上越数学教育研究，第29号，上越教育大学数学教室，2014年，pp.33-42.

授業実践における教授学的状況理論の可能性と限界

～中学校数学における三角形の決定条件を題材に～

中村　圭貴
上越教育大学大学院修士課程 3 年

1. はじめに

筆者は修士論文（中村，2014）の作成にあたり，教授学的状況理論（以下，TDS と呼ぶ）を用いて授業を設計・実施し，本稿の題目にあるように授業実践における TDS の可能性と限界について研究した．本稿では，その一部について述べたい．

中学校学習指導要領解説（文部科学省，2008）では，「数学的活動」の語とともに「主体的」という語が頻繁に用いられている．数学の授業において生徒が課題に主体的に取り組み，活動する姿は多くの教員が目指していることであろう．しかし，どうすれば生徒が主体的に取り組む授業が作れるのであろうか．20 年，30 年の教育経験をもつ熟練の教師には可能かもしれないが，教育経験の少ない者にとっては難しい．実際，筆者は教育実習で生徒の主体的な学習が生じるような授業を試みたが，うまく実現することができなかった．

その一方で，数学教育学では多くの研究がなされ，これまで様々な理論が構築されてきた．その理論には，カリキュラムを構築するためのもの，授業を分析するためのもの，など様々である．これらの理論の一つに，学習をそもそも主体的な営みと捉え，それが生じる条件に焦点を当てた教授学的状況理論（Brousseau，1997）と呼ばれる理論がある．筆者はこの理論を用いることで，生徒の主体的な学習が生じる授業が作れるのではないかと考えた．

理論から授業を作ることにおいて，TDS では教授工学という考え方を用いる．教授工学について宮川（2009）は，「一言で言えば，教授工学とは，理論にもとづいて授業等の実験を設定し，実験結果から，理論へのフィードバックを得て，新たな理論構築の手掛かりとするものである」（p.59）と述べている．ただし，教授工学には，研究のためのもの（engineering for research）と，開発のためのもの（engineering for production）が存在する．Artigue（1994）によれば，前者は理論を構築するためのもので，後者は技術者の仕事である．本研究で関心があるのは後者である．Artigue（1994）は，教授工学の重要な仕事の 1 つに教授要素の改革があり，例えば，なぜ授業をそのように変更すべきなのか？その改善の目的は何なのか？どんな困難性があるのか予測し，どのように克服するのか？等といった問いが存在し，それらに答える必要性を主張している．

そこで，本研究では上述した教授工学の視点を取り入れ，実践でどれだけ数学教育学の理論が使えるのか，TDS を用いて授業を構想・設計することにより，生徒が主体的に取り組み，自ら知識を構築していくような授業をどの程度実現できるのかということを検証する．

2. 研究目的

本研究は，生徒が主体的に取り組み，自ら

知識を構築していくような授業を作ることにおいて TDS を用いることで実際にどのような授業を作ることが可能なのか，そして，実際にどのような学習が生じるのかを検証することにより，授業実践における TDS の可能性と限界を明らかにすることを目的とする．

3. 研究方法

上記目的を達成するために，まず，一般に言われている「主体的な学習」というものを理論（TDS）の言葉である「亜教授学的状況」と規定する．次に，主体的な学習を生じさせるための要件を TDS から抽出し，「学習の要件」を明確にする．そして，この「学習の要件」をもとに授業の構想・設計，及び教授実験を行いデータを収集する．

授業実践における TDS の可能性と限界について考察する際，理論 (TDS) と実際の授業の関係を直接検討するのではなく，両者の間の媒介物を考慮に入れる．それは，指導案に見られる授業である．なぜなら，実際の授業において，指導案の内容がすべて反映されることは少なく，想定外のことも起こるからである．そこで，図 1 に示す①～③の 3 つの段階に分けて分析を進めることにする．

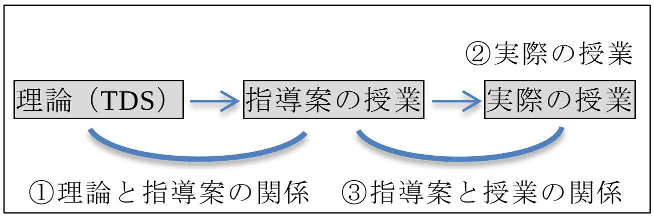


図 1　3 段階の分析の概要

第 1 に，①TDS が指導案の授業のどの部分に反映されているか明らかにする．第 2 に，②実際の授業を分析する．分析ツールには TDS を用いて，実際の授業でいかなる学習が生じていたのかを明らかにする．第 3 に，③指導案の授業と実際の授業との関係を分析する．TDS を用いて授業設計した内容が，実際の授業の中でどれだけ表出していたのかを検証する．そして，最後にこれまでの検討の結果を踏まえ，授業実践における TDS の可能性と限界について考察する．

