

算数・数学教育における「量と測定」, 「図形」領域の 指導系統の改善に関する研究

高橋 敦

上越教育大学大学院修士課程2年

1. 研究の目的と方法

1.1 課題意識

今日の算数・数学教育における「量と測定」, 「図形」領域の一連の学習は, 面積や体積を求める公式を知識として定着させることに対して, 学習の比重が置かれがちである。また, その指導系統には一連の流れのようなものがあるものの, 子どもたちが学習の流れを感じることができるような内容であるとは考えにくい。

学校図書(2011)を例に見てみる。中学校第1学年での錐体の体積を学習する場面では, 錐体の体積が柱体の体積の $1/3$ になる根拠として, 水かさを用いる実験を示している。これは, 公式を直観的・感覚的に捉えるだけで学習が終わってしまう代表的な例と言える。水かさを用いる錐体の体積の学習は, 錐体の体積が柱体の体積の「正確に」, 「ちょうど」 $1/3$ になることを理論的に生徒が捉えているとは考えられない。

確かに, 子どもたちに対して理論的な指導が先行してしまうと, かえって理解が困難になる場合も考えられる。事実, 瀬々(2012)は, 中学生に対して錐体の体積を指導する場面において次のように述べている。

「一度だけコンピューターグラフィックを用いて積分の考えを取り入れ, 立体を細分化することで『 $1/3$ 』になることを

説明したのですが, 生徒は余計に混乱するばかりでした。」

(『数学教育』, 第653号, p.112)

しかし, 直観的・感覚的な指導だけでは, 図形が持つ数学的な面白さや奥深さを感じられずに, 公式の暗記だけで学習が終わってしまいがちである。

このことから, 算数・数学教育における指導系統には, 直観的・感覚的指導と理論的な指導が相補的な位置づけとなるような指導の充実と, それに伴う一貫した学習の流れが必要であると考えられる。

1.2 研究の目的と方法

1.2.1 研究の目的

本研究の目的は, 小学校算数科における「量と測定」領域, 中学校数学科における「図形」領域の学習において, 図形の面積や体積の公式を学習する際の子どもたちの理解の様相を明らかにし, それに伴う指導系統の問題点について考察し, 指導系統の改善方法を示すことである。

1.2.2 研究の方法

本研究の目的を達成するために, 研究課題を以下の3つと定める。

【研究課題1】

算数・数学教育における「量と測定」, 「図形」領域の学習の現状を現行の教科書や学習指導要領を基に把握し, その指導系統の

問題点を明らかにする。

【研究課題 2】

【研究課題 1】で明らかとなった指導系統の問題点について着目し、大学生、院生、中学生に対する調査を行う。その結果から、「量と測定」、「図形」領域の学習に対する理解の様相を明らかにする。

【研究課題 3】

【研究課題 1】、【研究課題 2】で明らかとなった指導系統の問題点とその部分における子どもたちの理解の様相を基に、「量と測定」、「図形」領域の指導系統の改善について考察し、一連の流れを持ち、且つ、直観的な指導と理論的な指導が相補的な位置づけとなるような指導系統を提示する。

以上の研究課題を解決することで、本研究の目的が達成されたとする。

2. 「理解」についての理論枠組み

2.1 スケンプ(1992)の「理解」

指導系統において子どもたちが理解に苦しむ部分を分析に見るためには、子どもたちの理解とはどのようなものなのかを明確にする必要がある。スケンプ(1992)は、理解することを

「何かを理解することは適切なシエマにそれを同化することである。」

(スケンプ,1992,p.51)

としている。このように理解を定義した上で、子どもたちの理解の捉えとして、「道具的理解」と「関係的理解」を挙げている。

「道具的理解」とは、ある規則を身につけ、正しい解答にはたどり着けるが、なぜそのような規則で解答にたどり着けるかを理解していない状態である。「関係的理解」とは、行っていることもその理由もどちらも理解している状態である。「道具的理解」を理解として捉えるならば、「道具的理解」から「関係的理解」へと至るその過程には、理解の段階があると考えられる。このスケンプ(1992)の理解を平行四辺形の学習を例にす

