

## 「微分する」ことの意味理解に関する一考察

山口 昌広

上越教育大学大学院修士課 1年

### 1. 研究目的と方法

本研究の目的は, 高等学校における「微分する」ことの意味理解の様相を明らかにし, 高等学校第2学年における微分・積分の学習での「微分する」ことの意味を生徒に考えさせる指導の改善を行うことである。

現在の微分法の学習における問題点として, 次のことが言えよう。それは, 微分法を学習した生徒が, 微分法の計算を行い, 解答を得ることはできる。しかし, 「微分するということはどういうことか」という問いに答えられる生徒がどれくらいいるかということになると, はなはだ心許ない。生徒は微分の計算ができるが, 「微分する」ことの意味理解にまでは至っていないのではないかという問題である。

塚原(2002)は, 「先行研究に, 生徒は, 微分積分法の計算はできるが意味が分からないという問題点の指摘があった。例えば, 公式を適応して問題を解くとき, やっている計算の意味が理解できていない」(p.105)といった微分・積分の学習についての問題点をあげている。生徒は, 微分学習において, 単に与えられた数式に数字を当てはめて問題を解くといった公式の暗記と公式を適応する学習だけで終わっていることが考えられる。

「微分する」ことは, 導関数を求めることである。微分係数を求めるとは, 関数において変化率を求めることであり, 瞬間の速さや接線の傾きがこれにあたる。導関数

を求めるとは, 変化率の変化を表す関数を求めることである。

導関数を求めることには, 極限という概念が関わってくる。したがって, 「微分する」ことの意味を考えるには, 極限という概念の理解が必要となる。極限は, 高等学校第2学年数学Ⅱの微分のところで初めて学習するが, 本格的には, 高等学校第3学年数学Ⅲで学習する。高等学校第2学年数学Ⅱにおける極限の学習は, 表面的なものになりがちである。生徒は, 極限についての理解が充分伴わないまま微分を学習していくことになることが考えられる。

極限の理解について, 池田(2002)は, 「高等学校における極限に関する概念のあいまいさが, 微積分の理解の困難さを招いている」(p.147)と述べており, 微積分の指導には, 近似を使用して, 微分概念を形成することの必要性を指摘している。「微分する」ことの意味理解の様相を明らかにするためには, まず高等学校第2学年の極限の指導に焦点をあて考察してかなければならないと考える。「微分する」ことの意味を考えさせるためには, 微分の学習の基礎となる考えが生まれる高等学校第2学年での指導に着目する必要があると考えたからである。

本稿では次のように節を構成する。第2節では, 高等学校学習指導要領において, 極限の指導がどのようになされているか示し, 現在の高等学校における微分法での極

限に関する導入がどのように指導されているか考察し、問題点を明らかにする。第3節では、小学校から高等学校の微分法までの学校教育を通じて、極限の概念のもととなる「限りなく近づく」という概念がどのように構成されていくのかを考察する。第4節では、前田(2005)と葉袋(1997)の先行研究をもとに、高校生に「微分する」ことの意味理解に必要な極限の概念を適切に形成できる学習とはどのような学習なのかを考察する。第5節では、本稿で考察してきたことの、まとめを行い今後の課題を述べる。

## 2.1 学習指導要領の極限に関する指導

平成21年度に告示された高等学校学習指導要領では、極限の概念がどのように扱われているか述べられている。極限が扱われる単元は、高等学校第2学年の微積分の単元からである。この単元での極限の指導について、「極限については直観的に理解させるようにする」(p.35)としており、極限については軽く触れる程度で止め、すぐ導関数を求める計算とその練習に入り、その後、接線の傾きの値だけを代数計算を使用することで求め、グラフの概形を求めることに重点が置かれている。

高等学校第3学年では、極限の単元において、分数関数や数列などの他の単元の内容と絡めて極限が扱われている。この指導でも、極限については、「微分法・積分法の基礎を培う観点から極限の直観的な理解に重点を置きながら…(略)…関数値の極限を求めることができるようにする」(p.39)と記述されている。この単元でも、極限については、直観的な理解にとどめるとしており、分数関数や数列の極限を求めるという計算に重点が置かれている。