4. 授業設計

授業は，中学校第 2 学年を対象にした平面図形領域の三角形の決定条件に関するものである．合計 3 時間を想定した．この授業は三角形の決定条件についての知識を生徒が自ら見出し，獲得していくことを狙い，TDS を用いて構想・設計した．その過程では，TDS より「学習の要件」を抽出し，それらを反映させるためにはどうすれば良いかということを念頭に，研究論文や数学教育の書籍なども参考にしながら教材や授業の展開などを決めていった．そして，考案した指導案は何度も TDS を振り返ることで改良を重ねて完成させた．

以下ではまず TDS について概説し，次に TDS から抽出した「学習の要件」，及び構想・設計した授業の概要を示す．なお，これらの詳細と，「①理論（TDS）と指導案の関係」については，中村（2013）で述べているため，そちらを参照されたい．

4.1　TDS の概要

TDS では，「ミリュー（milieu）」という概念を導入し，学習を学習者とミリューとの相互作用によってモデル化する（cf. 宮川，2009; 石川・宮川，2012）．「ミリュー」とは，学習者が働きかける環境であり，学習者に情報やフィードバックを与えるものである．例えば，生徒に与えられた問題や自らかいた図をはじめ，鉛筆やコンパスといった道具等もミリューになり得る．そして，学習者はミリューに働きかけることでミリューから情報を得る．この情報の内，学習者の予想に反する情報は「フィードバック」と呼ばれ，このフィードバックにより，学習者が自らの方略を変更することで学習が進むとするのである．更に TDS では亜教授学的状況という概念が存在する．これは「教師は存在するが，生徒があたかもミリューとの相互作用のみを行っている

ように思う状況」（石川・宮川，2012，p.4）である．筆者は，この亜教授学的状況を生徒の主体的な学習や活動が生じている状況と捉えた．

4.2　TDS から示唆される学習の要件

授業を設計する上で前提としたことは，生徒が亜教授学的に知識を獲得していくことであった．そこで，これらを実現させるために TDS から示唆される要件を以下に示す．

（1）亜教授学的状況を作り出す要件

TDS より亜教授学的状況を生じさせる要件を検討した結果，次の 5 つがその要件であると考えた．なお，以下で述べる①～⑤の要件は，知識の形成過程と関わり，それぞれ独立したものではない．

①必要性のある状況
②相互作用が生じる状況
③フィードバック(FB)が生じる状況
④教授学的契約の影響を考慮した状況
⑤委譲を生じさせる

（2）知識の形成過程を実現させる要件

TDS は知識の形成過程を考慮に入れている．この視点からすれば，知識の発生（学習）においては以下の⑥~⑨が必要と考える．なお，⑥～⑨の要件は必ずしもこの順番通りに場面が変化するとは限らず, 前後することもある．

⑥試行錯誤の状況
⑦定式化の状況
⑧妥当性判断の状況
⑨制度化の状況

4.3　授業の概要

1 時間目は，図 2 のような三角形の一部が欠けた図形を用いて行われる．この教材は，Balacheff（1991）に見られた問題からアイディアを得て作成したものである．生徒にとっての課題は，欠けた図形のもつ情報をもとに欠ける前の三角形を再現することである．ここには線分や角の大きさは示されていないため，生徒は自ら必要な箇所を測定等しながら情報を得て三角形をかくことが求められる．生徒は 2 人 1 組のペアをつくりこの課題に取り組む．

授業展開は，問題提示，ルール説明，デモンストレーション，問題解決，答え合わせ，まとめ，という一般的な流れである．なお，問題は 2 問ずつ配布し，それが終わったら答え合わせをして次の問題へと進む．答え合わせは，各ペアに用意した透明なシートに三角形が印刷されたものを用いて行う．それを重ね合わせることで正誤判断を生徒自らが行う．