ると、次の図 2.1.1 のように示すことができる。

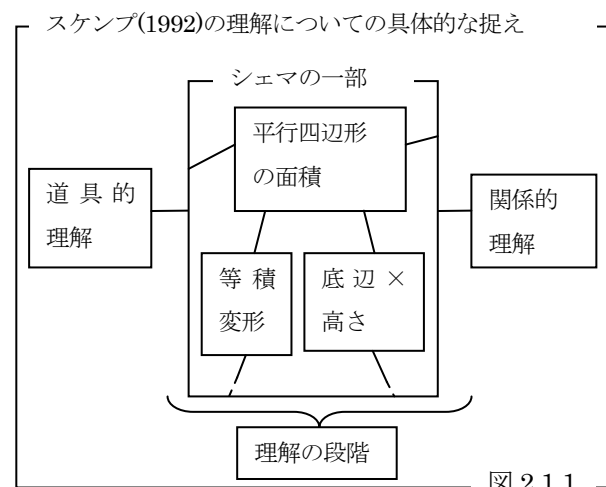


図 2.1.1

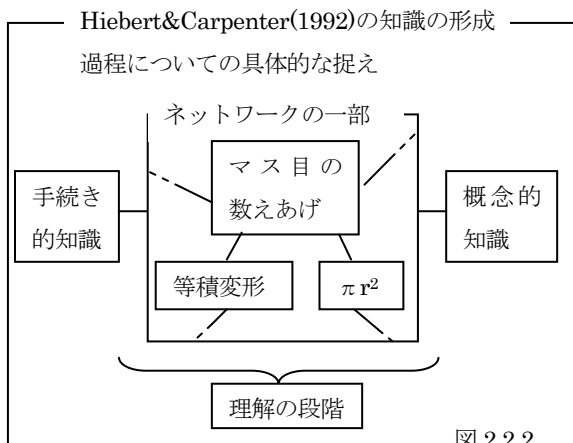
2.2 Hiebert & Carpenter (1992) の「理解」

Hiebert & Carpenter(1992)では、理解することを次のように定義している。

知識情報が内部のネットワークの一部であるならば、数学的な考え、手順または事実は理解される。より詳しく言えば、心的表象が表象のネットワークの一部ならば数学は理解される。それがより強いよりも多数の関連で既存のネットワークに結ばれるならば、数学的な考え、手順または事実は完全に理解される。

Hiebert & Carpenter(1992)が述べているネットワークとは、既習の事象やそれを理解するために必要となる要素が、考えの上で結び付いている状態のことを指していると考えられる。

学校での指導を考えた場合、子どもたちの理解には既存の知識との相互作用を活かして、新たな知識を理解しようとする場面がある。それが、Hiebert&Carpenter(1992)における表象のネットワークの結びつきをより強く、より多くする場面であると考えられることができる。この手続き的知識と概念的知識について円の面積の学習を例として捉えると、次の図 2.2.2 のように示すことができる。



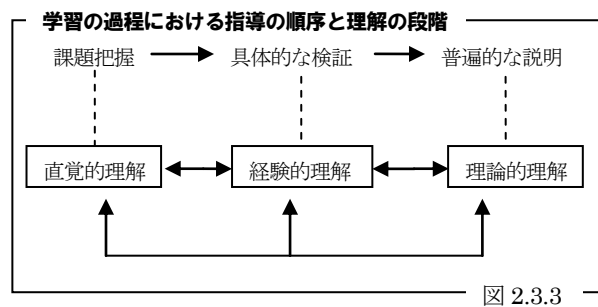
以上のことから、「道具的理解」と「手続き的知識」、「関係的理解」と「概念的知識」は、その理解がより良い方へと至る過程において、理解の段階を見ることにより、対応させて考えることができる。しかし、「理解」と「知識」とでは、その視点が学習の過程か、学習の結果に置かれていることに留意しなければならない。「理解」は過程であり、「知識」は結果に視点を置いていると考える。本論文は、学習の過程に着目するため、「理解」という文言を用いる。

