上越数学教育研究，第29号，上越教育大学数学教室，2014年，pp.43-54.

優れた子どもの問題解決過程の分析

- ジュニア算数オリンピックのパズル問題に焦点を当てて -

塚田　朋美
上越教育大学大学院修士課程 2 年

1　はじめに

筆者は，優れた子どもの算数・数学の思考過程がいかなるものか,特に問題解決過程に焦点を当て，数学的知識や技能の側面から明らかにすることを目的に研究を進めてきた．このことに関心をもった理由は，優れた子どもの特性を知ることで優れた子どもの育成の方法，数学の指導について示唆が得られると期待したからであった．

研究を進める中で，優れた子どもに関する先行研究を調べた．その結果，海外においては，優れた子どもについての研究が多く，数学教育についての世界最大の国際会議である ICME の TSG（Topic Study Group）が今日の研究課題を整理していた(Leikin, 2008). そこでは,「優れた子ども（gifted students)」と「創造性（mathematical creativity)」がキーワードとなっており，それら自体がいかなるものかを知ることが研究課題となっていた．つまり，両者とも明確に定義されているわけではないのである．そこで筆者は,「優れた子ども」をジュニア算数オリンピックの全国大会に出場した子どもたちと仮定し，彼らの思考過程を明らかにしようと研究を進めた．これは,「優れた子ども」を仮定せずには，研究を進めようがないからである．

これまで, 2012 年度ジュニア算数オリンピック全国大会, 2013 年度算数オリンピック全国大会での子どもたちの問題解決過程をビデオ撮影しデータを収集した．塚田（2013）では, 2012 年度の図形領域の問題に対する子どもの解決過程を分析した．特に，図形把握の視点から，子どもたちがどのような図形把握ができるのか検討した．その結果，複雑な図形においても重なった図形を視覚的に切り替えて必要な部分に焦点を当てるという操作ができること，図形性質から推論的に図形を捉えることができることなどが明らかになった.

本稿では，2012 年度の数領域の問題（パズル問題）に対する優れた子どもの問題解決過程を分析し，その特性を明らかにする．パズル問題を選定した理由は，それが論理力や創造力を育てると謳っている問題集や，ジュニア算数オリンピックの問題によく出題される問題であるということにある．また，問題解決過程を捉えるに当たって，今回は，Balacheff & Gaudin (2002) のコンセプションモデルを分析ツールとして用いる．このツールを選択した理由は，数学の個々の領域に特化せずに子どもたちの数学的知識や技能のモデル化を可能とし，パズル問題の際にも適用可能だからである．

本稿の構成は以下のとおりである．まず分析の準備として，データの概要と Balacheff & Gaudin（2002）のコンセプションモデルの概要を示す（第 2 章)．次に，今回選択したジュニア算数オリンピックの問題を分析する（第 3 章)．具体的には，その問題ではいかなる解決過程が可能であり，その過程ではいかなるコンセプションが必要となるのか明らかにする．この分析結果は，実際のデータにおいて子どもの解決過程を特徴づける枠組

みとなる．そして，2012 年度の全国大会で収集したデータを分析することにより，優れた子どもたちが実際にいかなる問題解決を行い，いかなるコンセプションをもっているのか明らかにする（第 4 章）．さらに今回は，同様の問題を一般の公立小学校の子どもたちにも解答してもらったため，優れた子どもと一般の子どもの問題解決過程を比較する（第 5 章）．そして，今回の分析結果を踏まえ，優れた子どもの特性について考察し本稿を終える（第 6 章）．

2 分析の準備

2.1 データの概要

今回使用するデータは，2012 年 6 月 30 日に行われたジュニア算数オリンピックの全国大会で収集したものである．この全国大会に参加した児童は 226 名で，そのうち小学 5 年生は 188 名，小学 4 年生は 38 名であった．データとして収集したものは，配布された問題用紙と，児童の解決過程を撮影したビデオデータである．ビデオカメラは，２台あり，１台で１人の子どもを固定して撮影し，もう１台で複数の子どもたちの解決過程を撮影した．そのため２台目のカメラで撮影したビデオデータからは解決過程を詳細にすべて再現することはできない．しかし，最終的なものは多く撮影することができたため，解答用紙や問題用紙に書き込まれた記述から解決過程がある程度特定できる．今回分析するデータは数領域の 1 問についてのものである．その問題は以下のとおりである．

【問題 1】

		6
3		
0		

たて，横，ななめの 3 つのマス内の数字の和がすべてことなるように 0～8 を各 1 個ずつ入れます．灰色の 4 つのマスには奇数の数字を入れます．いま，0，3，6 が図上のように入っています．このとき，残りの 1，2，4，5，7，8 を入れなさい．

2.2 Balacheff のコンセプションモデル

Balacheff によるコンセプションモデルはある場面で活動している子どもの知識をモデル化する道具である．コンセプションモデルでは，次の四つの要素(P, R, L, Σ)で子どもの知識を特徴づける．

- P は、問題の集合（A set of problems）
- R は、操作の集合（A set of operators）
- L は、表現体系（A representation system）
- Σ は、制御構造（A control structure）

ここで，P は「問題の集合」であり，R は P を解決する「操作の集合」である．そして，L は問題の解決の際に用いられる図的表現など，記号が構造化された「表現体系」である．Σ は「制御構造」であり，ある問題に対して答えを得た際，その答えが正しいか否かを判断するものであるとともに，用いた操作の選択を可能とするものである．

