第２章

テクノロジーを活用した数学的活動

2．1　数学的活動とテクノロジー活用の意義

1．はじめに

平成11年に公表された高等学校学習指導要領（数学）の目標は，「数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる」であり，これは従前（平成元年版）の目標に「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」が付加されただけの変更である（文部省，1999a）．

ここでは，先行研究をもとに①数学的活動の捉え方と②数学的活動を支援するテクノロジー活用について考察する．

2．数学的活動の捉え方

現行の学習指導要領が新しく述べる「数学的活動」とは，何を意味しているのであろうか．我々教師は，日々の授業で生徒と一緒に数学に関する学習活動を行っているが，これらの学習活動は，学習指導要領が述べる「数学的活動」とは言わないのであろうか．ここでは，数学的活動の捉え方について先行研究をもとに考察する．

(1) 学習指導要領解説が述べる数学的活動

数学的活動とは，観察，操作，実験・実習などの外的な活動と，直感，類推，帰納，演繹などの内的な活動のことであり，高等学校学習指導要領解説-数学編 理数編-では，以下の三つの思考過程を数学的活動として記述している（文部省，1999b）．

「高等学校ではさらに，次のような思考活動を数学的活動ととらえている．

- 身近な事象を取り上げそれを数学化し，数学的な課題を設定する活動
- 設定した数学的な課題を既習事項や公理・定義等を基にして数学的に考察・処理し，その過程で見いだしたいろいろな数学的性質を論理的に系統化し，数学の新しい理論・定理等（以下「数学的知識」という）を構成する活動
- 数学的知識を構成するに至るまでの思考過程を振り返ったり，構成した数学的知識の意味を考察の対象となった当初の身近な事象に戻って考えたり，他の具体的な事象の考察などに数学的知識を活用したりする活動

高等学校における数学的活動では，内的な活動が中心となるが数学化の場面や数学的考察・処理の過程では，観察，操作，実験などの外的な活動も含まれている.」（pp.9-10）

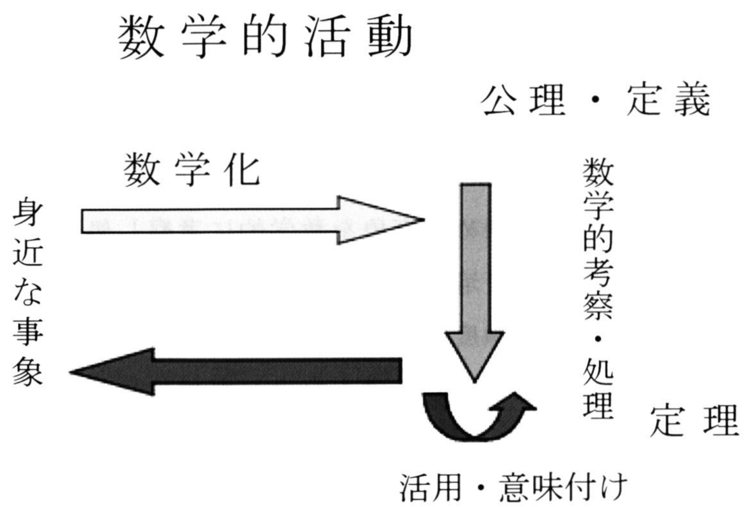


図 2-1-1. 数学的活動の模式図

また，数学的活動において，生徒の主体的な活動を促すことを，以下のように強調している（文部省，1999b).

「今回の目標の改訂で重視した数学的活動は，活動の目的を一層明確にし生徒の主体的な活動を促すとともに，次のような点を強調するものである.

・身近な事象との関連を一層図り，数学化の過程を重視する.

・主体的に様々な問題解決の方法を味わったり，問題解決の後も自らの思考過程を振り返ったり，その意味を考え，より発展的に考えたり，一般化したりして問題の本質を探ろうとするなど，数学的考察・処理の質を高める.

・見いだした数学的知識の意味を身近な事象に戻って味わったり，見いだした数学的知識をいろいろな場面に活用したりする.」（pp.10-11）

観察，操作，実験・実習などの外的な数学的活動は，生徒たちの想像力及び直観力によって行われるため，生徒たちは沢山の規則や性質を発見し，発見する楽しさから数学への興味・関心を引き起こす．しかし，この外的な数学的活動で終わるのではなく，生徒自らが発見した規則や性質，または，疑問等に対して，内的な数学的活動を通して，生徒が既習事項と関連づけて自らの力で考え，生徒が「なるほど！」と納得したときに確かな知識が築き上げられると考える．このように，外的な活動と内的な活動の相互作用による数学的活動は，生徒自身による数学の再生産という論理的かつ創造的な学習を行うために必要不可欠な活動であり，新学習指導要領では以下のよう

に述べている（文部省，1999b）．

> 「小学校や中学校の目標には，数学的活動などの「楽しさ」が示されていて，高等学校の目標にはそのことについての直接的な表現はない．しかし，この数学的活動では，数学が作られてきた過程を追体験するなど発見の喜びや活動の楽しさを味わうことができ，小学校や中学校と同様実質的に「楽しさ」を含んでいる．
> 　ただ，高等学校の目標では「楽しさ」にとどまるのではなく，数学的活動を通して，数学への興味・関心を一層喚起するとともに，論理的思考力，想像力及び直観力などの創造性の基礎を培うことを目指している．」(p.11)

以上のことから，学習指導要領解説が述べる「数学的活動」には，①生徒主体による活動，②外的活動と内的活動の相互作用，③発見する楽しさによる創造性の育成，といったキーワードが浮かび上がってくる．以下に，これらのキーワードについて考察する．

(2) 生徒主体による数学的活動と教師主導による数学的活動とのバランス

数学的活動の「活動」を辞書[1]で調べると以下の２つの意味が記述されている．

活動①：はたらき動くこと

活動②：いきいきと行動すること

人間以外の物体に関する「活動」は，「火山活動」「火成活動」「天体活動」など，活動①の意味として使われる．

一方，人間に関する「活動」を考察すると，任務として行なう「活動」の「復旧活動」「救援活動」「地下活動」「就職活動」などは，活動①の意味である．これに対して，「ボランティア活動」「クラブ活動」「特別活動」などは，人間個人の自主的・自発的な「活動」であれば，それらに従事している人間は「いきいき」としているので活動②の意味として捉えることができる．しかし，これらの「活動」が強制的・義務的になれば，従事している人間は単に「はたらき動く」だけになり，活動①の意味に変わってしまう．つまり，個人内の自主的・自発的といった内発的動機づけ，または，個人外の強制的・義務的といった外発的動機づけによって，個人の活動が活動①にも活動②にも変わってしまうのである．

このような意味で数学的活動を捉えると，従来の教師主導による授業での数学的活動は，教師から与えられた課題を生徒が決められた手順で解決する活動①のタイプの数学的活動であると考えられる．これに対して，生徒主体による数学的活動は，生徒

[1]　「広辞苑 第五版」岩波書店

が自ら課題を見つけ自らの力でいきいきと問題解決する活動②のタイプの数学的活動であり，まさに現行の学習指導要領のねらいとする自ら学び，自ら考える力の育成が可能となる．