新たな事象を理解する際の、構成要素の結びつきを強く、多くする場面には、順序や段階といったものを考えなければならない。そこで次節では、本論文における指導系統を捉える上での「理解」についての理論の枠組みを述べる。

2.3 指導系統を捉えるための理論枠組み

理解や知識の形成過程を「学習の過程における指導の順序と理解の段階」と定義し、指導の順序を「課題把握」、「具体的な検証」、「普遍的な説明」、それに対応する理解の段階を「直覚的理解」、「経験的理解」、「理論的理解」の3つに定め、指導系統の現状の把握や子どもたちの理解の様相を明らかにするための枠組みとした。

この枠組みを基に、第3章で指導系統の現状を把握し、第4章で調査の結果を分析する。



3. 「量と測定」、「図形」領域の指導系統について

3.1 平成20年度版学習指導要領について

平成20年度版学習指導要領を基に、「量と測定」、「図形」領域の内容と目標を把握した。それらと理論枠組みを照らし合わせて考察することにより、指導系統の問題点を明らかにした。本論文で焦点を当てる問題点は次の2つである。

問題点① 円周率と円の面積を結び付ける指導系統の中で、円周率と他の図形、円の面積を関係づける部分が不足している。
 問題点② 柱体、錐体及び球の体積と表面積についての学習は、直覚的、経験的理解にとどまるものであり、理論的理解にまで至るような指導になっていない。

問題点①について述べる。円周率については、直前に正多角形との関係についての学習が活かされるような指導になっていない。正多角形の周長と最長対角線に一定の比があることが確かめられるなら、その後の円についても同様なことが言えるのではと、既習の事象と結び付けて考えることができる。また、円の面積を学ぶ際にも、正多角形を細かい三角形に切り分けて並び替える学習をしていれば、円の等積変形についての考えも理解が深まると考えることができる。さらに、円を等積変形した後の長方形の縦の長さは半径であり、横の長さは円周の半分である。したがって、(円の面積) = (半径) × (円周) × (1/2) である。これは、(円

周の長さ)＝(直径)×(円周率)と(円の面積)＝(半径)×(半径)×(円周率)を結び付ける重要な式である。

この重要な式を現在の指導系統では、子どもたちに意識させるように教えていない。このことが、指導系統の問題点①「円周率と円の面積を結び付ける指導系統の中で、円周率と他の図形、円の面積を関係づける部分が不足している。」と言える根拠である。

次に、問題点②について述べる。指導系統の流れから、柱体については、「平面図形の運動による空間図形の構成」としてその体積を求めることを関係的に理解することができると考えられる。しかし、錐体や球の体積は単に柱体の体積と比較することだけで学習が終わっている。しかもその比較する方法が具体物を用いる経験的なものしか学習指導要領では言及されていない。具体物を操作することで「公式が成り立ちそうだな」と経験的に理解することも重要だが、これだけでは、中学生が錐体の体積が柱体の体積の「正確に」 $1/3$ になっていることを理解しているとは考えられない。中学生の学習の水準に見合った、理論的理解に至るような指導系統を考える必要がある。

3.2 指導系統における改善点

第1節で明らかにした指導系統の問題点を改善する方法として考えられる指導系統の改善点は次に示す通りである。

改善点①-1 正多角形の周長と最長対角線に一定の比があることに触れ、円周と直径の比である円周率を他の図形と関連させながら学習することが必要である。

改善点①-2 円の面積を等積変形した後の図形において、(円の面積)＝(半径)×(円周)× $(1/2)$ となっていることを学習の中で子どもたちが意識できるような工夫が必要である。