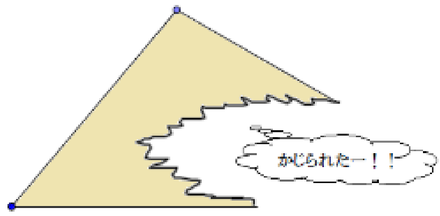


図 2　欠けた図形の問題例

2 時間目はカードを使ったゲーム形式の授業である．ゲームは，ある三角形の 3 つの辺と 3 つの角の値がそれぞれ 1 枚のカードに記載された合計 6 枚のカードを用いて行われる．生徒は 1 時間目と同じペアをつくり，2 対 2 で対戦する．ゲームの内容は対戦者がカードをトランプのように数枚ひいて，その情報からカードに示された三角形をかくというものである。生徒は手札にあるカードの情報から三角形をかく過程で, この手札でかけるのか，どうすればかけるのか，またはかけないとしたらどうなればかけるのかなど試行錯誤することになる. ゲームの流れは次のようになる．

①先攻後攻を決めて先攻チームから始める
②ひく枚数を宣言してからカードをひく
③手札に交換したいカードがあればそれを捨て，それと同じ枚数のカードをひく
④三角形をかく
⑤答え合わせをする
⑥間違えた場合は②へもどって繰り返す
⑦先攻後攻を交代する

授業展開は，問題提示，ルール説明，デモンストレーション, ゲーム 1 回戦(2 セット)，

2 回戦（2 セット）, まとめという流れである．ゲームの 1 回戦目は，とにかくカードで生徒に遊ばせる．そして 2 回戦目ではワークシートに「勝つために工夫したこと」と「どんなときに三角形がかけたか」をゲーム終了後に記入することを伝えてから取り組ませる．

3 時間目はこれまでの総括となる．課題の内容は 1 時間目と同じであるが，使用してよい道具はコンパスと定規のみに制限する．これにより，角を写しとる作図を行う必要性が生じることを狙った．また，授業の後半では三角形の決定条件についてまとめる．その際，三角形の 6 つの要素から 3 つを用いる計 6 つのパターンを取り上げ，それらが三角形の決定条件になりうるかどうかの吟味を行う．

授業展開は，問題提示，ルール説明，問題解決，角を写しとる作図方法についてのまとめ，三角形の決定条件の絞り込み，3 時間全体のまとめという流れである．

5. 教授実験の概要と分析結果

以下では，作成した指導案をもとに実施した教授実験の概要を示すとともに，授業データの分析結果を示す．

5.1 教授実験の概要

教授実験は, 長野県の公立中学校において，平成 24 年 12 月に第 2 学年の通常クラス（生徒 32 名）にて実施した. 授業は 1 日 1 コマ（50 分）を 3 日間にわたって行い，いずれも当該中学校教諭に実践していただいた．授業は三角形の合同条件の学習に入る前の段階で行った．

5.2 分析結果

紙面の都合上，本稿では授業の分析結果の一部を取り上げて紹介する． 3 時間の授業を通して，生徒とミリューとの相互作用がどの程度みられたのか，及びどのような知識状態の変化がみられたのかということについて，分析した結果を述べる．なお，分析ツールには TDS を用いた．

（1）ミリューとの相互作用について

3 時間の授業を通して, 生徒とミリューとの多くの相互作用があり，至るところで亜教授学的状況が確認できた．具体的には問題解決の過程において，生徒は多くの場合，三角形の決定条件を必勝法として暗黙裡に使用していた．またフィードバックがあったことで，問題解決のためのストラテジーに変化が見られた．フィードバックは大きなものから小さなものまで様々なものがあった．1 時間目は欠けた三角形を復元するという課題であり，2 時間目はカードの情報をもとに三角形をかくというゲーム形式の課題であった．教師から課題の提示があった後は，どちらも教師の介入は少なかった．生徒は教師の期待を探るといった行為はせず，問題を自分自身のものとして捉えていた．3 時間目はまとめや定式化を行う必要があったため, 教師主導となる場面が多かった. そこでは，必ずしも生徒の活動の中からフィードバックが生じたわけではなかった．しかし，教師から情報は来ているものの，生徒が自分自身の問題として考えられている場面もあった. 以下 2 つの場面を取り上げ, 具体的に分析結果を示す.