デューイ（1957）は，「学校と社会」で子どもの活動の個性化について次のように述べている．

「子どもたちは活動する瞬間，自ら個性化する．かれらは一群ではなくなり，各自それぞれにはっきりした個性的な人間になる．」（p.43）

つまり，デューイの立場で数学的活動を解釈すると，個々の生徒が個人的な人間として活動する主体的な学習を数学的活動として捉えることができる．しかし，日々の授業を考えると，授業の全ての時間を生徒主体による授業は可能であろうか．筆者は，生徒主体の数学的活動と従来の教師主導による数学的活動とのバランスが重要であると考える．これについて，先行研究をもとに考察する．

オープンエンド アプローチを提唱した島田（1977，1995）は，数学に関係する全ての思考活動を数学的活動として，図 2-1-2 に示す模式図を用いて数学的活動を表わしている．島田は，従来の教室で行われていた多くの学習活動は，教師によって数学的に言い換えられた段階ｇから出発していることを指摘している．つまり，従来の学習活動は教師主導による数学的活動として捉えることができる．これに対して，オープンエンド アプローチは，個々の生徒がａの現実世界から出発して，ｆからｇへの抽象化，理想化，簡単化の過程によって発見した多様な規則やきまり，さらには，ｎからｏへの一般化の過程によって得られた一般理論を授業で積極的に活用することから，生徒の個性を尊重した生徒主体による数学的活動として捉えることができる．このように島田が述べる数学的活動は教師主導と生徒主体の両方の活動として捉えることができるが，島田は，従来の教師主導による数学的活動を行う通常の授業の中に，生徒主体による数学的活動を補完的に組み入れることを次のように提案している．

「算数・数学教育における子どもの学習活動の中に，ｆ→ｇ→ｌ→ｍの過程やｎ→ｏの過程に相当することを含めるべきであることは，当然であるといえよう．

　この過程の活動は，従来行われている活動と二者択一的な関係にあるものではなく，それらが互いに他を補う補完的な関係にある．この補完的な関係を生かしていくためには，ｆ→ｇ→ｊ→ｌ→ｍ→ｇ→…という過程のすべてを含む大がかりな学習単元を年に１，２回試みるというよりも，従来の素材を適宜に変形したものを用いる小規模なまとまりを作り，多面的な答をくふうする機会を多くすることの方が望ましい．この過程の特徴は，結果が一定に指定されず，発想のいか

んによって多様な定式化が可能であり，そこに既習の知識なり，考え方，見方が生かされる点にある．

そこで，多様な定式化が，子どものそれまでの学習範囲から見て可能であるように条件設定をした小規模な問題を用意し，これを，他のアプローチによる指導-評価の計画とないまぜにした指導-評価の計画を立て，これによって指導を進めるというのが，オープンエンド アプローチである．

本書で以下に説明するのは，このような形態の授業だけで全体を覆うことを主張するものでなく，全体計画の中の不可欠な一部としてこのようなことを取り上げてみてはどうかという提案である．」(pp.20-21)

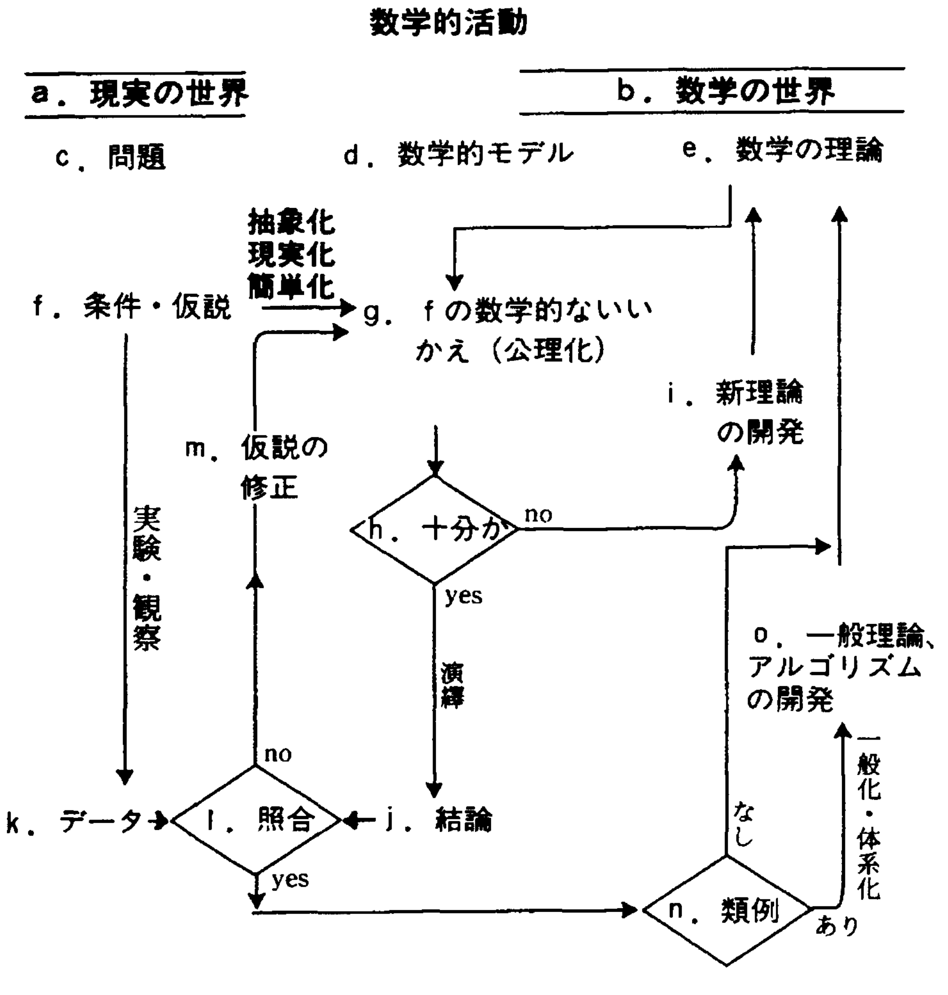


図 2-1-2．数学的活動の模式図[2]

2　島田茂編著（1995)．新訂 算数・数学科のオープンエンドアプローチ，東洋館出版，p.15.

次に，古藤（1991）が主張するDo Mathについて考察する．Do Mathの活動は，生徒が主体的に数学を理解したり創り上げたりする活動であることから，古藤が主張するDo Mathは生徒主体による数学的活動であると捉えることができる．古藤は，Do Mathの指導類型を以下の4つの場面に分類し，教師主導のなかに生徒主体のDo Math的な活動を取り入れる必要性を述べている．

① 計算などの訓練を重視する授業

② 概念・法則などの理解を大切にする授業

③ 子供たちの発見の喜びを大切にする授業

④ 子供たちの追究体験を大切にする授業

以上のことから，本研究で取り扱う数学的活動とは，第1章の研究の方法で述べたように，生徒の主体的な数学的活動を中心に授業を展開し，さらに，生徒が発見した規則や性質を教師主導の数学的活動に積極的に活用しながら，両方の数学的活動が相互に補完する形で授業を発展的に展開する活動として捉えることにする．