以上のことから、現在の微分法における極限の指導は、近似値を使用して、極限值

を求める作業や、接線についての生徒自身が図を書く作業や考察をすることなく、極限の簡単かつ一方的な説明に終わり、結果そのものを理解させ、微分・積分の計算練習に入るといった指導の傾向があると考えられる。

## 2.2 高等学校第2学年での微分法の指導

高等学校第2学年の微分法での極限の導入方法について、ここでは、新編数学Ⅱ(啓林館)を参考にする。

この教科書では、斜面を転がる球体の平均の速さを求めることから、平均変化率を導き、グラフと対応させ考察している。その時を、関数  $f(x)$  について、 $x=a$  から  $x=b$  までの  $f(x)$  の平均変化率という定義をしている。つまり以下のことである。

$$\frac{x \text{ の変化量}}{y \text{ の変化量}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

平均変化率から微分係数に結びつけるために、 $b=b+h$  に置換することで、関数  $f(x)$  の  $x=a$  から  $x=b+h$  までの  $f(x)$  の平均変化率を定義している。そして、極限の導入を行っている。その導入方法を以下に示す(図1)。

$h$  のとる値を  
0.1, 0.01, 0.001, ……

のように、0 に限りなく近づけていくとき、①の式の値は、  
2.1, 2.01, 2.001, ……

のように、2 に限りなく近づく。

また、負の値をとりながら、 $h$  を0 に限りなく近づけていくときも、①の式の値はやはり2 に限りなく近づく。

このように、 $h$  が0でない値をとりながら0 に限りなく近づくととき、平均変化率  $\frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$  の値は2 に限りなく近づく。この値2を、  
 $h$  が0 に近づくとときの  $\frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$  の極限值  
という。そして、このことを記号  $\lim$  を使って、次のように書く。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = 2$$

図1：極限の導入方法

ここでの、極限に関しての教科書の指導は、できるだけ 0 に近い小数を式に代入することで、近似的に 2 になると指導され、記号を使用することで、 $\lim_{h \rightarrow 0}(2+h)=2$  で表すという指導がされている。つまり、極限について、近似的な計算をすることなく、教師が、 $\lim$  の記号を使うことで、限りなく近づくときの値が同じになることを指導するといった教師の説明だけで極限の導入がされているのである。言い換えれば、教師の説明だけの導入方法では、限りなく近づけば、もう一方の量がある値に近づくという概念が、意味理解を伴わない極限値の練習に終始する学習になっていると考えられる。この問題点に関するものとして、葉袋(1997)と松田(1993)の指摘がある。

葉袋(1997)は、「 $0.999\cdots=1$  について、成績上位 40 名の生徒に聞いてみても、ほとんどの生徒が理屈では 1 となることがわかるが納得できないと答えている」(p.457)と述べている。松田(1993)は、「中・高生はもとより、大学生になっても  $0.999\cdots$  は、いくらでも 1 に近づくが、1 と考えることができないとする者が非常に多い」(p.157)と述べている。このことから、生徒は、ある値に限りなく近づけば、値が等しくなるという考え方に困惑していると考えられる。従来の微分の学習における極限の指導は改善されなければならない。

本稿では、これ以降、限りなく近づけばもう一方の量がある量に近づくという概念を「限りなく近づく」ということにする。

### 3. 「限りなく近づく」という概念の形成過程

この節では、小学校算数から高等学校数学Ⅱの微分の学習までの学校数学では、どのように「限りなく近づく」という概念が形成されているのかを教科書を参考にし、考察する。学校数学で「限りなく近づく」

という概念が生じるのは、主に関数領域と図形領域である。そのため、上記の学校教育における指導系統を以下に考察し、「限りなく近づく」という概念がどのように生徒に理解されていくのか考察する。