①1 時間目の課題 2 の場面

この課題は，三角形の 3 つの辺がバラバラに配置された図が与えられており，この情報から三角形を復元するというものである．図 3 にタク・サヤカがこの課題に取り組んだ際のワークシートを示す．

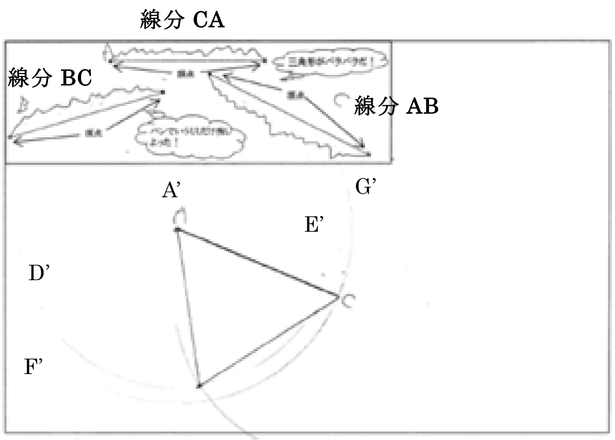


図 3　タク・サヤカのワークシート(課題 2)

タク・サヤカは，3 つの辺が分かれば三角形がけるという認識があることがうかがえる（No.88 ）. しかし，すぐには 3 辺を用いて三角形をかくことはできずに苦戦していた．アイディアとして決定条件の知識はもっていても，スムーズに図をかくということには至らなかった．つまり，知識が操作的ではなく，理論的なものであったことが分かる. その後，ミリューと多くの相互作用があったことで，知識が少し操作的なものになった．

この過程を具体的に示すと，タク・サヤカは，まず点 A’を定め，そこを中心に半径 AB の円弧をかいた．次に線分 BC を写し取ることを試みるのだが，コンパスの針をどこに刺していいのか分からず断念した(No.94, 96)．つまり，線分 AB の距離をもったコンパスを用いて円をかくことを試みるのだが，ワークシートからはコンパスの針を刺すべき位置（交点）がないという期待に反する情報が返ってきた．これは，先ほどかいた点 A’を中心とする半径 AB の円弧（⌒D’E’）の図がフィードバックになっていたと言える（図 3，なお図 3 において，この段階ではまだ弧 F’G’ はかかれていない）. おそらく，コンパスの針を刺したり，線をかいたりするには点が定まっていなければかけないという認識があり，できなかったのであろう．

88	サヤカ	**コンパス．3 つの長さが分かればいけるから.**
93	サヤカ	で，次はこの B のところで・・・B が底辺になるんだから
94	サヤカ	**あれ待って，分んなくなりそう。ここから C の方がいいんだよ多分.**
95	タク	C？はい.
96	サヤカ	**ごめんなさい．私の選択ミスだ.**

次にタク・サヤカは，点 A’から半径 AC の円弧（⌒F’G’）をかいて，点 C’の位置を探した． 2 人は既にかかれている半径 AB の円弧と，今かいている半径 AC の円弧が重なると考えていた（No.104，105）．しかし，どこかで円弧が重なることを期待しているのだが，いくら円弧を延長しても重ならない（No.110, 113)．これは 2 人にフィードバックが生じている状態であり，かいた図がフィードバックになっていた（No.113,114）.

98	サヤカ	ここ（点A）から C（半径 AC の円弧をかく）
99	サヤカ	（点 C が）**このどこかになるのは分かっているんだよね**
100	タク	うん。このどこからでも。
101	サヤカ	あっ，もっとひいて
102	タク	全体的に？
103	サヤカ	じゃない？なんかそんな気がしない？
104	タク	（点 A を中心にかいた半径 AB の円弧と）**どっか重なるんじゃない？**
105	サヤカ	そう。重なるところが一番下かなって。
110	サヤカ	えっと，**AAA。A でもっと延ばして。**
113	タク	ここら辺？**あっダメだ。きれいに重ならない。**
114	サヤカ	え一嫌だ。
122	タク	**線ひいとけば適当に**
127	サヤカ	**そう，そうじゃんね？タクの言うとおりだ．今のナイス.**

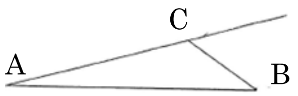
このフィードバックが 2 人をストラテジーの変更へと導いた．どうすればよいか考えた結果，適当に線をひけば良いかもしれないというアイディアが生まれた（No.122，127)．このストラテジーの背景には，円は中心から等距離の点の集まりであるという数学的性質があると思われる. このストラテジーにより，その後はスムーズに解決へ至った．