(3) 外的な数学的活動と内的な数学的活動との相互作用

高等学校学習指導要領解説-数学編 理数編-では，高等学校の数学的活動は内的な活動が中心となるものの，数学化の場面や数学的考察・処理の過程では観察，操作，実験・実習などの外的な活動も含まれることを記述している（文部省，1999b）．ここでは，外的な活動と内的な活動の相互作用について根本（1999）と黒澤（1999）の見解をもとに考察する．さらに，生徒の外的な数学的活動を促すための「身近な事象」とは何かについて考察する．

根本（1999）は，問題解決過程での活動をphysicalな側面とmentalな側面とに分けて表し，外的行為は内的行為の活性化を促し，内的行為は外的行為を誘発するものとして，双方の相互的かつサイクリックな活動が知的充足を高めるとしている．

「ア）計算処理や図形の具体的操作など客観的に観察が可能な活動（外的行為）

イ）類推したり，振り返って考えたりするなどの内面的な活動（内的行為）」

（p.27）

黒澤（1999）は，図2-1-3に示すように，「算数的活動」を具体的操作（現物実験）と念頭操作（思考実験）の往復を繰り返しながら「数学的な高まり」のある「操作」の連続的な集合体として捉えている．黒澤が示す具体的操作と念頭操作は，学習指導要領の外的な活動と内的な活動として解釈でき，時間経過とともに双方の活動を繰り返しながら数学を創造していく活動が黒澤の模式図から解釈することができる．

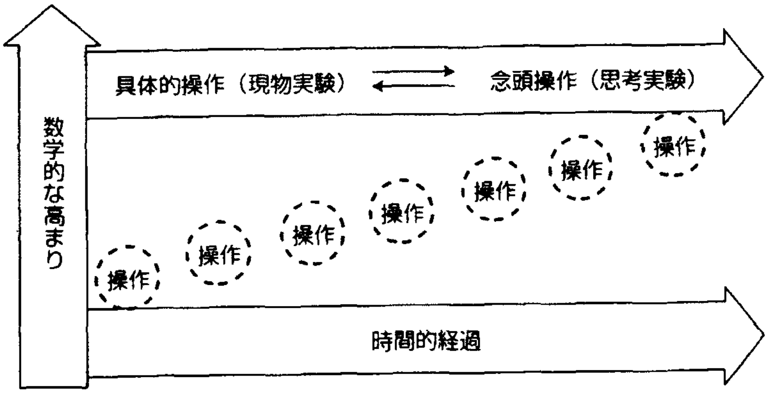


図 2-1-3. 具体的操作と念頭操作による数学的な高まり[3]

このように根本と黒澤の見解を参考にすると，数学的活動とは，外的な数学的活動と内的な数学的活動を相互に関連させながら，生徒が具体的な操作や観察・実験で得たことを数学的な内容に高めていくことが重要であると考える．

これに関して，デューイ（1975b）は，生徒自らが実際に経験する直接的経験と，授業における言語や記号によって媒介された間接的経験とが実り豊かに結びつく教材の重要性について以下のように述べている．

「これ（直接的経験）[4]は，単に量とか大きさの問題ではない．十分な直接的経験とは，それよりももっと質の問題である．つまり，それは，記号的な教材と容易にしかも実り豊かに結びつくような種類のものでなければならないのである．教授活動が記号という媒体による事実や観念の伝達を安全に開始することができるようになるためには，その前に，学校教育は，本人自ら情況に関与することによって教材の意味やその教材に含まれている問題を切実に感じさせるような，本物の情況を与えなければならないのである．その結果生ずる経験は，生徒の立場から言えば，それだけで，やる価値があるものであり，教師の立場から言えば，記号を伴う教授内容を理解するのに必要な教材を与える手段でもあり，開かれた心という態度や，記号によって表された教材についての関心を引き起こす手段でもあるのである．」(pp.63-64)

高等学校学習指導要領解説−数学編　理数編−が示す数学的活動の模式図（図 2-1-1）には，数学的活動は「身近な事象」を取り上げることから始まることを示している（文部省，1999b）が，次に，生徒の主体的な数学的活動を促す引き金となるべき「身近な

[3] 黒澤俊二（1999）．なぜ「算数的活動」なのか．東洋館出版．p.61.
[4] カッコ内は，筆者が加筆した．

事象」とは何かについて考察してみる．

まず，「身近な事象」の「身近」を辞書[5]で調べてみると，以下の２つの意味が記述されている．

身近①：自分の身に近いこと．身に近い所．身辺．「−に迫る」

身近②：自分と関係の深いこと．日常慣れ親しんでいること．「−な問題」

生徒の具体的な操作・活動によって生じている事象が，ただ単に生徒の近くで起きている身近①の意味として事象として捉えるのではなく，生徒がその事象を自分自身の課題として「なぜだろう？」「不思議だな？」「調べてみたい！」といった知的好奇心を生徒の内面に駆り立てさせるような事象，つまり，外的な数学的活動では，身近②の意味の事象として生徒が深く関わることが重要であると筆者は考える．

さらに，「身近な事象」の「事象」は，辞書で以下のように記述されている．

事象：ことの成り行き・様子．ことがら．

数学的活動の実践研究には，日常的な事象や自然現象を数学化する事例が多い（永田，1999；長崎，2001；日本数学教育学会研究部，2001；坂本，2002；永田，2002）．しかし，辞書的に解釈すれば，生徒が数学学習で扱う数表，グラフ，幾何図形なども「事象」として捉えることができると筆者は考える．このことを島田（1995）は，数学的活動の模式図（図 2-1-2）を用いて以下のように述べている．

「まずはじめに，ａ．**現実の世界**とｂ．**数学の世界**とがあり，現実の世界には，何らかの意味でｃ．**問題**があり，解決をせまっているとする．ここでいうａの現実の世界というのは，必ずしも物理的な経験世界だけを意味するものと限る必要はない．ｂの数学の世界より抽象度の低い世界であってもよい．」(p.14)

つまり，生徒が外的な数学的活動において深く関わる「身近な事象」とは，日常的な事象や自然現象だけでなく，数表，グラフ，幾何図形など数学的な事象も含むものとして解釈することができる．

以上の考察から，本研究における「身近な事象」とは，生徒が主体的に行う外的な数学的活動に関わる全ての事象に対して，生徒自身が事象と深く関わることで生徒の内面に「なぜだろう？」「不思議だな？」「調べてみたい！」といった知的好奇心を引き起こす事象を「身近な事象」として解釈することにする．さらに，生徒の知的好奇心を引き起こす「身近な事象」を取り扱った数学的活動の実践では，外的な数学的活動と内的な数学的活動が相互に作用させながら数学的内容を高める教材開発が大きな鍵となってくると考える．

---

[5]　「広辞苑 第五版」岩波書店

(4) 数学的活動と創造性

ここでは，学習指導要領の目的に記述された「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」の文言について，数学的活動と創造性との関係について考察する．

学校数学における創造性テスト[6]を開発研究している斎藤（1998）は，学校教育における創造性を以下のように定義している．

「本人にとって新しい価値があり，その学習集団の構成員に評価されるものを発想したりつくり出したりする能力及び人格特性である．」(p.20)

確かに，学校数学において生徒が社会的に評価されるオリジナルなものをつくり出すことは稀である．しかし，既成の学問体系としてでき上がった数学を文化の継承として教え込むのでなく，子ども自身が数学を作り上げ，それが子ども本人にとってもクラスの友達や教師にとっても価値があると認識することが大切である．