改善点②-1 立体の体積を求める学習において、中学生の学習の水準に見合った

理論的な指導を取り入れる必要がある。

改善点②-2 既習の図形の体積と結びつけて考えることができるような指導系統を工夫する。

4. 調査の概要と分析

4.1 大学生、院生に対する調査に至るまで

「量と測定」、「図形」領域の指導系統改善に関する調査として、大学生、院生に対する調査の視点を述べた。調査の視点は、

① 大学生、院生が「量と測定」、「図形」領域の指導において、どのような指導を受けてきたか。

② これまでに「量と測定」、「図形」領域の指導において理解しにくい部分はあったか。

③ 小学校「量と測定」領域から、中学校「図形」への指導系統は一連の流れに沿うようなものであったか。以上の3点である。

この3つの視点を基に、質問用紙を作成し、調査を実施していった。

4.2 大学生、院生に対する調査の内容

第1節で述べた視点を基に、質問用紙と実施の状況の概要を述べる。

設問は全部で5つある。設問(I)は、所属、学年、高等学校卒業年度、性別、履修科目について問うものである。設問(II)は、平行四辺形・三角形・台形・円の面積、円周率、角柱・円柱・角錐・円錐の体積、三平方の定理の学習について、どのような指導を受けてきたかを選択肢で回答させるものである。選択肢については、1~4まで設け、1.直感的理解、2.経験的理解、3.理論的理解、4.その他となるようにした。設問(III)~(V)は、記述式の設問になっている。それぞれ円の面積、角柱・円柱の体積、角錐・円錐の体積の求め方をどのように小・中学生に教えるかについて問うものである。

4.3 調査の結果と考察

4.3.1 設問(II)の結果について

グラフ 4.3.1 から読み取れる事柄は大きく次の2つである。

まず一つ目は、円周率と円の面積の学習において、経験的・理論的な理解に至るような指導を受けたという選択肢を選ぶ割合が、他の内容の学習に比べて少ないということである。とりわけ、小学校の学習の内容と比較したときに、その差は大きいものとなっている。円の面積の学習については、教科書や指導要領にも等積変形の考え方による学習が明記されているのにも関わらず、調査の結果を見る限りは、公式の計算練習という学習が主なものになっていると考えられる。また、円周率の意味を直感的理解で捉えている割合が多いため、円の面積を長方形に等積変形しても、横の長さである円周の半分、つまり(半径) \times (円周率)を見いだせない場合も考えられる。このことから、円周率と円の面積をつなぎ合わせて考えられるような指導系統が必要であると考えられる。

二つ目に、中学校以降の学習の内容についてである。三平方の定理を除けば、直感的理解と経験的理解に至るような指導を受けたという回答が目立つ。確かに、立体の体積を理論的に求めようとするならば、高等学校で学習する積分の考えが必要となることから、中学生に対しては、直感的、経験的な指導に偏りがちになってしまうだろう。しかし、直感的、経験的な理解で学習が終わってしまうのであれば、子どもたちは、数学的に「正確に」公式が成り立つ理由を知らないままで学習が終わってしまう

ことになる。中学生が既習の知識を活かせるように、立体の体積を求められるような指導系統が求められる。

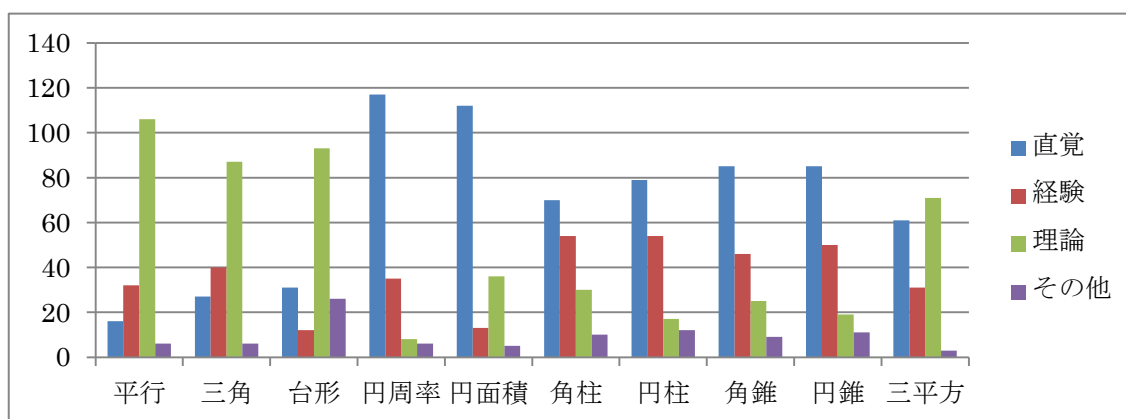
大学生、院生に対する調査の結果を示し、その考察を行った。調査結果を考察することにより、円周率と円の面積、立体の体積の指導系統には、理解の段階が直感的なものに偏っていることが明らかとなった。しかし、大学生、院生に対する調査では、学習してからの時間の経過を考慮すると、子どもたちの理解の様相や指導系統の問題点を正確に捉えているとは考えにくい。