#### 3.1 小学校での「限りなく近づく」という概念

小学校で「限りなく近づく」極限の概念が使用されている学習は、第 5 学年の円周の長さ、第 6 学年の円の面積と反比例である。

円周の学習では、正 8 角形、正 5 角形、正 6 角形の周の長さを測る活動を通じて、円周の長さに結び付けている。ここでは、「限りなく近づける」という考えは用いられていないが、多角形の周の長さを測る活動は、限りなく周の長さを 0 に近づけるという概念の基礎を作っていると考えられる。

円の面積の学習では、円を円の中心から円周に向かって細かく切り、それを長方形に近似することで面積を求めている。円を分割することで、新たな長方形を作り、面積を求める考えの中には、角度を限りなく 0 に近づけるという考え方が用いられている。

反比例の学習では、長方形の面積が決まっているときの縦と横の長さの関係を調べ、 $x$  の値が 2 倍、3 倍になるとそれに伴って  $y$  の値が  $\frac{1}{2}$  倍、 $\frac{1}{3}$  倍になるときを反比例というように記述されている。小学校では、グラフを描くという指導がなされていないため、0 に近づくといった考え方はなく、表を通じて、量の関係を調べるという学習で終わっている。

#### 3.2 中学校での「限りなく近づく」という概念

中学校数学での「限りなく近づく」とい

う概念が存在している単元は、第1学年の円の面積と反比例、空間図形である。

円の面積は、クローズアップとして小学校での円の面積と同様の考え方で「限りなく近づく」という概念を用いて円の面積と扇形の面積について記述している。ここでは、小学校で学んだ内容を復習している。このことから、円の面積の求める際に、「限りなく近づく」という概念が用いられていることがわかる。

反比例は、 $y = \frac{a}{x}$  の関係が成り立つとき  $y$  は  $x$  に反比例すると定義している。つまり、中学校の反比例の学習では、小学校で表を使用して量の関係を調べるということに加え、座標を用いて、グラフについて学習している。この単元では、クローズアップとして、 $x$  の値が  $0$  に近づくときの  $y$  の値と  $x$  の値を大きくしたときの  $y$  の値について考察することで、反比例のグラフの性質を導き出している。次に示すのは、中学校の反比例で学習する「限りなく近づく」という概念が現れる箇所である(図2)。

クローズアップ

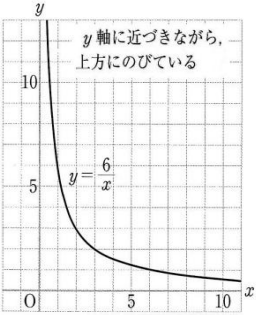
双曲線の先端は?

関数  $y = \frac{6}{x}$  では、

$x = 0.1$ のとき	$y = 60$
$x = 0.01$ のとき	$y = 600$
$x = 0.001$ のとき	$y = 6000$

...

のように、 $x > 0$  のとき、 $x$  の値を  $0$  に近づけていくと、 $y$  の値は限りなく大きくなっていきます。したがって、右の図で、グラフの左側の先端は、 $y$  軸に近づきながら限りなく上方にのびていることがわかります。



$x = 10, 100, 1000, 10000, \dots$  と、 $x$  の値を大きくしていくときの  $y$  の値を求めてみましょう。また、そのことから、上の図のグラフについてどんなことがわかるでしょうか。

図2：反比例の学習

したがってこのグラフから、 $0$  に限りなく近づくとき、グラフが  $y$  軸や  $x$  軸と交わることがないことを学習している。

### 3.3 高等学校での「限りなく近づく」という概念

高等学校での「限りなく近づく」という概念が使用されている単元は、第2学年で学習する三角関数、指数関数、対数関数である。

三角関数では、 $\tan x$  についてのグラフによって、 $x = \frac{\pi}{2}$  に限りなく近づく直線を漸近線と定義している。「限りなく近づく」という概念は、学校数学を通じて、三角関数の単元で初めて言葉で指導されている。

指数関数と対数関数では、グラフの考察を行い、グラフの特徴をとらえさせる指導を行っている。しかし、指数関数、対数関数のどちらも、グラフの大まかな概形を記述しており、三角関数のように漸近線についてまでは詳しく取り上げられておらず、どの直線が漸近線になるのかということグラフを通じて説明している。