平林（1987）は，彼の主張する数学教育の活動主義的展開において，子どもたちが自ら数学を創りだしていく数学的活動を行うために，教師主導による知識注入型の教育（外在的数学観による数学教育）から子ども主体による知識再生産型の教育への質的変換を以下のように記述している．

「もともと数学は，数学者の内からの創造である．もし，それを子どもの内部での再生産という形で学習されるならば，それは，これまでの外在的数学観による数学教育と異なった教育学を必要とするであろう．」(p.26)

また，菊池（1969）は，子どもたちが自ら数学を創り出していく数学的活動が「数学的な考え方」の育成にも繋がるとことを以下のように述べている．

「数学を創り出した人の気持ちで授業が展開されるとき，初めて”数学的な考え方”もあらわに姿をみせることになろう．」(p.4)

黒澤（1999）も菊池と同様に，算数的活動は生徒主体の創造的活動であり，「数学的な考え方」を生徒が見いだす場であること主張している．

「確かに，「算数的活動」という文言を入れることによって，「自ら一する」子ども，いわゆる「生きる力」を算数科でも育てることを再認識しようというねらいを感じとることができる．

しかし，それだけではない．私は，前章で述べたように，「算数的活動」といっ

---

[6] 創造性テストに関しては，以下の文献を参照．（斎藤，1999；秋田，2001；斎藤・秋田，2001；斎藤・秋田，2002；斎藤・秋田，2003；秋田・斎藤，2004；斎藤，2004）

たところに，積極的にその意味を見いだしたい．

それは，『数学的な考え方』を育てる場という意味である．「具体的な操作から思考実験へ」，すなわち，「現物実験から思考実験へ」という変容を生みだし，その変容に『数学的な考え方』を見いだし育てようという意味である．「算数的活動」とは，そのような変容の場なのである．

『数学的な考え方』を見いだす場であるから，「算数的活動」は，「自ら一する」という子どもの主体的な創造活動である．そしてそこには，より簡潔に，より明確に，より統合されたものへという数学的な高まりが見られるのである．」（pp.56-57）

以上のことから，本研究における創造性とは，生徒が主体的な数学的活動を通して規則やきまりを発見し，さらに，既習事項と関係づけながら自らの力で数学を創りだすことを創造性と解釈する．

3．数学的活動を支援するテクノロジー活用

平林（1987）は，算数・数学的教具の一般的な概念として，①自主的な子どもの活動性を誘発すること，②数学的概念を構成・形成するための活動的基盤を与えること，の２点をあげている．例えば，机上の１枚の紙片や１本の糸くずでも，上記の２点を踏まえた上で活用されれば数学的教具となることを述べている．一方，どんなに素晴らしい教具を活用しても，教具の用途が誤っている場合や，生徒の主体的な数学的活動を誘発しない場合は，数学的活動として相応しい教具とは言えないと指摘している（p.349）．

高等学校学習指導要領解説-数学編 理数編-は，生徒の主体的な数学的活動をより充実するために，テクノロジーの積極的な活用を述べているが，実際にどのようにテクノロジーを効果的に活用すべきであろうか．

ここでは，先行研究をもとに，生徒の主体的な数学的活動を支援するためのテクノロジー活用について考察する．なお，ここで考察するテクノロジーとは，コンピュータ，インターネット，ハンドヘルド・テクノロジー（電卓，グラフ電卓［数式処理機能付きのグラフ電卓と，数式処理機能のないグラフ電卓］，データ収集機と各種センサー）など，テクノロジー全体を考察の対象とする．

(1) テクノロジー活用の歴史的変遷

数学教育におけるテクノロジー活用は，1950 年代後半に始まり現在に至っている．その間，技術の進歩とともにテクノロジーが急激に発達したことや，数学教育用の汎

用ソフトが開発されたこと，さらに，指導観や指導方法の違いによって，テクノロジー活用が多種多様に変化してきた．ここではテクノロジー活用の歴史的変遷について考察する．

a．コンピュータ主導による学習［1960年代～1970年代］

1958年米国IBM社とハーバード大との協力により世界で始めてCAIシステム（Computer Assisted Instruction）の開発研究が行われた．1960年代から1970年代の実践的活用のCAIシステムとしては，イリノイ大学のPLATOやスタンフォード大学IMSSSが有名である．特にスタンフォード大学が開発実践した算数の練習-演習様式のCAIは，小学校1年から6年における教材が体系的に開発されており，1966年－1967年で1500名以上の生徒が教材を使用した．CAI教材のタイプは，①練習-演習様式［drill and practice］，②個別教授様式［tutorial］，③問合せ様式［inquiry］，④ゲーム・シミュレーション様式［game and simulation］，⑤問題解決様式［problem solving］の4つのタイプがある（Holtzman，1977a；Holtzman，1977b；教育工学研究成果刊行委員会，1977）．しかし，実践的に活用された教材は①練習-演習様式と②個別教授様式が多く，これらの教材は，教師が意図する指導内容と方法があらかじめコンピュータに組み込まれているため，コンピュータが次に学習する内容を生徒の反応によって選択するコンピュータ主導型の学習が展開されていた．

b．コンピュータとの対話による生徒主体の学習［1980年代］

1980年代に入って，汎用の数学教育ソフトが開発されるようになった．特に，数式処理システム（CAS：Computer Algebra System），探究的データ解析（Exploratory Data Analysis）用のソフトやグラフィングツールなどによって，手作業では膨大な時間や労力を必要とした数学的実験や観察による探究活動が，瞬時にかつ容易に実行することが可能となった．このため，1985年3月に数学教育国際委員会（ICMI）が開催したストラスブール会議の報告書「数学・数学教育に対するコンピュータと情報科学の影響」では，コンピュータの活用によって，生徒自身に数学を探究させ，数学を発見させる探究的数学（Exploratory Mathematics）の重要性が強調された（Howson A.G. and Kahane J.-P.，1986）．ここで述べられている探究的数学とは，コンピュータ上に表示された事象を生徒が主体的に観察することにより，規則や定理を実験的，帰納的に発見し，仮説を立て，さらに，自らの仮説を証明する数学的活動のことを意味している．この報告書では，コンピュータを活用した数学的活動によって，生徒の行動や能力が良い方向に変容することを以下のように述べている．

「もし，生徒が（コンピュータによって）彼らに提示されている数学的現象に応じて認知的に活発であれば，彼らは概念的教材をより良く学習し，数学的なアイ

ディアに関して自律的な行動パターンをより良く発達させることができるであろう．この活動は，数学的対象と過程を表す心的イメージの形成からなるべきである．また，心的イメージを操作する技術の発達も含めるべきである．このように，生徒は数学的に考える能力を増進することができる．」(pp.25-26)

また，この報告書では，数式処理システムを使った探究的数学の事例とコンピュータグラフィックスを使った微積分の探究的数学の事例を数多く紹介している(Lane K., Ollongren A. and Stoutemyer D.R., 1986; Murakami H. and Hata M., 1986; Tall D. and West B.，1986)．特に，Lane らは，多くの発見を必然的に伴うオープンエンド的な優れた事例と実践展開例を紹介している．