4.4 中学生に対する調査の内容について

前節で述べたように、大学生、院生に対する調査では追究しきれなかった部分を明らかにするために、中学生に対する調査を実施した。中学生に対しては学習の過程における理解の様相を捉えるために、公式をそのまま当てはめるだけでは解くことができない設問を設定した。また、質問用紙では追究しきれなかった部分を明らかにするため、インタビュー調査を行った。次節では、質問用紙と追跡して調査した生徒の回答を分析し、それらから考えられる指導系統の問題点について示す。

4.5 中学生に対する調査の結果と考察

グラフ 4.5.1 は、中学生に対する調査における設問(Ⅱ)の回答をグラフで示したものである。指導要領の分析で明らかとなった問題点①、②については、この解答だけ



グラフ 4.3.1

でその妥当性を判断することはできないが、記述式の設定(Ⅲ)から(Ⅷ)の回答を見る限り、その部分に学習の過程における理解の困難性があると考えられる。

今回、グラフ 4.5.1 で着目したいのは、台形の面積についてどのような指導を受けてきたのかという設問に対する回答の分布である。他の内容の回答を比べてみると、明らかに理論的理解の段階に至るような指導を受けたという回答が多いことが分かる。このようになったのは、調査対象となった中学生が平成 10 年度版学習指導要領において、台形を「特別な形の四角形」として学習し、面積の求め方を公式として指導されていないが、等積変形などの説明が学習の理解として残ったということが考えられる。

また、次に示したのは、インタビュー調査の結果の内容一部である。

T	これをどんどん細かくしていけば、長方形に近づくよね。
A	ああ！
T	じゃあ、この長方形の縦は？
A	半径。
T	横は？
A	円周。
T	ん？惜しい！良く見てみて。ここ(上底)とここ(下底)で円周だよ。だから？
A	円周の半分。ああ、これ学校の授業でやったかもしれないです。
T	やったことある？さっきは公式だけ教

	わかって言ってたけど、どうして忘れちゃったのかな。
A	うーん、公式を教えてもらって、計算練習たくさんして、必死に覚えてたら、いつの間にか忘れちゃった。

この生徒Aの発言と台形の面積の求め方を公式として指導を受けていないことで、理論的理解の段階であるということから考えられる、新たな指導系統の問題点と改善点を次に示す。

問題点③ 公式化することで子どもたちの理解が道具的なものだけに陥っている。

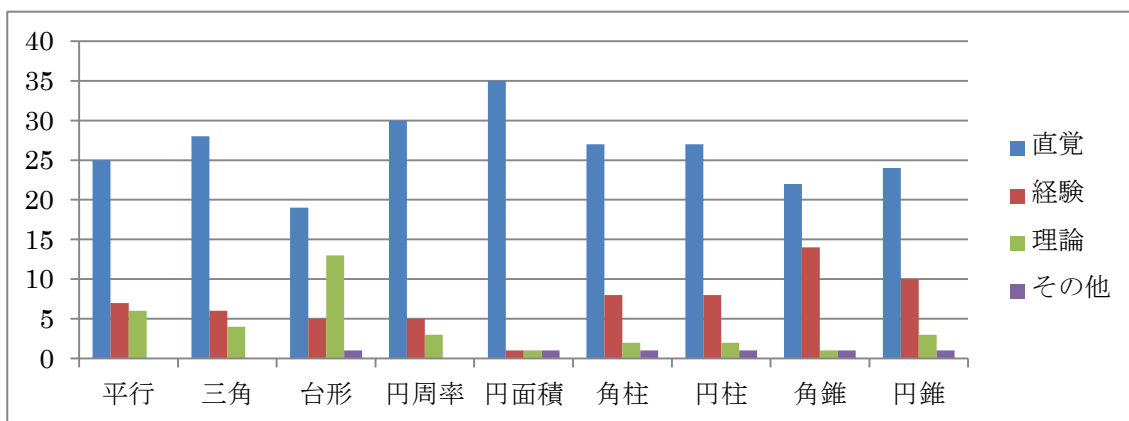
改善点③ 公式化した後に、公式の成り立つ理由や過程に着目して考えさせる指導が必要である。