このように，4 つの要素を知識の特徴付けに用いる理由は，Balacheff & Gaudin (2002) や宮川（2002）からすれば，次のように考えているからである．ある問題をある何かしらの操作（方法）を用いて解決したとする．その際，その操作はその問題に応じたものであり，その問題だからこそ，その操作が用いられたと考える．そして，その操作がなされ，解決したと考えるのは，その操作とその結果が正しいと判断されているからである．すなわち，その操作とその結果の背後には何かしらそれが正しいと判断するものが存在するはずである．それが制御構造である．さらに，同じ問題でも表現が異なれば，用いられる操作も異なり，正しいと判断されることも異なる．そのため，知識状態を特徴付ける一要素として表現を考慮に入れる必要があるのである．

3　予想される問題解決過程とその分析

本稿では，前出の子どもが行うと予想される複数の解決過程を，解決に至らない場合も含め特定した．このパズル問題の分析結果は図 1 のとおりである．以下では，代表的な 2 つの問題解決過程の詳細を示すとともに，この解決過程で必要となるコンセプションの要素を特定する．

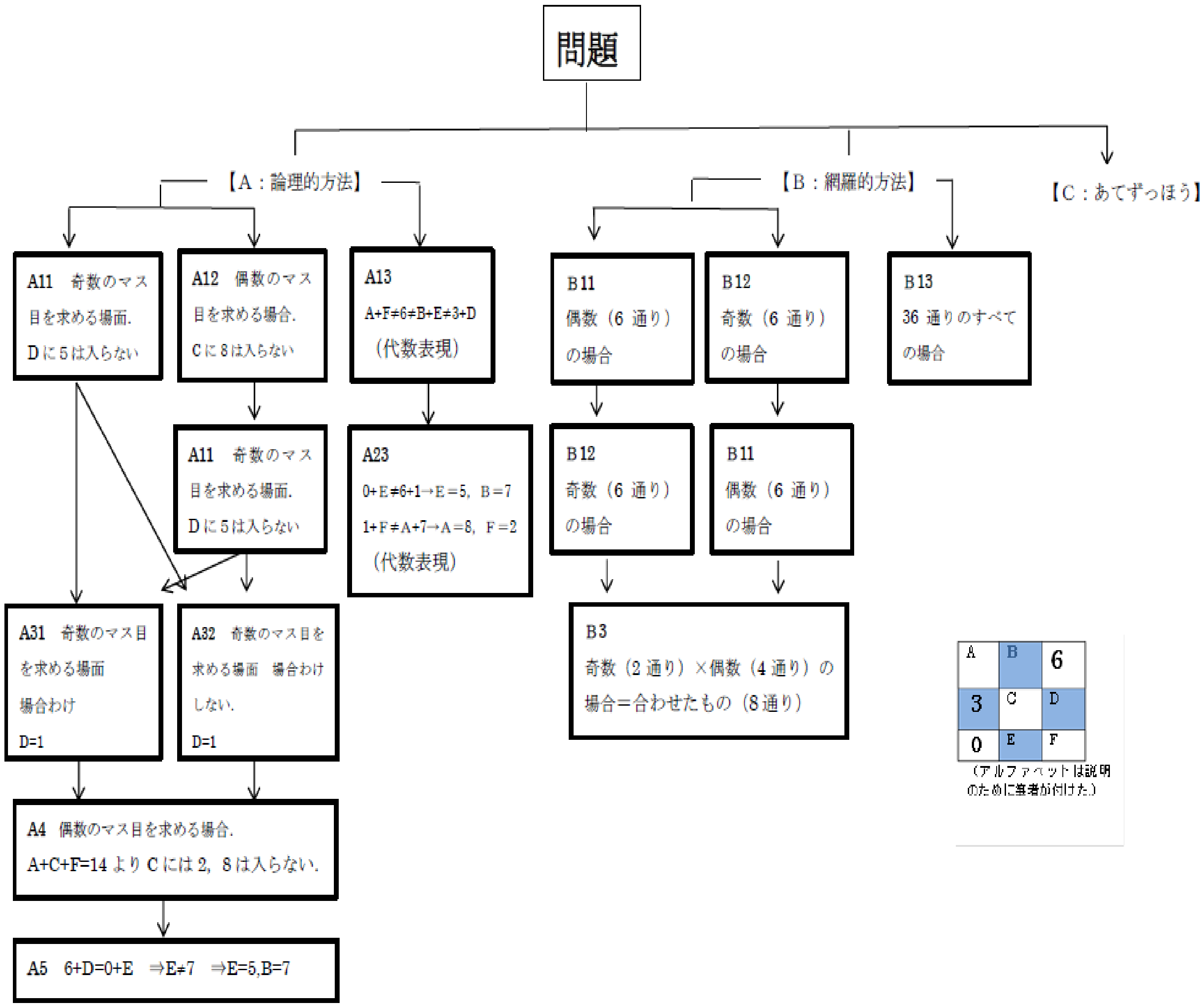


図 1 では解決過程をフローチャートの形で示した．解決過程は，A：論理的方法，B：網羅的方法，C：あてずっぽうの 3 種類の方法に大きく分類されるとし，それぞれの方法で可能な解決過程をさらに複数示した．ただし，このパズル問題ではいずれかの解決過程を最後まで辿らないと正答を得られないという訳ではない．図 1 のような流れを順序良く辿らなくとも，論理的方法や網羅的方法で一部を解決してから当てずっぽうを用いて正答することなども可能である．