さらに，Steen（1986）は，コンピュータのことを「数学を話す生き物(mathematics-speaking beings)」と称して，コンピュータの無い時代では天才的な生徒のみが発見という経験が出来たのに対して，生徒とコンピュータとの会話により，多くの生徒が自力で発見の喜びを得ることができると述べている．つまり，生徒とコンピュータとのより良いパートナーシップを築くことにより，創造的で発見的な学習が展開できることを主張していると考える．

このように，ストラスブールの会議では，コンピュータを活用した生徒主体による探究的数学が強調されたことが特徴であるが，その反面，1970 年代に研究実践が行われていたコンピュータ主導によるCAI教材について殆ど議論されていないことも特徴の一つとしてあげられる．このことは，1982 年 10 月に米国メリーランド州カレッジパークで開催された米国科学財団（National Science Foundation : NSF）の作業会議の報告書「数学教育とコンピュータ」においても同様であった（Fey，1987）[7]．

以上のことから，1980 年代におけるコンピュータ活用は，コンピュータ主導型の学習から生徒主体によるコンピュータ活用へのパラダイムシフトが行われたと言える．しかし，①テクノロジー技術の進歩（1年）とカリキュラムの変化（10 年）とのギャップ，②生徒一人に一台のコンピュータを設置するための価格的困難，③教師教育，などの課題が指摘されていた（Burkhardt，1986)．

c．テクノロジー活用の携帯化［1980 年下旬〜1990 年上旬］

グラフ電卓は，日本のカシオによって 1986 年に世界で初めて技術者向けに開発された（Harvey et. al., 1995 ; Waits and Demana，2000)．オハイオ州立大学の Waits 教授と Demana 教授は，このグラフ電卓を教育用に改良し，1980 年下旬から教材開発と教師教育を目的とした研究活動を世界で初めて行った（佐伯，1996)．グラフ電卓は，通

---

[7] Fey (1987) の報告書では，テクノロジーを活用した数学的モデリングの実践も強調されている．詳しくは2．3節で述べる．

常の関数電卓の機能はもちろんのこと，関数，媒介変数方程式，極方程式，漸化式のグラフに関する機能と簡単な統計処理機能を持っている．つまり，コンピュータ上で動作していたグラフィングツールと統計パッケージの簡易版が，手のひらサイズのグラフ電卓で実行可能となったわけである．価格はコンピュータと比べると安価であるため一人一台の所有が可能で，携帯性もよく，教室内外を問わず，何時でも何処でも必要な時にグラフ電卓を使った数学的活動が行えるようになった．

全米数学教師協議会（NCTM）が 1989 年に発表した「学校数学のためのカリキュラムと評価の基準（スタンダード）」の第 9 学年から 12 学年のスタンダードにおいて，グラフ電卓とコンピュータの活用について以下のような原則を記述している．

「◆グラフ電卓（Scientific calculators with graphing capabilities）は，全ての生徒にいつでも有効であるだろう．

◆コンピュータは，提示の目的のために全ての教室で常に有効であるだろう．さらに，全ての生徒は個人作業やグループ作業でコンピュータにアクセス可能であるべきである．」（p.124）

このように，NCTM のスタンダードでは，生徒主体による数学的活動を支援するために，誰もがいつでも何処でも必要な時に使用できるグラフ電卓の活用，および，教室に設置されたコンピュータを活用（教師の提示用と生徒の作業用），の両方のテクノロジー活用を推奨した．

さらに，1994 年にはデータ収集機（CBL）と各種センサーのハンドヘルド・テクノロジーが開発され，実現象を取り扱った数学的モデリングの場面においても，誰もがいつでも何処でも必要な時に生徒主体による数学的活動が行えるようになった（Waits and Demana，2000）．

d．テクノロジー活用の多様化［1990 年中旬以降］

1990 年代中旬以降は，数式処理機能付きのグラフ電卓の活用，インターネットを活用した遠隔教育や協調学習，World Wide Web 上にあるデータリソースの活用など，数学的活動の内容や目的に応じてテクノロジーの活用が多様化してきた．

(2)我が国における実践的な先行研究の分類

ここでは我が国におけるテクノロジー活用の実践的な先行研究を分類する[8]．テクノロジーの活用方法は，①テクノロジー主導型 CAI，②教師による視覚的提示，③プログラミング，④生徒主体による数学的活動，の 4 つの基準で分類した．なお，分類の

---

[8] 実際の授業でテクノロジーを活用した実践的な研究論文を調査の対象とした．CAI システムの開発，数学用ソフトの開発，研究のレビュー等の論文は対象外とした．

対象は，日本数学教育学会誌の数学教育（1980 年以降）に掲載された論文を参考とした．

a．テクノロジー主導型 CAI

表 2-1-1 は，テクノロジー主導型 CAI の先行研究を示している．この表から，我が国におけるテクノロジー主導型 CAI の実践研究は，1990 年中旬まで行われていたが，それ以降はシミュレーション型の CAI が 2 件のみであることが分かる．この結果から，我が国におけるテクノロジー主導型 CAI の実践研究は，ストラスブールの会議から約 10 年後に漸く終わりを遂げたと言える．しかし，研究面や学校教育現場では CAI 学習が使用されなくなったのに対して，現在では家庭学習，生涯学習や資格試験用の市販の CAI 教材，さらに，学習塾や社員教育用の CAI 教材など，多くの CAI 教材が開発され活用されている．しかも，これらの CAI 教材は，従来のドリル，チュートリアル，シミュレーションに加えて，静止画，動画，インターネットなどの機能が多様化している．

表 2-1-1．テクノロジー主導型 CAI に関する先行研究

年	著者	機種	カテゴリー
1983	瀬崎強一	コンピュータ	ドリル
1985	小川幹夫	コンピュータ	ドリル
1989	杉田孟	コンピュータ	チュートリアル＋ドリル
	斎藤昇	コンピュータ	ドリル
	橘川孚	コンピュータ	ドリル
1990	高遠節夫，栗本育三郎	コンピュータ	ドリル＋数式処理
	吉田信也	コンピュータ	チュートリアル＋シミュレーション
1991	斎藤昇	コンピュータ	チュートリアル＋シミュレーション
	松本博史，山上成美	コンピュータ	シミュレーション
	石崎学	コンピュータ	ドリル＋シミュレーション
	志賀清一	コンピュータ	視覚的提示＋ドリル
	藤岡典夫，保積均	コンピュータ	ドリル
1992	野寄睦美，重松敬一	コンピュータ	ドリル＋シミュレーション
	大石正佳，松尾吉晃，寺田文行	コンピュータ	チュートリアル＋ドリル
1993	北村光一	コンピュータ	ドリル
	大内俊二	コンピュータ	シミュレーション
1995	石崎学	コンピュータ	ドリル＋シミュレーション
1998	滝沢昌弘	コンピュータ	シミュレーション
2002	村田緯和雄	コンピュータ	シミュレーション

b．教師による視覚的提示

表 2-1-2 は，教師による視覚的提示の先行研究を示している．このテクノロジー活用は，黒板とチョークでは表現しづらい幾何図形（三次元を含む），グラフ（三次元を含む）や動画などを大型プロジェクタや大型モニタで視覚的に提示する方法である．1994 年以降の研究が見られないのは，コンピュータのグラフィック作成ソフトやプレゼンテーションソフトが発達したことや教室におけるプロジェクタ設置の普及率が高くなったことが原因だと思われる．