5. 「量と測定」、「図形」領域の指導系統の改善について

5.1 指導系統の改善方法

5.1.1 改善点①-1 について

現状の指導系統でも、円と正多角形を関連付けて学習しているが、正多角形の周長と最長対角線の比については触れていない。正多角形の周長と最長対角線の比を円周率の学習に活かすことの利点は、次のようなことが考えられる。正多角形は直線で囲まれた図形であり、実測により周長と対角線の比を求めることが容易である。その実測した値から、一定の比があることを見出し、正多角形の周長と最長対角線は伴って変わ



グラフ 4.5.1

る量であることを意識することができる。このことから、円周と直径の比も一定であることと結び付けて考えることができる。

5.1.2 改善点①-2 について

(円の面積) $=$ (半径) \times (半径) \times (円周率)という公式の形は、等積変形下後の図形と関連して理解することが難しい。円の面積を長方形や三角形に等積変形した後と、(半径) \times (半径) \times (円周率)を結び付けるものとして、(円の面積) $=$ (半径) \times (円周) \times (1/2)を公式として指導系統に取り入れたい。この式を公式として明示することで、円周と面積、円周率を結び付けて学習することができる。

5.1.3 改善点②-1 について

錐体を学習する場面において、学習の水準に見合った理論的な指導を提示したい。ここでは、大きく二つの方法を示す。

一つ目の方法は、カヴァリエリの定理を用いる方法である。カヴァリエリの定理は次のように定義される。

【カヴァリエリの定理】

二つの平面図形(立体)が互いに等しい高さを持ち、底辺(底面)に平行で、底辺(底面)から等しい距離にある直線(平面)がそれぞれの図形から切り取られるときの線分の長さ(切断面の面積)の比が常に一定であるならば、その二つの図形の面積(体積)の比も同じである。

(Stryuik.,1969,p.210),(伊達,1993,p.134)

つまり、カヴァリエリの定理とは、図形の次元を一つ落として捉える不可分量という考えを用いる。立体図形であれば、その不可分量は面素である。この面素の大きさが1対1であるならば、その面素で構成される立体図形の体積は等しい。一方、対応する面素の面積比が常に一定であるならば、その面素で構成される立体の体積もその面素の比と等しいことが言える。このカヴァリエリの定理を用いて立体を面素の集まりとして捉えることで、体積が既知の図形と