### 3.4 考察

小学校算数から高等学校数学Ⅱの微分の学習までの学校数学での、「限りなく近づく」という概念の形成過程の考察から、学校数学の中での「限りなく近づく」という概念は、関数領域と図形領域に分類できることが明らかとなった。

学校数学における図形領域と関数領域での「限りなく近づく」という概念の形成を次ページに示し考察していく。(図3)、(図4)。

【図形領域における「限りなく近づく」という概念】

- ・ 小学校第 5 学年  
「正多角形と円周の長さ」 ・ 円周の長さ
- ・ 小学校第 6 学年  
「円の面積を考えよう」 ・ 円の面積
- ・ 中学校第 1 学年  
「平面図形」 ・ 円と扇形

図 3：図形領域

【関数領域における「限りなく近づく」概念】

- ・ 小学校第 6 学年  
「比例と反比例」 ・ 反比例
- ・ 中学校第 1 学年  
「比例と反比例」 ・ 反比例
- ・ 高等学校第 2 学年  
「三角関数」 ・ 三角関数グラフ  
「指数関数」 ・ 指数関数  $y=a^x$  のグラフ  
「対数関数」 ・ 対数関数  $y=\log x$  のグラフ

図 4：関数領域

図形と計量での「限りなく近づく」という概念は、円の考察により形成されている。円という図形について考察をすることで、視覚的に「限りなく近づく」という概念をとらえていることができる。視覚的に図形

をとらえることができるため、児童・生徒が「限りなく近づく」というイメージが付きやすいのではないかと考える。また、高等学校数学第 2 学年で学ぶ微分の極限は、 $h$  を限りなく 0 に近づけるという指導である。円の面積や周の長さを求める活動には、円を細かく扇形に分割し、角度または辺の長さを限りなく 0 に近づけるといった概念が存在している。すなわち、0 に近づけるとい意味では同じ概念であると考えられる。

関数領域においては、中学校、高等学校ともグラフを通して、「限りなく近づく」という概念を学習している。つまり、漸近線とグラフの関係を見ることで、極限の概念をとらえているのである。しかし、関数における指導の場合、反比例、三角関数、指数関数、対数関数のグラフにおける漸近線は、グラフと交わることはないという指導がなされている。そのため、ある値に限りなく近づくということは、ある値と同じ値にはならないということである。その後学習する微分法の接線の学習についても、「限りなく近づく」という視点では、必ず 2 点で交わっていると疑問を持つ生徒がいるかもしれないと考えられる。そこで、極限を理解するためには、近づく値と近づける値を区別しなければならない。そこで、近づくものが見える指導を行う必要がある。

#### 4. 無限の理解に関する先行研究

この章では、前田(2005)と葉袋(1997)の先行研究をもとに、生徒がどのように「限りなく近づく」ということをとらえているのか、また、生徒が、「限りなく近づく」という概念を理解するための方法を明らかにし、現在の指導と照らし合わせ考察する。

##### 4.1 前田(2005)の先行研究

前田(2005)は、高校数学の最終到達点だが、微積分であるのならば、その基礎である極

限に含まれる無限の概念を育まなければいけないが、実際の指導では、極限に関して明示的であるという問題点から、無限概念を数学史的な視点で、無限を動的な仮無限と静止的な実無限の側面からとらえた。ここで扱う動的な仮無限とは、無限循環小数で表されている数であり、静止的な実無限とは、分数で表されている数のことである。前田(2005)は、無限概念の育成には、その2面性に気付くことが重要であると述べている。前田(2005)は、高校生4人に無限循環小数についての試行授業を行い生徒の無限の理解の様相を明らかにした。

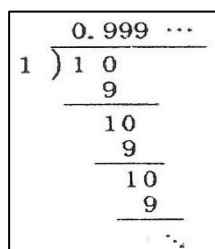
試行授業の過程を以下に示す。

過程Ⅰ… $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{12}$ ,  $\frac{4}{33}$ ,  $\frac{2}{17}$ を小数に直す。