3.1　A：論理的方法の解決過程とその分析

Aの論理的方法には，主に3つの解決過程がある．図1を参照してその解決の流れを示す．一つ目は「A11→A31またはA32→A4→A5」となるもの，二つ目は「A12→A11→A31またはA32→A4→A5」となるもの，三つ目は「A13→A23」となるものである．以下ではそれぞれの解決過程を具体的に示すとともに，そこで必要となるコンセプションを検討する．

（1）問題解決過程「A11→A31→A4→A5」

一つ目の「A11→A31→A4→A5」の解決過程は算数オリンピック主催者側が模範解答として挙げた解決過程[1]と同様のものである．この解決過程を模範解答例を用いて示す．以下は，解答集から引用したものであり，番号は筆者が加筆した．

A	B	6
3	C	D
0	E	F

（アルファベットは説明のために筆者が付けけた.）

灰色のマスには，奇数がはいるのでB,D,Eには1，5，7が入ります．ここで，全ての和が異なるので, B+C+Eと3+C+Dも異なります．つまり，B+Eと3+Dは異なります．よってDには5は入りません．**(A11)**

■D=7の場合

BとEには1と5が入ります．よってB+E=6となります．すると0+C+6=B+C+Eとなってしまい，題意を満たしません．

■D=1の場合

BとEには5と7が入ります．また，A+C+F=2+4+8=14です．そのため，Cが2の場合は，B+C+E=14となり，Cが8の場合は0+8+6=14となり題意を満たしません．よってC=4と決まります．**(A31)**

次にE=7の場合，6+D=0+Eなので，6+D+F=0+E+Fとなってしまいます．よって，E=5と分かります．このことから，残りの7はBに入ります．残ったAとFを考えると，A=8，F=2の時のみ題意を満たします．**(A4，A5)** ■

(2) 解決過程「A12→A11→A32→A4→A5」

この二つ目の解決過程と一つ目の過程との主な違いは，場合分けを用いて解答を得るか（A31），場合分けを用いずに解答を得るか（A32）という点である．その解答例を図1を参照しながら示す．

はじめに偶数の組み合わせを考えます．白いマスには，偶数が入るのでA,C, Fには2，4，8が入る．つまり，A+C+F=14となる．また，0+C+6とA+C+Fは和が異なる．このことから，0+6とA+Fは異なる．よって，AとFのどちらかに8が入ることになる．つまり，Cには8は入りません．**(A12)**

次に奇数の組み合わせを考えます．これは先ほどの算数オリンピック側の解答と同様の解法です. B+C+Eと3+C+Dは異なることから，B+Eと3+Dは異なります．　よって，Dには5は入りません．**(A11)**

その後，0+C+6とB+C+Eが異なることを考えます．つまり, 0+6とB+Eは和が異なるためには，（B，E）は（1，5）の組み合わせにはなりません．よって，Dには1か5が入ります．さらに，前段階でDに5が入らないと分かっているため, D=1となります. **(A32)**

以下，その後の解決過程は先に述べた模範解答例（A4,A5）と同様の過程を辿る．**(A4, A5)**　■

(3) 解決過程「A13→A23」

最後に「A13→A23」と進む解決過程を示す．この解決過程は文字式を用いる．まず，A13ではB+C+E≠3+C+D ≠A+C+F≠6+C+0のCを含む和に着目する．その際にどの式の

[1] これは，全国大会後に参加者に配布された解答集を参照したものである．

C を除いても関係は変わらないことから，$B+E \neq 3+D \neq A+F \neq 6$ の関係が成り立つ．よって，$B+E \neq 3+D$ から D には 5 が入らないことが分かる．さらに，$B+E \neq 6$ から D＝1 と決定できる．また，$A+F \neq 6$ より，C には 8 が入らないことも分かる．

そして，A23 では C を含まない和である $0+E+F \neq 6+1+F$ より $0+E \neq 6+1$ から，E＝5，B＝7 と決定できる．また，$A+7+6 \neq F+1+6$ より $A+7 \neq F+1$ から，A＝8，F＝2 と確定できる．このように，パズルの中ではなく，文字式を用いて解答することも可能である．

(4) コンセプションの視点から A の分析．

A の解決過程ではいかなる知識や技能が必要となるだろうか．以下では，論理的方法の解決過程における各場面をコンセプションの 4 つの要素で記述する．

○A11 の場面

はじめに行う過程の A11 の場面は「p1：奇数のマス目の値を見つける場面」である．これは $B+C+E \neq 3+C+D$ より $B+E \neq 3+D$ となることから，B+E と 3+D に入る奇数の組み合わせを考え，和が等しくなる組み合わせがあるかを確認する．この一連の操作が p1 を解決する操作ｒ1 である．この操作を施すことにより D に 5 が入らないという結果を得る．ｒ1 によりこの結果を得る過程では，(B,C,E) の縦の和と（3，C，D）の横の和に注目し，両者に含まれる C を除いても，二つの和の関係は変わらないと判断している．ここから，等式の性質に関する考えが制御構造σ1 として用いられているといえる．もちろん，この考えは実際に文字を用いた式についての考えではなく，パズルのマス目における考えであるため，通常の等式の性質とは異なる．すなわち，あくまでもパズル表現ｌ1 の中でなされる一連の操作なのである．

p1：奇数のマス目の値を求める場面
ｒ1：奇数の組み合わせを試行するための一連の操作
ｌ1：パズル表現
σ1：等式の性質に関わる考え 右辺≠左辺（$B+C+E \neq 3+C+D$）で同じ数（C）を引いても両辺の関係は変わらない．