表 2-1-2. 教師による視覚的提示に関する先行研究

年	著者	機種	カテゴリー	備考
1986	永嶋賢一，車浩	コンピュータ	視覚的提示＋シミュレーション	
1989	高木鋼一	コンピュータ	視覚的問題の提示	
	稲田康隆，他10名	コンピュータ	視覚的提示＋ヒントと確認	
	渡辺俊明	コンピュータ	視覚的提示	
1990	円福寺恭司	コンピュータ	視覚的提示	生徒による解答の視覚的検証にも併用
	緒方優，肥後昭治	コンピュータ	視覚的提示	
1991	井上正記	コンピュータ	シミュレーション	
1993	鈴木守	コンピュータ	シミュレーション	
1994	黒木史敏	コンピュータ	視覚的提示	生徒による解答の視覚的検証にも併用
	荒井久雄	コンピュータ	視覚的提示＋シミュレーション	
	鈴木守	コンピュータ	視覚的提示	
2001	水谷尚人	コンピュータ	作図ツール	

c．プログラミング

表 2-1-3 は，プログラミングに関する先行研究を示している．従前の学習指導要領では，プログラミングを通して数学内容や概念を理解することが強調されていたが，数学教育用ソフトやグラフ電卓の出現によって，実践的な研究は 1 件のみであった．

表 2-1-3. プログラミングに関する先行研究

年	著者	機種	カテゴリー
1989	石川順一	コンピュータ	関数のグラフ

d．生徒の主体的な数学的活動

表 2-1-4 は，生徒の主体的な数学的活動に関する先行研究を以下の 4 つのカテゴリーに分類したものである．

① 規則・性質の発見及び検証の道具

例えば，x^n-1を数式処理システムで因数分解して，整数nと因数との間に見られる規則や性質を発見し，その規則や性質が成り立つ理由を数学的に解決する数学的活動である．ここでのテクノロジーは，規則・性質を発見する道具，発見した規則・性質が成り立つことを検証する道具，さらに，証明するときに数学的処理を補助する道具として活用される．生徒がこの数学的活動よって発見する規則・性質は多様である場合が多く，オープンエンドアプローチの実践として展開することができる．

② 問題解決の道具

教師から与えられた課題を数学的に解決するとき，数学的処理を補助する道具としてテクノロジーを活用する数学的活動である．

③ 数学的モデリングを補助する道具

数学的モデリング過程において，実際の事象からデータを収集するための道具，データを数学的に処理する道具，得られた数学的結果を実事象で検証する道具と

してテクノロジーを活用する数学的活動である.

④ 作品制作の道具

例えば，関数を使ってのグラフアートや，プログラムを使って三次元アートを作成するなど，作品を制作する道具としてテクノロジーを活用する数学的活動である.

表 2-1-4 の結果から，我が国では，ストラスブールの会議の約 10 年後の，1990 年中旬からテクノロジーを活用した生徒主体による数学的活動の実践研究が盛んに行われるようになったことが分かる. さらに，数学的活動で活用されているテクノロジーは，グラフ電卓，数式処理システム，作図ツール，データ収集機（CBL／CDA[9]）と各種センサー，インターネットなど，数学的活動の内容によってテクノロジーの活用が多様化している. 特に，1998 年以降から数学的モデリングの実践研究が増えているのは，データ収集機（CBL／CDA）と各種センサーのハンドヘルド・テクノロジーが活用できるようになったことが大きな要因であると思われる（表 2-1-5).

表 2-1-4. 生徒の主体的な数学的活動に関する先行研究[10]

年	著者	機種	カテゴリー	活動の分類
1991	德峯良昭	コンピュータ	自作ソフト（統計処理）	問題解決
1993	滝井哲也	コンピュータ	自作ソフト（統計処理）	規則・性質の発見・検証
	大西正和	コンピュータ	自作ソフト（作図ツール）	規則・性質の発見・検証
1995	久保良宏，藤澤由美子	グラフ電卓	グラフ表示	規則・性質の発見・検証
	持永純子	グラフ電卓	グラフ表示	規則・性質の発見・検証
	垣花京子，清水克彦	コンピュータ	作図ツール	問題解決
1996	柳本哲	コンピュータ	シミュレーションソフト	数学的モデリング
	中込雄治	グラフ電卓	グラフ表示	作品制作
	片岡啓	グラフ電卓	グラフ表示	問題解決
	大澤弘典	グラフ電卓	測定データ＋回帰分析機能	数学的モデリング
	西村圭一	グラフ電卓	グラフ表示	問題解決
1997	辻宏子	コンピュータ	作図ツール	問題解決
	村上温夫，松本茂樹	コンピュータ	数式処理＋インターネット	規則・性質の発見・検証
	松本茂樹	コンピュータ	数式処理＋インターネット	規則・性質の発見・検証
1998	宮川健	グラフ電卓	CBL/CDA＋各種センサー	数学的モデリング
	西村圭一	グラフ電卓	CBL/CDA＋各種センサー	数学的モデリング
	佐伯昭彦，氏家亮子	グラフ電卓	CBL/CDA＋各種センサー	数学的モデリング
	鈴木純子	グラフ電卓	グラフ表示	規則・性質の発見・検証
	大澤弘典	グラフ電卓	測定データ＋回帰分析機能	数学的モデリング
1999	松嵜昭雄，礒田正美	グラフ電卓	測定データ＋グラフ表示	数学的モデリング
	永田裕一郎，他３名	コンピュータ	作図ツール	規則・性質の発見・検証
	大澤弘典	グラフ電卓	測定データ＋回帰分析機能	数学的モデリング
	深澤一幸	グラフ電卓	CBL/CDA＋各種センサー	数学的モデリング
2000	永井正洋，岡部恭幸	コンピュータ	インターネット	問題解決
2001	西村圭一	グラフ電卓	社会現象データ＋グラフ表示	数学的モデリング
2002	福沢俊之	コンピュータ	作図ツール	問題解決
	臼田三知永	コンピュータ	3Dグラフィックスソフト	作品制作
2003	佐伯昭彦，氏家亮子	グラフ電卓	CBL/CDA＋各種センサー	数学的モデリング
	水谷尚人	コンピュータ	簡易CADソフト	作品制作
	中村好則	グラフ電卓	CBL/CDA＋各種センサー	数学的モデリング
	小寺隆幸	グラフ電卓	自然現象データ＋グラフ表示	数学的モデリング
	西村圭一	グラフ電卓	測定データ＋最大値機能	数学的モデリング
2004	佐伯昭彦，黒木伸明	グラフ電卓	グラフ表示＋TABLE機能	規則・性質の発見・検証

[9] CBL（Calculator-Based Laboratory）はテキサス・インスツルメント社のデータ収集機で，CDA（Casio Data Analyzer）はカシオ社のデータ収集機である.

[10] 西村（1996）の実践は，生徒が発見した多様な関数関係を授業で展開するオープンエンドアプローチを取り入れている. しかし，授業でのテクノロジー活用は，生徒が発見した関数関係を数学的に探究または問題解決する道具として活用されているため，分類を「問題解決」とした.