過程Ⅱ…0.25, 0.64, 0.444..., 0.2424...を分数に直す。

過程Ⅲ…過程Ⅱ部分の後半部分についての自由記述。

上記の試行授業は、分数を無限循環小数に直す作業と無限循環小数を分数に直す作業を通して、生徒が動的に無限をとらえているのか、静止的に無限をとらえているのかを明らかにしている。試行授業の結果、生徒は、静止的にとらえるのではなく、無限を動的にとらえていることが明らかになった。前田(2005)は、 $0.999\cdots=1$ となることに疑問を感じていた生徒に、1を拡張された除法の筆算の指導を行った。右に拡張された除法の筆算の方法を記す(図5)。



5: 拡張された除法の筆算

この方法で、1という静止した数を動的な数にとらえ直すことで、生徒は、 $1=0.999$

…であることに納得したことから、前田(2005)は、生徒の無限のとらえは、動的であると述べている。

## 4.2 薬袋(1997)の先行研究

薬袋(1997)は、極限の計算は技術的な習熟によって身につけているが、 $0.999\cdots=1$ になることが理解できない生徒がいることを問題点としている。薬袋(1997)は、理系クラスの成績上位の高校生2人に対して、高校から大学にかけての無限級数の和に関する極限の概念の変容を、インタビューを通じて調査し、極限の概念を理解するには、無限を動的にとらえることではなく静止的にとらえる必要があることを明らかにしている。

インタビュー内容は以下の通りである。

- ① 平成7年10月  
漸近線、無限級数の収束、循環小数、区分球積法について、微分・積分を終えての感想を極限の概念を中心に聞いた。
- ② 平成7年11月  
無限級数の収束、区分求積法、極限について聞いた。
- ③ 平成7年12月  
無限級数(伸びる木の問題)について聞いた。
- ④ 平成8年6月  
大学での勉強の進行状況、極限の理解について( $\epsilon - \delta$ 論法)について聞いた。
- ⑤ 平成8年12月  
極限の理解について今までの過程を生徒自身に振り返らせ、その中での質問紙調査を行い、さらに質問紙を基にインタビューした。

インタビュー調査の結果、伸びる木に対する高校生の極限のとらえは、動的なとら

えであることが明らかになった。伸びる木の問題は、1メートルの木が1年で $\frac{1}{2}$ の長さで伸びているとき最終的な木の長さを計測する問題である。この問題の解答は2メートルである。伸びる木の問題について、木が無限に伸び続けていると考えている。そのため、2に限りなく近づくが、2にならないという考えに至っている。生徒は、公式を知っているため、解答が2になることは理解できているが、 $\lim$ の時は=という等式になることがおかしいというとらえ方をしている。

1年後の生徒への質問紙の内容は、「0.99…は、1の別表現であり、 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots$ は2の別表現である。いずれも数直線上の点と1対1に対応する。このことが感覚的につかめたか？(一步離れて静止的な状態として見れるか?)」(p.461)である。

この質問紙に対し、生徒は、長さ1の正方形の対角線の長さが $\sqrt{2}$ になることから、無限小数を視覚的にとらえ、止まっているという表現をしている。0.999…も同様に1で止まっていると考えており、感覚的に理解できたという回答が得られている。これは、0.999…という数だけ考えるのではなく、 $\sqrt{2}$ を視覚的にとらえたことにより、生まれた発想である。

#### 4.3 考察

前田(2005)と薬袋(1997)の研究は、級数の和に関わる極限を対象としたものである。現在の生徒は無限のとらえとして、0.999…のように動的にとらえていることを明らかにしている。そして、生徒に無限をとらえさせるためには、数を動的にとらえるのではなく静止的にとらえることが「限りなく近づく」という概念の獲得のための一つの方法であると述べている。しかし、現在

の学校数学に目を転じると、「限りなく近づく」という概念は、関数領域と図形領域で形成されている。その関数領域の指導は、中学校第一学年における反比例の学習や高等学校第2学年における微分の学習ともに動的に指導されている。微分法の指導では、「限りなく0に近づける」という無限小の考え方がなされている。