○A12 の場面

A12 の場面は「p2：偶数のマス目の値（C）を見つける場面」である．ここでは斜めの和である $A+C+F \neq 0+C+6$ に着目する．偶数が入る(A,C,F)に（2，4，8）を入れると A+C+F＝14 になることから，0+C+6 が 14 になる C を見つけ出すという確認をする．この一連の操作が p2 を解決する操作ｒ2 である．この操作を施すことにより C に 8 が入らないという結果を得る．ｒ2 によりこの結果を得る過程では，A+C+F にはどのように（2，4，8）が入っても和が変わらないと判断する必要がある．こういった考えを詳細にみていくと，A＋C を抜き出したときに（2，4）を代入すると 2+4 となる．このとき，4+2 としても値は変わらないと判断しているため，数を代入した後に交換法則的なアイデア（A＋C＝C＋A）の制御構造σ2 が用いられているといえるだろう．この考えは先ほどの A11 の場合と同様に，実際に文字を用いた式についての考えではなくパズル表現での考えである．そのため，通常の交換法則の考えとは異なる．そのため，σ2 は「交換法則的なアイデア」とした．

p2：偶数（C の数字）を求める場面
ｒ2：(A,C,F)の和が 14 から 0+C+6 と A+C+F に矛盾が生じる組み合わせを導く一連の操作．
ｌ1：パズル表現
σ2：交換法則的なアイデア

○A31 の場面

A31 の場面は A11 を経た後の「p3：奇数のマス目の値を見つける場面」である．ここではすでに D に 5 が入らないことがわかっている．そのため，まず D に 7 を入れる．すると，B と E に（1，5）が入るため，B+E と 0+6

に矛盾が生じることを確認する．この一連の操作が p3 を解決する操作ｒ3 である．この操作を施すことによりDには1が入ることが決定する．ｒ3 によりこの結果を得る過程では，Dに（1，7）を当てはめたときに，どちらかに矛盾が生じれば良いと判断しているため，背理法的な考えが制御構造σ31 として用いられているといえる．

また，B+E と 0+6 に注目して矛盾を導くには，パズル表現から B+E と 0+6 のように縦の和と斜めの和を比較する操作ｒ3 がなされる．こういった操作を行うためには奇数のマス目の値を求める場面でも偶数のマス目に注目するということが必要となる．つまり，これは「異なった種類の条件を同時に考える」ことが制御構造σ32 として必要となるといえよう．

p3：奇数マス目の値を求める場面
ｒ3：D=7 を入れると B+E と 0+6 に矛盾が生じる一連の操作
ｌ1：パズル表現
σ31：背理法的な考え．
σ32：異なった種類の条件を同時に考える．（偶数）

〇A4 の場面

A4 の場面は「p4：偶数のマス目 C の値を見つける場面」である．この場面では A+C+F≠B+C+E に着目する必要がある．A12 と同様，(A,C,F)に(2, 4, 8)を入れると A+C+F＝14 となることから，B+C+E が 14 になる C を見つけだす．この操作を施すことにより C に 2 が入らないという結果を得る．この結果を得る過程では，先ほどの制御構造σ2 で述べたような交換法則的なアイデアが用いられているだろう．また，A+C+F と B+C+E に注目して矛盾を導くには，縦の和と斜めの和を比較する操作が必要となる．こういった操作を行うためには偶数のマス目の値を求める場面でも奇数のマス目に注目するということが必要となる．つまり，これは「異なった種類の条件を同時に考える」ことが制御構造σ32 として用いられるといえよう．

p4：偶数のマス目（C）を求める場面
ｒ4：C＝2を入れると B+C+E と A+C+F に矛盾がいたる一連の操作
ｌ1：パズル表現
σ2：交換法則的なアイデア
σ32：異なった種類の条件を同時に考える．（奇数）

〇A5 の場面

最後の A5 の場面は「p5：奇数のマス目の B と E の値を決定する場面」である．すでに，D＝1 と確定し，B と E には（5，7）の組み合わせが入るとわかっている．そして，0+E+F≠6+D+F より 0+E≠6+D となることに焦点を当てて，E の値を確認する．この一連の操作が p5 を解決する操作ｒ5 である．この操作を施すことにより E には 5 が入らないという結果を得る．この結果を得る過程では，今まで焦点を当ててないマス目の和に着目するということが必要になる．つまり，「マス目の和の見方を変える」ことが制御構造σ5 として必要となるといえよう．

p5：奇数のマス目（B，E）を求める場面
ｒ5：奇数の組み合わせを試行するための一連の操作
ｌ1：パズル表現
σ5：マス目の和の見方を変える．

3.2　B の問題解決過程とその分析

B の問題解決過程はある場面の場合をすべて書き出し網羅的に解決していくものである．この解決方法においても複数の過程が可能であり，図 1 では「B11→B12→B3」，「B12→B11→B3」，「B13」の 3 つの過程を示した．まず，「B11→B12→B3」の解決過程の詳細を図 1 を参照しながら示す．