②3 時間目のまとめの場面

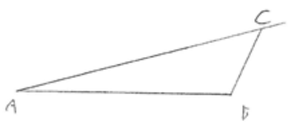
3 時間目の後半では，教師が主導となり三角形が一意に決まる条件について，三角形の 6 つの要素から 3 つを用いる計 6 つのパターンを取り上げ，1 つずつ検証した．以下ではそのときの 1 場面である「2 辺と 1 つの角」が分かれば三角形は 1 つに決まるかどうかということを検討している場面を取り上げる．教師は，「こういう場合．2 つの辺と，さっきはその間って言った．1 つの角だったらどうなる？」と発問した．そして，前日のカードゲームの話をし，あるペアが【BC＝1.9 ㎝，

AB＝5.6 ㎝，∠A＝15°】という手札になったことを紹介した．そして,「まさにこれと同じ状況なんだけど，この場合作図できるかどうか…やってみてください」と課題を出した．

リョウ・ユカのペアは，できると考えこの条件で三角形をかいた（図 4（a)）．なお，前の席の S1･S2 のペアがかいたものを図 4(b)に示す．両方のペアは，お互いに自分は正しい三角形をかいたから相手も同じものをかいているだろうと考えていた（No.139，140）．しかし，お互いに図を見せ合うと，期待に反して自分の図と相手の図が異なっていた（No.142，143）．つまりフィードバックが生じた．



（a）リョウ・ユカ



（b）S1・S2

図 4 「2 辺と 1 つの角」の条件でかいた図

139	S1	これできるでしょ？
140	リョウ	できたよ.
141	S1	できるよね？
142	リョウ	えっそんな風になんかならないよ．ならない，ならない 絶対ならない.
143	S1	なるなるなるなる.

フィードバックがあったことで，彼らは自分のかいた図の辺や角の大きさが間違っていなかったか，定規や分度器を用いて確認し始めた．しかし，確認した結果，角や辺の大きさは正しかった．どちらか一方が図をかき間違えたと思っていた彼らにとって，新たにミリューから返ってきたこの情報もまた期待に反する情報,つまりフィードバックとなった．このフィードバックは，リョウへ再度三角形をかいて確かめるという働きかけを促した．その結果，またも同じ図が完成し，自分がかいた図はやはり正しかったという認識を強くした.ここではフィードバックにより,「なぜ,両者のかいた図が異なるのか，どちらの図が正しいのか？」という問いが，教師からではなく，自らがミリューと相互作用する過程で生まれてきた．このことは，問題に対する責任を生徒が持っていたことを意味し，うまく委譲が生じた結果だと考えられる．

以上，2 つの具体例を示したが，どちらも教師があたかもいないかのような状況で，生徒はミリューとの相互作用を行っていた．つまり,亜教授学的状況が生じていたと言える．また，フィードバックがあったことで，自らの方略を変更する場面も確認できた．

（2）知識状態について

3 時間の授業を通して，知識状態についての変化も見られた．例えば，当初三角形の決定条件の知識が曖昧であったためすぐに三角形がかけなかったり，三角形をかく上で必要のない角の大きさを求めたりしていた．そういった状態から,「一辺とその両端の角」の条件や,「辺や角の位置関係」に関する知識等が徐々に顕在化してきた．更に，上述した「三角形は 3 つの辺が分かれば一意に定まる」という理論的な知識から操作的な知識への変化もみられた．しかしこれらの知識は，全てが亜教授学的に定式化，妥当性判断されるまでには至らなかった．

また，この教授実験を通して，生徒の三角形の決定条件に関する知識状態が，非常に曖昧なものであることが分かった．例えば，1 時間目において，タク・サヤカは「1 辺とその両端の角」がわかっているのにも関わらず,もう 1 つの角を求めてから作図に取りかかった．他にも，リョウ・ユカは 2 時間目において,「3 つの辺」のカードが手札にそろっているのにも関わらず，カードの交換をした．今回は 1 つの事例として，リョウ．ユカの 2 時間目の活動を取り上げ，知識状態の変化の概要を以下に示す．

①2 時間目のカードゲームの場面

2 時間目のカードゲームにおいて，リョウ・ユカの知識状態がどのように変化したの

か分析した．

ゲーム１回目は，ひくカードを３枚と宣言し，【CA＝5.8cm，∠B＝70°，∠C＝75°】の３枚のカードをひいた．手札は「１辺と２角」の条件がそろう形となった．この手札を見てユカは，三角形をかくことができないと考えていた．一方，リョウはかけるかもしれないと考え，三角形の内角の和の公式を利用して∠A を求め，試行錯誤することで正解となる三角形を完成させた．