未知の図形を比べて、未知の図形の体積を求めることができる。

一方、極限論的考察によらず、比例算を用いて三角錐の体積を求める方法が、フランスの科学史家イタール氏によって示されている。その方法の概略を次に示す。

①同底同高の二つの三角柱の体積は同一である。

②三角柱とその各稜の長さを半分にした相似三角柱との体積比は(1/2)³である。

③三角錐Pとそれに同底同高の三角柱Qの体積比xは、両者の各稜の長さを半分にした相似形で置き換えたときも変わらない。

Pを各稜の中点を使って、図5.1.3.1のように分解する。

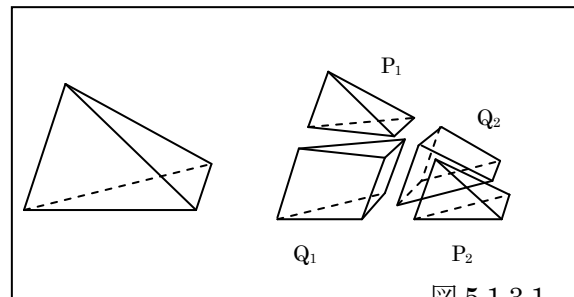


図 5.1.3.1

P₁, P₂はPの各稜を1/2にした三角錐, Q₁, Q₂はQの各稜を1/2にした三角柱である。よって、

$$P = xQ, \quad P = 2\{(1/8)Q\} + 2\{(1/8)xQ\}$$

$$\therefore x = 1/3 \quad (\text{村田,1974,p.21})$$

水かさの実験だけでの錐体の体積の学習は、経験的理解に偏るものになり、理論的に錐体の体積を捉えているとは考えにくい。カヴァリエリの定理や相似を使った比例算などを指導に用いることで、錐体の体積が柱体の体積の「正確に1/3」になっていることを理論的に理解することができる。加えて、様々な視点から錐体の体積を考えることで、錐体の体積を理解する構成要素の結びつきがより多く、より強いものになることが考えられる。

5.1.4 改善点②-2

ここでは主に、球の体積と表面積の学習

について言及している。指導系統の現状では、球の体積と表面積についての説明が直感的、経験的なものに偏り過ぎであり、既習の事象との関連を意識できるようなものになっていない。円の面積と円周を結び付ける $S=(1/2)lr$ から、球の体積と表面積を結び付ける式があることの見通しを持たせる。球を細かい円錐に分けることで、その体積が $V=(1/3)Sr$ であることを明示することで、球の体積と表面積を結び付けて学習することができることを示した。

5.1.5 改善点③について

図形の面積や体積の求め方を公式化した後の学習については、公式に数字を当てはめるような練習問題だけでなく、公式が成り立つ過程や理由を想起できるような事後学習が必要である。この事後学習を取り入れることで、道具的理解に陥りがちな図形の求積の公式を、関係的に理解することができる。

6. 本論文のまとめと今後の課題

6.1 本論文の成果

本論文ではまず、子どもたちの理解についての理論枠組みを定め、それに基づく指導要領の分析と調査の実施・考察を行い、指導系統の問題点と改善点を明らかにした。特に、調査結果から見える子どもたちの理解の様相は、直感的理解と経験的理解に偏るものであるということに注目しなければならない。改善点として、①新たに学習する事象が既習の事象と多く結び付くこと、②その学年における学習の水準に見合った理論的な指導をすること、③学習の過程を想起させるような事後学習について述べ、具体例を提示した。

6.2 今後の課題

指導系統の改善について学習過程における理解段階に着目したが、それは子どもたちにとって時間がかかり過ぎてしまうことや、学習の水準が不適當で理解が困難にな

ってしまうことなどの課題も残った。また、部分的な例を示しただけで終わり、指導系統の全体的な改善についての考察は不十分と言える。今後は、これらの課題解決に向けて実践的な検証をしていきたい。

【引用・参考文献】

- Archimedes, Measurement of circle, [Heath, T.L., (1992); The Works of Archimedes with A Supplement "The method of Archimedes", Dover Publications, Inc., New York.]
- Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992), Learning and teaching with understanding. D.A. Grouws (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.65-97). Macmillan Publishing Company.
- R.R. スケンプ, 平林一榮訳(1992), 『新しい学習理論にもとづく算数教育—小学校の数学—』, 新曜社.
- S. ラング, 松坂和夫/大橋義房訳(1987), 『さあ, 数学しよう!』, 岩波書店.
- 安倍斎著(1989), 『微積分の歩んだ道』, 森北出版.
- 高橋敦(2012), 「算数・数学教育における『量と測定』領域の指導改善に関する考察—面積・体積を求める方法に焦点をあてて—」. 上越数学教育研究第27号.
- 高橋敦(2013), 「算数・数学教育における『量と測定』, 『図形』領域の指導系統の改善に関する研究」. 上越教育大学修士論文.
- 伊達文治(1993), 「アルキメデスの数学—静力学的な考え方による求積法—」, 森北出版.
- 村田全(1974), 「数学史散策」, ダイヤモンド社.
- 文部科学省(2008), 「小学校学習指導要領・算数編」東洋館出版.
- 文部科学省(2008), 「中学校学習指導要領・数学編」教育出版.