はじめに奇数のマス目の値を求める場面を考える．このとき，（D，B，E）には（1，5，7）の数の組み合わせが入る．それを網羅的

に書き出すと｛(1，5，7)，(1，7，5)，(5，1，7)，(5，7，1)，(7，1，5)，(7，5，1)｝の6通りの場合が考えられる．それを，(3＋D）と（B+E）と照らし合わしたときに，和が等しくなる組み合わせが題意を満たさないため,Dに5が入る組み合わせは消去される．さらに，(B+E）と（6+0）と照らし合わせると，D に 7 が入る組み合わせも消去される．よって，残り 2 通りと絞ることができる．**(B11)**．次に，偶数のマス目の値を求める場面を考える．偶数の場合は，(A，C，F）に（2，4，8）が入る組み合わせを考えればよいので奇数と同様に6通りの場合が考えられる．それを，(A＋C＋F）と（6＋C＋0）と照らし合わせると，Cに8が入る組み合わせは題意を満たさないため消去される．よって，残り4通りに絞れる**(B12)**．そして，残りの奇数と偶数の組み合わせを合わせると 2×4＝8 通りの組み合わせを網羅的に書き出すことができる**(B3)**．

このように,「奇数の場面→偶数の場面→合わせた場面」と網羅的に書き出すことが可能である．他にも順序を変えて,「偶数の場面→奇数の場面→合わせた場面」という流れで解決することも可能である．それが，「B12→B11→B3」の流れである．そして，「B13」の解決過程は時間が掛かるだろうが，この問題のすべての場合 36 通りを書き出すという網羅的方法を示している．

(2) コンセプションの視点からBの分析

次にBの解決過程がいかなる知識や技能が必要となるか分析する．以下では，網羅的方法の解決過程に必要となる要素を特定する．その例として B12 の場面をコンセプションの4つの要素で記述する．また，他の場面は説明が重なるため概略を記すにとどめる．

○B12の場面

B12の場面は「p1：奇数のマス目の値を求める場面」である．ここでは B+C+E≠3+C+D より B+E≠3+D となることから,B+E と 3+D に着目し（B，E，D）に当てはまる数字のすべての場合を書き出し題意を満たさないものがあるかを確認する．この操作を施すことによりDに5が入る組み合わせは消去されるという結果を得る．この結果を得る過程では，A11 で用いられた等式の性質に関する考え（両者に含まれるCを除いても二つの対象の関係は変わらない）σ1 がここでも用いられているといえよう．さらに，B+E と 6+0 に着目し，すべての場合と照らし合わせる．この一連の操作も p1 を解決する r 11 である．この操作を施すことによりDに7が入る組み合わせも消去される. この結果を得る過程では，A13 で用いられたσ32 が必要となる. つまり，制御構造「異なった種類の条件を同時に考える」である．

そして，この解法は奇数のすべての場合を書き出すという操作 r 12 を基に結果を得ている． r 12 によりこの結果を得る過程では，すべてを書きだし可能性を絞ろうと判断しているため,「書き出してみよう」という考え素朴な制御構造σ13 として用いられているといえる．

また，こういった一連の操作はパズル表現ｌ1の中でなされている．

p1：主に奇数のマス目の値を求める場面
r 11：奇数の組み合わせを試行するための一連の操作
r 12：ある条件のすべて組み合わせを書き出す
ｌ1：パズル表現
σ1：等式の性質の考え (A=B　ならば，　A-C=B-C)
σ32：異なった種類の条件を同時に考える．(偶数)
σ13：書き出してみよう

○B11，B3の場面

B11 の場面は「偶数のマス目の値を求める

場面」である．また，B3 の場面は「B11 と B12 で残った場合の組み合わせを合わせて，正答を得ようとする場面」である．どちらの場面も B12 で示した「ある場面のすべての場合を書き出す」という操作 r 12 によって結果を得ているものである．この操作を行うための制御構造には，ある場面をすべて書き出せば可能性を絞ることができる，正答を得られるだろうと考え，つまり，「書き出してみよう」いう考え σ 13 が背景にあるといえるだろう．

4　実際の子どもの問題解決過程とその分析

ここでは，パズル問題に対する実際の子どもの問題解決過程を分析する．今回，パズル問題のデータとして収集できたものは 23 名のものである．しかしながら，筆者が歩きながらビデオカメラで撮影したため結果のみの映像が多い．その中でも解決過程が問題用紙に残されているものや，ビデオカメラで解決過程の流れが読み取れるものを選択し，分析した．以下では，正答に至っていた 2 名の解決過程を取り上げる．