ゲーム２回目は，同様にひくカードを３枚と宣言し「3 つの角」が手札にそろった．これを見て，ユカは長さが分からないからかけないと考え，リョウは「3 つの要素が分かっていれば三角形はかける」と考えた（No.271，272）．リョウがこのように考えた理由は，おそらくゲーム１回目の成功体験からきていると思われる．そこで，今回も工夫すれば解決できると考え，分度器や定規を用いて角度を測ったり線をひいたり色々と試行錯誤を行った．しかし時間切れとなり三角形を完成させることはできなかった．従って，完成できなかったということが，三角形は「3 つの角」が分かればかける（一意に決まる）という期待に反するフィードバックの１つになったであろう．

271	ユカ	**長さ分かんないじゃん.**
272	リョウ	**3 つが分かればいいんだよ.**
273	ユカ	本当に？
274	ユカ	無理じゃないだってー
275	S1	無理だよー
276	ユカ	**これ永遠に続いちゃう**

ゲーム２回目は正解となる三角形がかけなかったため，ルールに従い「ゲームの流れ②」へ戻り，今の手札のままゲームを再開した．リョウ・ユカは新たにカードをひくことはせず，手札の∠A のカードを１枚交換することにした．そして CA のカードを得ると，偶然にもゲーム１回目と同じ手札になった．これにより１回目と同様の方法で三角形を完成させた．

続いてゲーム３回目は教師の指示で使用するカードを違う種類のものと交換してから行った．リョウ・ユカは初めに引くカードを２枚と宣言し，【AB，BC】が手札にそろった．このことから，特定の２つの要素が分かれば三角形がかけるのではないかといった期待がみられる．つまりこれは，上では３つの要素が必要だと言っているが，それが三角形をかくための最少の数であるという確信はなく，曖昧な知識状態であることを表している．そしてこの手札ではかけないと判断した２人は，手札を交換できるターンで BC のカードを捨て，新たに１枚カードを引いた．そのカードは CA であり，交換する前と同じ「2 つの辺」の組み合わせであった．２人はこれではかけないと判断し，図をかくことなくゲームを断念した．この時，ユカは２つの要素では三角形はかけないと考えていた（No.565）. No.691，692 は授業終り間際に，リョウとユカがこの時のことを振り返って話していたものである．これより，リョウは２つの辺ではかけないが「１辺とそのどちらか一方の角」が分かればかけるかもしれないと考えていたことが分かる（No.692）．しかし運が悪く「１辺と１つの角」といったカードは出てこなかったため，リョウはその方略を試すことなくゲームを断念した．つまりリョウの「１辺とそのどちらか一方の角」が分かれば三角形がかけるということに対するフィードバックは生じなかった．

557	ユカ	2 枚なの？
558	リョウ	**2 枚**
564	リョウ	だめだめだめ 2 枚.
565	ユカ	**3 枚にしようよ**
…		
691	ユカ	当たり前じゃん. 2 枚とかひくからでしょ. 3 枚ひいとけばよかったじゃん最初から.
692	リョウ	**1 辺の長さと，その角度が分かっちゃえばー，あといいなって思ったんだけどー**

またも正解となる三角形がかけなかったため，ルールに従い「ゲームの流れ②」へ戻りゲームが再開した．つまり，今の【AB，CA】の手札のまま，更に何枚カードをひくか宣言するところから始まった．リョウ・ユカは 1 枚と宣言し，BC のカードを得た．ここでカードを 1 枚追加した理由は，おそらく 2 枚と宣言してやってはみたものの，やっぱりダメかなという思いが強くなったためであろう．これにより手札は【AB，BC，CA】となった．本来，この手札は三角形を一意にかくことができる状況であるのだが，リョウ・ユカは「3 つの辺」では三角形はかけないと考え手札を交換した（No.618，621）．その理由はおそらく，ゲーム 2 回目において「3 つの角」の条件で三角形を完成させられなかったこと，及び先ほど「2 つの辺」でかけなかったことで「角だけ」もしくは「辺だけ」ではかけないという知識状態にあるためであろう．2 人は AB のカードを捨てることで，∠B のカードを得た．手札は【BC＝1.9cm，CA＝4.1cm，∠B＝35°】となった．「2 辺と 1 つの角」の情報のみでは三角形は一意に決定しない場合があるのだが，今回は∠B が分かり CA≧BC であったため，この条件でも一意に決まる．しかし，リョウ・ユカはこのようなことは考慮せず，この手札を見てすぐにかけると判断した（No.624）．つまり，「2 辺と 1 つの角」がわかれば，どんな場合であっても三角形がかけると考えており，位置関係を考慮に入れていないのである．