表 2-1-5. 生徒の主体的な数学的活動に関する先行研究の発表件数

分類	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	計
規則・性質の発見・検証				2		2		2	1	1					1	9
問題解決		1				1	2	1			1		1			7
数学的モデリング							2		4	3		1		4		14
作品製作							1						1	1		3

(3) 考察

表 2-1-6 は，我が国におけるテクノロジー活用に関する実践的な研究件数の推移を表している．この表から，1995 年を境に，テクノロジー主導型から生徒主体による数学的活動へと研究の対象が移っていることが分かる．

表 2-1-6. テクノロジー活用に関する実践的な研究件数の推移

分類	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01	02	03	04	計
テクノロジー主導型CAI	1		1				3	2	5	2	2		1			1				1			17
教師による視覚的提示				1			3	2	1		1	3							1				11
プログラミング							1																1
生徒の主体的な数学的活動									1		2		3	5	3	5	4	1	1	2	5	1	33

次に，生徒の主体的な数学的活動の 4 つのカテゴリーの中から，本研究で実践する，① 規則・性質の発見及び検証の道具的活用と，③ 数学的モデリングを補助する道具的活用について考察する．

まず最初に，① 規則・性質の発見及び検証の道具的活用の研究について，表 2-1-7 に授業形態の分類を示す．授業形態は，村上他（1997）と松本（1997）以外は，通常の数学授業を補完する目的でテクノロジーが活用されている．次に，表の “Open／Closed” の欄は，数学的活動で使われた題材がオープン，または，クローズドであるかについて示したものであるが，以下の基準に従って分類した．

◆<u>クローズドな数学的活動</u>

生徒が発見する規則が授業で学習する内容に収束するように展開するクローズドな数学的活動のことである．例えば，グラフィングツール（グラフ電卓，数式処理ソフト，関数グラフソフトなど）を活用して，$y = ax^2 + bx + c$ の各係数にいろんな値を代入し，表示された複数のグラフを観察することで，各係数とグラフの移動・拡大・縮小との関係（規則）を生徒に発見させるといったタイプの数学的活動である．この数学的活動による授業は，授業内容が発散することなく教師の意図する内容に授業が展開されるが，生徒が発見した他の規則は取り扱われないといった欠点がある．

◆オープンエンドな数学的活動

生徒が発見する多様な規則を授業の中に積極的に取り入れるオープンエンドな数学的活動のことである．例えば，数式処理ソフトを活用して，$n=1,2,3,\cdots$に対するx^n-1の因数分解の結果を観察し，多様な規則［例えば，全てのnにおいて必ず$(x-1)$の因数が現れる，nが偶数の場合は必ず$(x+1)$の因数が現れる，などの多様な規則］を発見，さらに，規則の証明や反例を考えるといったタイプの数学的活動である．

これら２つのタイプの数学的活動は,学習内容・目的等に応じて実践すべきであり，必要に応じてクローズドな活動とオープンエンドな活動のバランスの取れた授業を展開すべきであると考える．

次に数学的活動の評価を考察すると，生徒の反応や生徒・教師のアンケートによる評価が多い．一方，村上他（1997），松本（1997），佐伯他（2004）の評価方法は，個々の生徒が記述した内容（発見や数学的に検証・証明した記述内容）を基に，個々の生徒が数学的活動で何を考え行動したかにつて分析している．こういった個々の生徒の活動内容を分析した研究は少なく,今後の研究に期待すべき評価方法であると考える．

表 2-1-7. 規則・性質の発見及び検証の実践研究での授業形態

年	著者	授業形態	対象	Open／Closed	評価方法
1993	滝井哲也	授業の補完	中学：２クラス（?）	オープン?	授業中の生徒の反応，授業後の生徒の感想
	大西正和	授業の補完	中学：１クラス（?）	オープン?	授業中の生徒の反応，授業参観した教師の意見
1995	久保良宏，藤澤由美子	授業の補完	中学：４クラス（284名）	クローズド＋オープン	アンケートによる意識調査
	持永純子	授業の補完	高校：１クラス（38名）	クローズド	授業者と参観者によるアンケート，生徒によるアンケート
1997	村上温夫，松本茂樹	公開実験	フリー	オープン	インターネットに投稿された記述内容
	松本茂樹	公開実験	フリー	オープン	インターネットに投稿された記述内容
1998	鈴木純子	授業の補完	高校：１クラス（38名）	クローズド	生徒によるアンケートとインタビュー
1999	永田裕一郎，他３名	トピック	中学：抽出（４名）	オープン	生徒の発話プロトコール
2004	佐伯昭彦，黒木伸明	授業の補完	高専：２クラス（80名）	オープン	ワークシート

次に，③ 数学的モデリングを補助する道具的活用の研究について，表 2-1-8 に授業形態の分類を示す．授業形態は，総合学習，課題学習，選択学習が多いが，数学的活動を長期間に渡って体系的に実践しているのは柳本（1996），佐伯他（1998），佐伯他（2003）である．これに対して，西村（1998），西村（2001），中村（2003）は，通常の数学授業の中でテクノロジーを活用した数学的モデリングを行っているのが特徴的である．なお，授業形態の「トピック」とは，特に授業形態が記述されていなかった論文，または，研究のために特別に行われた授業のことを指す．

次に授業の評価方法について考察すると，授業後の生徒の意見や感想を分析したも

のが多いが，上記の①規則・性質の発見及び検証の研究と比較すると，授業中の生徒の反応，発話プロトコール，生徒のプレゼンテーション内容，生徒のワークシートなどを基にした評価が多いことが分かる．このように，数学的モデリングにおける実践研究では，生徒が実際に行った数学的活動の内容を分析しているのが評価の特徴であると言える．

表 2-1-8．数学的モデリングを補助する実践研究での授業形態

年	著者	授業形態	対象	評価方法
1996	柳本哲	総合学習・課題学習	中学：１クラス（42名）	ワークシート，生徒の感想
	大澤弘典	総合学習・課題学習	中学：１クラス（28名）	授業中の生徒の反応＋プロトコール
1998	宮川健	トピック	高校：２クラス（62名）	事前と事後調査
	西村圭一	授業の補完	高校：１クラス（５名）	授業中の生徒の反応＋プロトコール，ワークシート
	佐伯昭彦，氏家亮子	総合学習	高専：３クラス（169名）	生徒のプレゼン内容とOHPシート
	大澤弘典	トピック	中学：希望者（４名）	授業中の生徒の反応
1999	松嵜昭雄，礒田正美	トピック	高校：２クラス（90名）	生徒の意見・感想
	大澤弘典	授業の補完	中学：１クラス（32名）	授業中の生徒の反応
	深澤一幸	トピック	高校：希望者（16名）	授業中の生徒の反応，授業後の生徒の感想
2001	西村圭一	授業の補完	高校：１クラス（40名）	授業後の感想
2003	佐伯昭彦，氏家亮子	総合学習	高専：２クラス（約100名）	生徒のプレゼン内容とOHPシート
	中村好則	授業の補完	高校（聾）：１クラス（４名）	実験中の発話，授業後の感想
	小寺隆幸	選択授業	中学：１クラス（25名）	授業中の反応，授業後の感想
	西村圭一	選択授業	中学：１クラス（12名）	授業中の発話，ワークシート，授業後の感想