4.1　正答を与えた問題解決過程（子ども T）

図 2 は子ども T のメモ用紙であり，ここに書かれていたパズル問題に関する記述を図 3，図 4 に書き起こした．図 2，図 3，図 4 を参照しながら子ども T の解決過程をみていく．子ども T は，はじめ，あてずっぽうの解決方法を試みている．これは，図 2 の左上をみると，当てずっぽうに数字を入れては消している筆跡から読み取れる．しかし，途中で奇数の場合のみに注目し始めていることが図 3 の右上のパズル表から読み取れる．そして，奇数の組（B,E）と（3，D）に着目して 6 通りの場合をすべて書き出している（図 4）．子どもTは奇数を求める場面を網羅的に書き出し，解答の可能性を絞ろうとしているのである．その後の解決過程はメモ用紙には書かれておらず分からないが，図 3 の右下の解答から，正答していることが分かった．子ども T の解決過程を図 1 のフローチャートを参照してみると，はじめは C のあてずっぽうの解法を試みて，次に B11 の網羅的な解法に思考が流れていることが分かる．

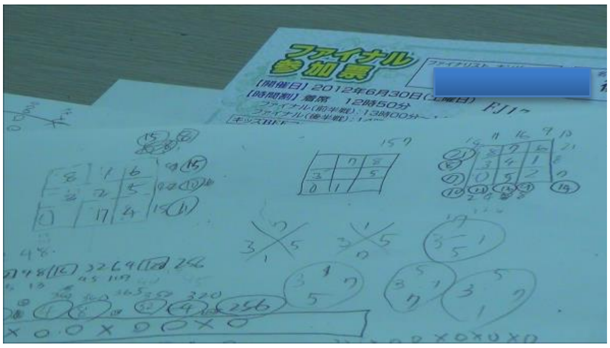
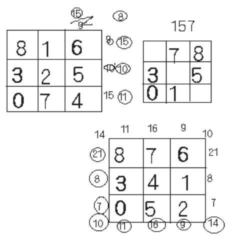


図 2：子ども T のメモ用紙



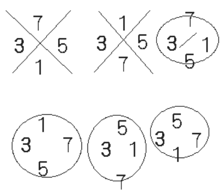


図 3　　　　図 4

（子ども T のメモ用紙の抜粋したもの）

○コンセプションの視点から（子ども T）

子ども T の問題解決に用いられた知識や技能を分析する．子ども T は「奇数のマス目の値を求める場面」において，B12 の場面を辿っていた．このことから子ども T は網羅的に書き出す操作 r 12 を用いているといえる．そこでは，等式の性質に関する制御構造 σ 1 が必要となる．さらに，すべてを書きだし可能性を絞ろうと判断しているため，「書き出してみよう」いう制御構造 σ 13 も背景にあることが分かる．実際，図 4 のように網羅的に 6 つの奇数の場合をすべて書き出す操作をおこなっている．

また，今回のデータからはその後の解決過程が分からないことから，その他の制御構造は明確に知ることはできなかった．

4.2　正答を与えた問題解決過程（子ども U）

図 5 は子ども U のメモ用紙であり，ここに書かれていたパズル問題のメモ部分を図 6，

図 7 に書き起こした．ここでは，図 6，図 7 を参照しながら子ども U の解決過程をみていく．

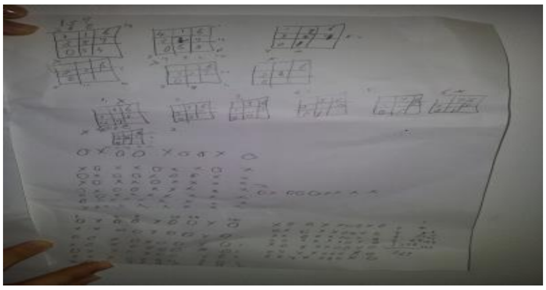


図 5：子ども U のメモ用紙

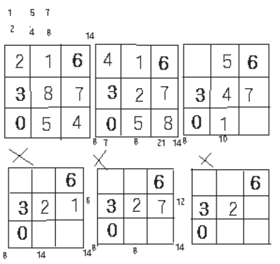


図 6

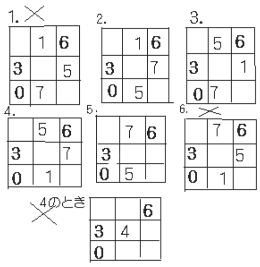


図 7

（子ども U のメモ用紙から抜粋して再現したもの）

子ども U は，はじめはあてずっぽうの解決方法を試みている．これは，図 6 の一行目をみると，当てずっぽうに数字を入れる表を 3 つ書いていることから分かる．しかし解決に至らず，論理的に考え始める．まず，図 6 の二行目にある 3 つの表のように C に 2 を固定して，奇数のマス(B,D,E)に着目し，(B,C,E)や(A,C,F)，(6,C,0)，(3,C,D)の和を求めている．しかし，C に 2 を固定しても正答に至らないと分かり，図 7 のように奇数の組(B,D,E)を網羅的に 6 通りのすべてを書き出し奇数の組み合わせを確認する．そして，(3+D) と（B+E）に着目して題意に沿わない組み合わせを消去し（図 7 の×印），可能性を絞っていく．観察可能なデータはここまでだが，最終的に子ども U は問題用紙に正答の数値を記していた．また，子ども U の解決過程を図 1 のフローチャートを参照してみると，はじめは C のあてずっぽうの解決方法を試みている．次に A12 の偶数の場面（C の数字）を考える論理的方法に思考が移り，最後に B11 の奇数の場合を網羅的に思考するという過程となっていることが分かる．