図形領域では、円について考察している。円の面積では、円を細かく量を等分する考え方がされている。つまり、等分する考え方は、分数で表される。したがって静止的な指導がなされている。そのため、高等学校数学第2学年の微分の学習においては、級数に関わる和の極限を対象とした数の動的なとらえ・静止的なとらえを微分の基礎となる極限として見直す必要が出てくる。

微分において、「限りなく近づく」という概念を生徒にとらえさせるためには、近づく値と近づける値を区別する必要がある。そこで、動的なとらえ・静止的なとらえを高等学校第2学年の微分の学習に置き換えて考えると、近づける値は、動的にとらえられ、近づく値は、静止的にとらえることができる。微分係数の幾何学的な意味でとらえるならば、曲線上のある値における接線が静止的なとらえであり、接点と曲線上の近づく値とにできる直線の変化が動的なとらえなのである。

#### 5. まとめと今後の課題

本稿では、「微分する」ことの意味をとらえるためには、極限の概念が関わることから、学習指導要領や教科書を参考に小学校算数から高等学校数学Ⅱの微分の学習までの「限りなく近づく」という概念の形成過程についての考察から始めた。その結果、高等学校数学Ⅱの微分の学習における極限の指導が、教師説明だけに終わっていること、小学校算数から高等学校数学Ⅱの学校

数学を通じて「限りなく近づく」という概念が図形領域と関数領域という別々のルートにおいて形成されていることが明らかになった。

「限りなく近づく」という概念を獲得するための見方を探るために、前田(2005)と菓袋(1997)の先行研究を参考にした。そこから明らかにされたことは、生徒の極限の概念の理解の様相と生徒が無限をとらえるために必要な数の動的な視点と静止的な視点が必要であることである。その研究結果をもとに、高等学校数学Ⅱの微分の指導と結び付けて考察した。その考察をもとに、極限の学習においては、近づけさせる値を動的にとらえさせ、近づく値は静的にとらえさせることが大切になると考えることができた。そのためには、微分学習における微分係数を求める学習では、近似値を実際に計算させる作業や接線とそれに近づく直線の作図という作業を盛り込んだ数学的活動を生徒にしっかりとさせていく指導が必要であると考え。また、現在の微分の学習では、微分計算とその習熟だけになる傾向がある。生徒が、「微分する」ことの意味をとらえるためには、代数的な考察だけでなく幾何学的な考察も充実させていかなければならない。

この実践が今後の課題である。これから、高等学校数学第2学年の微分の学習において、微分の基礎となる極限の概念をどのように形成させていくか、そのためには、どのような数学的な活動を構築すればよいか明らかにしていきたい。

#### 引用・参考文献

- 文部科学省(2008).『小学校学習指導要領 解説 算数編』,株式会社東洋館出版.
- 文部科学省(2008).『中学校学習指導要領 解説 数学編』,共立出版.
- 文部科学省(2009).『高等学校学習指導要領

- 解説 数学編』,実教出版,35,39.
- 藤井齊亮(2011).『新しい算数5~6』,東京書籍.
- 一松信 他(2012).『中学校数学1』,学校図書,136.
- 一松信 他(2012).『中学校数学2~3』,学校図書.
- 高橋陽一郎 他(2012).『新編 数学I』,啓林館.
- 高橋陽一郎 他(2012).『新編 数学II』,啓林館,178.
- 高橋陽一郎 他(2012).『新編 数学III』,啓林館
- 塚原久美子(2002).『数学史をどう教えるか』,東洋書店,105.
- 前田淳一(2005).『高校数学における無限概念を育成に関する研究(Ⅲ)ー無限循環小数に対する高校生の理解の様相ー』,日本数学教育学会 第32回数学教育論文発表会論文集,277-282.
- 菓袋秀樹(1997).『極限概念の理解に関する研究』,日本数学教育学会 第30回数学教育論文発表会論文集,457-462.
- 池田文男(2002).『関数の教授過程』,日本数学教育学会 第35回数学教育論文発表会,145-148.
- 松田元伸(1993).『「無限・極限」に関する一考察ー中・高校生に対する実態調査を通してー』,日本数学教育学会 第26回数学教育論文発表会論文集,157-162.