618	リョウ	おーほほえー，もう嫌だー
619	ユカ	ふふふふ
621	リョウ	チェンジ
624	リョウ	あーよかったー

授業の終わりに,「どんなときに三角形がかけたか」や「授業を通してわかったこと」などをワークシートに記述した．リョウ・ユカのワークシートを図 8 に示す．このワークシートに書かれた内容をまとめると次のようになると考えられる．「三角形をかくためには 3 つの要素が必要であり，且つ辺と角の要素がそれぞれ最低 1 つは必要である」．2 時間目の授業はこういった形で終わった．

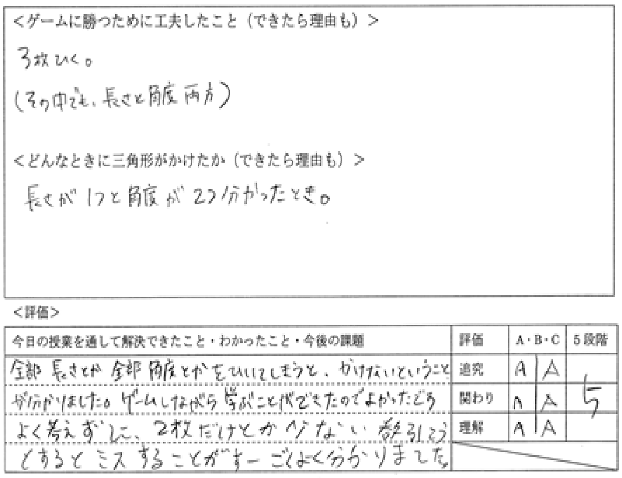


図 8　リョウ・ユカのワークシート

3 時間目は授業後半で，三角形の辺や角の位置関係についてクラス全体で妥当性判断を行う場面があった．そこでは教師主導で授業を進めているものの，生徒は与えられた課題を自分の問題として捉え，ミリューと相互作用をしていた．この場面において，前節で述べたように「2 辺と 1 つの角」についての検討も行われた．そしてリョウ・ユカは 2 時間目では気付けなかった「2 辺と 1 つの角」では三角形が 2 つできるということに気付いた．重複になるかもしれないが，生徒は教師の介入はあったものの，自らがかいた図と相手がかいた図からフィードバックを得ていた．そして，これは主体的に自分の持っていた考えが変わる契機になった．

以上のように，三角形の決定条件についてのリョウ・ユカの知識状態は，曖昧なものから，2 時間目で少し定式化され（期待されたものとは異なるが)，更に 3 時間目で教師の与えた課題の解決により明確なものへと変化していた．

6. TDS を用いて設計した授業の検証

中村（2013）では，TDS から学習の要件を

抽出し，その要件と筆者の教育的経験に基づき指導案を作成した．本章では，指導案作成時に意図した内容が，実際の授業の中でどれだけ表出していたのかを検証する．なお紙面の都合上，以下では検証結果の概要を示す．詳細は中村（2014）を参照されたい．

6.1 指導案と授業との分析結果

指導案作成時に意図したことと実際の授業を照合した結果，想定通り生じたことと，想定通りいかなかったことがあった．想定通りにいったことは，生徒とミリューとの多くの相互作用があり，至るところで亜教授学的状況が確認できたということである．具体的には問題解決の過程において，生徒は多くの場合，三角形の決定条件を必勝法として暗黙裡に使用していた．また，教師の期待を探るといった行為はなく，問題を自分自身のものとして捉えていた．これらは，やるべきことが明確で，回答の正誤判断を自ら下せ，フィードバックがあったことで自らの考えを変更しながら取り組むことができたからだと考えられる．一方，想定通りにいかなかったことは，定式化の状況や妥当性判断の状況を亜教授学的に実現することであった．以下，3 つの例を挙げて具体的に述べる．

1，3 時間目では，課題として欠けた三角形を用いるという設定にした．これは学習の要件で示した「①必要性」を生じさせることを意図したものであった．欠けているからこそ特定の条件（例えば，1 辺とその両端の角）でかく必要性が生まれると考えた．

実際の授業では，上述した 1 時間目の授業のように，課題 1 では「1 辺とその両端の角」を，課題 2 では「3 辺」の条件を課題解決の必勝法として使用していた．つまり，三角形の決定条件を使用する必要性が生じていたと言える．