○コンセプションの視点から（子ども U）

子ども U の問題解決に用いられた知識や技能を分析する．子ども U は図 6 の二行目の表から（B,C,E）と(A,C,F)の和が書かれていることから，（B,C,E）と(A,C,F)に着目し，縦の和と斜めの和を比較する操作を行っているといえる．ここでは，偶数のマス目の値を求める場面で奇数のマス目に注目するという制御構造が必要となる．つまり，「異なった種類の条件を同時に考える」ことが制御構造 σ 32 として用いられる．

また，図 6 の二行目の 3 つの表には C に 2 が固定され，D にそれぞれの奇数が書かれていることから，C＝2 を固定して，(B, D, E) に入る奇数の組み合わせを見つけるという操作を行っていることが分かる．この操作の背後には，A12 の場面でみたように A+2+F の A と F に（2，4）を代入すると 2+4 となるが，4+2 としても値は変わらないと判断する制御構造が必要である．子ども U はこの交換法則的なアイデアの制御構造 σ 2 を用いているといえる．さらに，C＝2 を入れた後に D＝1 を入れるが題意を満たさないため，次に D＝7 を入れるという操作を行っている．この操作の背後には，一方の数字が駄目ならもう一方の数字になるだろうといった背理法的な考えが制御構造 σ 31 として用いられているといえる．

さらに，子ども U は「奇数のマス目の値を求める場面」において，B12 の場面を辿っていた．実際，図 7 をみれば網羅的に 6 つの奇数の場合をすべて書き出していることから，「ある場面を網羅的に書き出す」という操作 r 12 をおこなっているといえる．この場面は子ども U と同様の解決過程を経ているため，子ども U のコンセプションモデルの要素とほぼ同様であった．

また，子ども T も今回のデータからはその後の解決過程が分からなかった．

5　一般の子どもの問題解決過程

これまで優れた子どもがどのように問題解決するのかを示してきた．では，一般の子どもは同様の問題をどのように解決するのだろうか．本研究では，公立小学校の子どもたちに先のパズル問題を解いてもらった．その際に収集したデータを分析することにより，一般の子どもの問題解決過程を明らかにし，どういった点が優れた子どもと異なるのか考察する．

5.1　調査方法

調査は，新潟県の公立小学校六年生 14 名を対象に平成 25 年 11 月 27 日に実施した．本稿で扱った問題は難易度が高く，また，学校教育ではあまり扱われないような問題であることから，問題解決が進まないことが予想された．そこで，本調査では協同による問題解決とした．ただ，実際の調査では，一人で問題を解きたいという子どもがいたため，一人で解いた子どもが 1 名と，二人一組のペア 5 組，三人一組の 1 組が問題に取り組んだ．解答は問題用紙に書いてもらった．解答時間はおよそ 40 分で，このパズル問題とその他の問題を 1 問の計 2 問を解いてもらった．

調査では，子どもの記述がある問題用紙と，子どもの解決過程をビデオ撮影したものをデータとして収集した．ビデオカメラは 3 台あり，1 台で 1 組の子どもを固定して撮影し，もう 2 台で複数の子どもたちの解決過程を撮影した．そのため 2 台目のカメラで撮影したビデオデータからは解決過程をすべて詳細に再現することはできない．しかし，最終的なものは多く撮影することができたため，問題用紙に書き込まれた記述から解決過程がある程度特定できる．

5.2　実際の子どもの問題解決過程

データは 14 人分あり，その中で正答に至った子どもは 8 名であった．また，正答に至らなかった子どもは 6 名であったが，そのうち, 無解答だった子どもは 3 名だった. では, 一般の子どもたちはどのような解決過程だったのだろうか．解決過程がすべて問題用紙に残されていた子どもの解決過程を示す．

(1) 一般の子どもが与えた問題解決過程 (子ども K)

図 8 は子ども K の問題用紙である．ここでは，図 8 と，図 8 を説明した図 9 を参照しながら子ども K の解決過程をみていく．

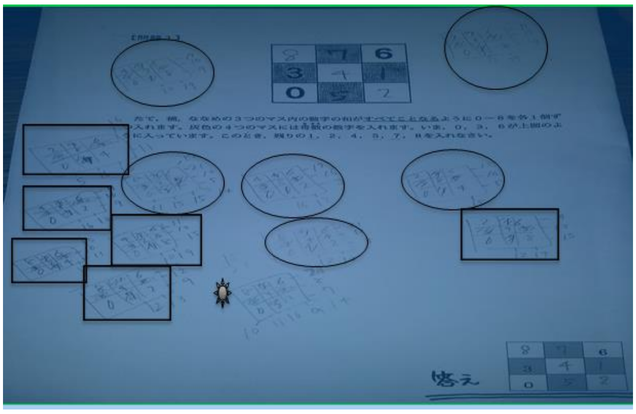


図 8：子ども K の問題用紙

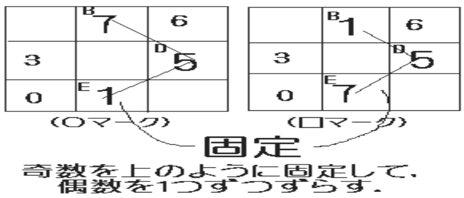


図 9 を説明したもの

子ども K は, 偶数の位置の数を 1 つずつずらして，すべての和をチェックするという解決過程を辿っていた．図 8 で〇（マル）で囲んだ 6 つの部分は，奇数の（B,D,E）を（7, 5，1）と固定した場合である．偶数が入る位置の数を 1 つずつ変えてマスの和がすべて異なるかを調べている．□（シカク）で囲んだ 6 つの部分は（B,D,E）を（1，5，7）と固定して，偶数の入る位置の数を 1 つずつ変えている．このように，奇数を固定して，偶数を変えていくことにより，どれがうまくいくか

