover Publications, Inc., New York.]
- Kaye Stacy, Jill Vincent, (2009), *Finding the area of a circle*, University of Melbourne.
- Struik, D.J., (1969), *A source book in mathematics, 1200-1800*, Cambridge, Mass, Harvard University Press.
- S. ラング, 松坂和夫/大橋義房訳(1987), 『さあ、数学しよう!』, 岩波書店.
- 安倍斎著(1989), 『微積分の歩んだ道』, 森北出版.
- 竹之内脩・伊藤隆(2007), 『 $\pi - \pi$ の計算 アルキメデスから現代まで一』, 共立出版
- 伊達文治(1993), 『アルキメデスも数学 - 静力学的な考え方による求積法 - 』, 森北出版.
- 文部科学省(2008), 『小学校学習指導要領・算数編』, 東洋館出版.
- 文部科学省(2008), 『中学校学習指導要領・数学編』, 教育出版.
- 文部科学省(2008), 『高等学校学習指導要領・数学編, 理数編』, 実教出版.