2 つ目の例は，2 時間目のカードゲームのルールにおいて，途中でカードを交換できる場面を設けたことである．これは「①必要性」と「②相互作用」が生じることを意図したものであった．ゲームの初めで，仮に 3 枚のカードをひいたとする．すると，その手札で正解となる三角形がかけるかどうかを考えることになる．また，もしかけないと判断した場合，どのカードを交換すべきかと考える．これは即ち手札に三角形の決定条件をつくることを考えることになる．

実際の授業では，上記で意図したことは授業の中でも生じていた．一方で，リョウ・ユカは手札に 3 つの辺がそろっていたにも関わらず交換してしまった．その原因は，このような考えに対するフィードバックがなく，妥当性が判断できなかったこと，及び決定条件は複数あり，3 辺の条件を用いなければならないという必要性が薄かったことにあると考えられる．

3 つ目の例は，2 時間目のワークシートにおいて，「どんなときに三角形がかけたか」などを記入させる欄を設けたことである．これは「①必要性」を生じさせ，知識を「⑦定式化」させることを意図したものであった．上記のような発問は試行錯誤の状況から定式化の状況へ場面を変更させるものである．また，これまで試行錯誤の状況で暗黙裡に使用していた知識を紙に記述するために言語化する必要性が生じると考えた．ただ，この必要性はミリューとの相互作用からではなく，教師が強制したものとなっている．

実際の授業では，リョウ・ユカの例にみられるように，当初リョウは「三角形は 3 つの要素が分かればかける」という知識状態でゲームに取り組んでいた．その後，ミリューと相互作用する中で知識状態が変化し，最終的には「三角形をかくためには 3 つの要素が必要であるが，角だけの場合や辺だけの場合はかけない」という知識状態に至った．ミリューから望ましいフィードバックがなかったため，この知識は期待されたものではなかった．しかし，定式化という視点からすれば，図 8 よ

り，2 人が授業の中で獲得したアイディアは十分定式化（言語化）されていたと言える．一方，本稿では紙面の都合上示すことができなかったが，タク･サヤカのペアにおいては，定式化されつつあった辺と角の位置関係はワークシートには記述されず，定式化を促すためのワークシートが十分機能しなかったという結果となった．

7. おわりに

TDS を用いて作成した授業において，ある程度亜教授学的状況が生じていたことから，TDS を用いることで，生徒がアイディアを出し，修正し，試行錯誤しながら知識を構築していくといった主体的な学習が生じる授業を作ることができるということが分かった．TDS は授業設計において，どのような授業を作れば，もしくはどのように授業を修正すれば主体的な学習が生じるのか，そのための示唆を与えてくれるのである．

一方，TDS の限界は，授業が TDS の示唆する要件を満たしているかどうかは分かるが，ゼロから授業を作る場合，どのような教材を作ればよいのかという具体的なアイディア（例えば，欠けた三角形を使うなど）は与えてくれないことである．ある程度授業設計者の教育経験や，直観に頼らざるを得ないのである．また今回，授業を構成・設計し，教授実験，及び授業データの分析・検証をした結果，試行錯誤の状況を亜教授学的に実現させることはできた．しかし，その他の定式化の状況，妥当性判断の状況を亜教授学的に実現することは難しかった．すなわち，TDS がいくつかの考慮に入れる知識の形成過程を実現することは難しく，具体的にどうすればよいのかは分からなかったのである．

謝辞

本稿で扱った授業を設計及び実践するにあたりご協力をいただいた長野県中学校教諭下平将揮先生に心から感謝致します．

引用・参考文献

Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. In R. Biehler, et al. (Eds.) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp.27-39), Dordrecht: Kluwer.

Balacheff, N. (1991). Benefits and limits of social interaction: The case of teaching mathematical proof. *Mathematical Knowledge*. Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situation in mathematics: Didactique des mathématiques 1970 – 1990*. Dordrecht: Kluwer.

石川実・宮川健(2012).「「手続きの説明」の学習における伝言ゲームの可能性」．日本数学教育学会誌. 94 (11), 2-11.

中村圭貴(2013).「授業設計における教授学的状況理論の可能性と限界」．上越数学教育研究, 28, 131-140.

中村圭貴(2014).「授業実践における教授学的状況理論の可能性と限界」．上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文（未公刊）.

宮川健 (2009).「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格」．数学教育学論究, 94, 37-68.

文部科学省（2008）．「中学校学習指導要領解説数学編」．教育出版．