調べようとしている．そして，★マークを付けた部分で，たまたま正答を得ている．

子どもKは，奇数の入る位置の数を固定して，もう一方の偶数の数を一つ一つずらして網羅的にすべての場合を確かめようとするものであった．こういった解答をしているものが他にももう1名いた．この子どもは，一つ一つの場合を書いていくうちに，中央に8が入らないということにも気づいていた．そして，他の子どもの問題解決過程の多くは，あてずっぽうに数字をあてはめて解答しようとするものだった．

⑵一般の子どもと優れた子どもの問題解決過程の比較

上で述べたように，一般の子どもの多くは当てずっぽうの解決過程であり，2 名のみが網羅的方法を用いて解答していた．ただ，この一般の子どもの網羅的方法の解答は，優れた子どもの網羅的方法とは少し異なるものであった．

一般の子どもの問題解決過程は，上でみたように，3 つの奇数の位置を固定して偶数の位置に入る数を一つずつずらして，すべての和を求めて解答の妥当性を判断するものだった．一方，優れた子どもの問題解決過程は，4 つの奇数の位置を抜き出し，限られた部分のみを用いて解答の可能性を絞るものだった．一般の子どもが 9 つの数を扱っているのに対して，優れた子どもは限られた 4 つの数のみを用いて問題解決を図っていた．つまり，優れた子どもは複雑な場面において，各要素間の関係を考慮に入れ，より単純化された問題を導き出し，それを解決することにより問題全体を解決している．一般の子どもも奇数を固定することにより問題を単純化してはいるものの優れた子どもが導いた問題はさらに単純化されたものであった．

6　考察

今回，優れた子どものパズル問題の解決過程をコンセプショモデルを用いて分析してきた．その結果，解決過程の二つの特質を特定することができた．

第一に，優れた子どもは問題解決に必要となる各々の操作の制御構造をもっているということである．今回の問題を解決するためには，等式の性質，交換法則的なアイデア，背理法的アイデアをもっていること，そして，それらの制御構造をパズル表現の中で用いることが必要であった．これには，普段，代数表現の中で用いることとは異なる知識・技能が必要になる．例えば，代数表現では先ほどの制御構造を計算する過程の中で用いることが多い．しかし，パズル表現ではこれらの制御構造をパズル表現から見抜くという知識・技能が必要とされる．そして，そういったことが優れた子どもはできていた．

第二に，優れた子どもは，複雑な状況・場面において，問題を整理し，それをできるだけ単純化した問題に帰着させ，問題解決を図ることができていたことである．また，問題を整理できるということは問題の中で何が大事になっているのか，要素間の関係などを把握できるということと考える．

以上のことを踏まえると，算数・数学教育についていかなることが示唆されるであろうか．一つ考えられることは，小学校・中学校で挑戦的な問題を扱うことで，これまで述べてきたような優れた子どもがもつ問題を解くために必要となる知識・技能を身に付ける機会になるということである．こうした知識・技能には価値があり，特に，筆者はそれらが通常生活でも役立つものと考える．複雑な状況でものごとを整理したり,単純化できたり，何が大事なのかを見抜くことは，一般に，社会における複雑なものごとを捉える際にも必要となるだろう．通常，学校の算数・数学で扱われる既に単純化された問題では養うことのできない知識・技能を，挑戦的な問題を通して養うことが可能になるのではないだろう

か.

また，こうした挑戦的な問題は子どもの興味・関心という点からも大事であろう．数学オリンピックで上位国となった国を視察した研究結果の報告書の中で礒田（2006）は,「日本に欠けているもの，それは普通の生徒を数学好きの優れた生徒へと鍛えようとする社会と，その営みを楽しむ教師・研究者，生徒の存在である．そこで楽しむのは生徒が挑戦する数学である」と述べている．我が国でも，小学生から挑戦する問題を授業内外問わず，楽しんで取り組める環境をつくっていくことが必要であろう.

引用・参考文献

礒田正美ほか（2006）『数学オリンピック上位国と我が国との数学に秀でた生徒の育成方略に関する比較研究―自ら学ぶブルガリアの数学教育と他国との比較―』, 平成17年度～平成18年度学研究費補助金（萌芽研究）研究成果報告書，筑波大学.

塚田朋美（2013）「秀でた子どもの問題解決過程の分析 - 図形把握に焦点を当てて - 」，上越教育大学数学研究　第 28 号，pp.141-150

宮川健（2002）「教授学的状況理論にもとづくコンセプションモデルに関する一考察」，筑波数学教育研究　第 21 号，pp.63-72

Leikin, R. (2008). Creativity in mathematics and the education of gifted students: Research Agenda and the complexity of the field. The paper presented at ICME-11, TSG6: Activities and programs for gifted students. （http://tsg.icme11.org/document/get/769）

Balacheff, N., Gaudin, N. (2002). Students conceptions:an introduction to a formal characterization. *Cahier Leipniz*, vol. 65.