４．まとめ

本節では，先行研究をもとに，本研究で取り扱う①数学的活動の捉え方と，②数学的活動を支援するテクノロジー活用方法について考察した．

その結果，本研究で取り扱う数学的活動とは，生徒の主体的な数学的活動を中心に授業を展開し，さらに，生徒が発見した規則や性質を教師主導の数学的活動に積極的に活用しながら，両方の数学的活動が相互に補完する形で授業を発展的に展開する活動として捉えることにした．特に，生徒が主体的に行う外的な数学的活動では，生徒の内面に「なぜだろう？」「不思議だな？」「調べてみたい！」といった知的好奇心を引き起こすための教具として，グラフ電卓とデータ収集機等のハンドヘルド・テクノ

ロジーを活用することにした．これらのハンドヘルド・テクノロジーは，知的好奇心を引き起こすだけではなく，生徒がハンドヘルド・テクノロジーとの間に良いパートナーシップを築き上げることにより，生徒はハンドヘルド・テクノロジーと対話を通して，外的な活動と内的な活動を相互に作用した数学的活動を行うことができると考えた．このような生徒主体による数学的活動を通して，生徒は身近な事象から規則や性質を発見し，さらに，既習事項と関連づけながら自らの力で数学を創りだす創造的な授業が展開できると考えた．

引用文献・参考文献

1) 秋田美代（2001）．数学教育における創造性の育成に関する研究．兵庫教育大学大学院連合学校教育学研究科博士論文．

2) 秋田美代，斎藤昇（2004）．「関数領域における創造性と構造的関連の理解との関係 －一次関数を対象として－」．全国数学教育学会誌．第 10 巻．pp.107-122．

3) 荒井久雄（1994）．「コンピュータを活用した数学の授業」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 76 巻．第 9 号．pp.23-28．

4) Burkhardt H.（1986）．"Computer-aware Curricula: Ideas and Realization". In Howson A.G. and Kahane J.-P.（Ed.）．The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching．ICMI Study Series．Cambridge University Press．pp.147-155．

5) デューイ（1957）．学校と社会．宮原誠一訳．岩波文庫．

6) デューイ（1975a）．民主主義と教育（上）．松野安男訳．岩波文庫．

7) デューイ（1975b）．民主主義と教育（下）．松野安男訳．岩波文庫．

8) 円福寺恭司（1990）．「基礎解析の微分法におけるパソコン利用」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 72 巻．第 1 号．pp.18-26．

9) Fey J.T.（1987）．数学教育とコンピュータ．成嶋弘監訳．東海大学出版会．

10) 深澤一幸（1999）．「テクノロジーを活用した教材開発に関する研究 －角度センサーの開発とその教材－」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 81 巻．第 11 号．pp.17-24．

11) 福沢俊之（2002）．「作図ツールを使った証明問題の解決活動における教師の支援のあり方について」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 84 巻．第 7 号．pp.10-18．

12) 藤岡典夫，保積均（1991）．「CAI 教材の作成とその活用 －解析分野の指導を通して－」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 73 巻．第 11 号．pp.13-21．

13) Harvey J.G., Waits B.K. and Demana F.（1995）．"The Influence of Technology on the teaching and Learning of Algebra". Journal of Mathematical Behavior. Vol.14. pp.75-109.

14) 平林一榮（1987）．数学教育の活動主義的展開．東洋館出版．

15) Holtzman W.H.編（1977a）．CAI システムⅠ：基礎編．木村捨雄，細井正訳．共立出版．

16) Holtzman W.H.編（1977b）．CAI システムⅡ：実践編．木村捨雄，細井正訳．共立出版．

17) Howson A.G. and Kahane J.-P.（1986）．The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching．ICMI Study Series．Cambridge University Press．植竹恒男監訳（1989）．数学教育とコンピュータ．日本数学教育学会編訳．聖文社．

18) 稲田康隆，他 10 名 (1989).「パソコンを使った指導の工夫」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 71 巻. 第 5 号. pp.9-13.

19) 井上正記 (1991).「数学の学習におけるパソコンの効果的な活用 －シミュレーションの特性を生かして－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 73 巻. 第 9 号. pp.7-13.

20) 石川順一 (1989).「パソコンによる関数のグラフ」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 71 巻. 第 7 号. pp.43-49d.

21) 石崎学 (1991).「ニューメディアを活用した指導法の研究 －自己学習力の育成を目指して－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 73 巻. 第 7 号. pp.35-44.

22) 石崎学 (1995).「数学科における生徒の探究心を養う指導法の研究 －感動をよび起こす教材ソフトの開発と実践－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 77 巻. 第 3 号. pp.2-10.

23) 垣花京子，清水克彦 (1995).「図形の証明問題での測定の役割 －コンピュータ環境下における生徒の活動分析を通して－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 77 巻. 第 11 号. pp.17-22.

24) 片岡啓 (1996).「高校「微分法」におけるグラフ電卓の活用」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第 7 号. pp.14-19.

25) 菊池兵一 (1969). 数学的な考え方を延ばす指導. 北辰図書.

26) 北村光一 (1993).「生徒の実態に応じた数学指導の改善 －学習意欲，興味・関心，主体性に乏しい生徒のために－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 75 巻. 第 7 号. pp.27-34.

27) 小寺隆幸 (2003).「事象の変化を差分でとらえる力を育てる中学校の関数指導 －生物の個体数の変化を素材として－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 85 巻. 第 11 号. pp.3-14.

28) 古藤怜 (1991). 算数・数学科における *Do Math* の指導. 東洋館出版.

29) 久保良宏，藤澤由美子 (1995).「中学校数学科におけるグラフ電卓利用の視点と授業例 －中学１．２年の関数指導を中心に－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 77 巻. 第 5 号. pp.2-10.

30) 黒木史敏 (1994).「コンピュータを利用した授業の工夫 －コンピュータの有効利用を主眼にして－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 76 巻. 第 9 号. pp.10-17.

31) 黒澤俊二 (1999). なぜ「算数的活動」なのか. 東洋館出版.

32) 教育工学研究成果刊行委員会（代表 大塚明郎）編 (1977). 教育工学の新しい展開. 第一法規.

33) Lane K., Ollongren A. and Stoutemyer D.R. (1986). "Computer-based Symbolic

Mathematics for Discovery". In Howson A.G. and Kahane J.-P. (Ed.). The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press. pp.133-146.

34) 松本博史，山上成美（1991).「授業書＜速度計＞ -教具・パソコンを利用した微分の導入-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 73 巻. 第 5 号. pp.24-33.

35) 松本茂樹（1997).「ICME8/TG4 における遠隔数学教育“公開実験”事例 -「数式処理システム」を用いた「発見的学習」による「x^n-1の因数分解」の探求-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 79 巻. 第 3 号. pp.9-15.

36) 松嵜昭雄，礒田正美（1999).「数学的モデリングにおける理解深化に関する一考察 -クランク機構の関数関係の把握-」日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 81 巻. 第 3 号. pp.20-25.

37) 水谷尚人（2001).「空間図形の指導における教具の効用に関する研究」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 83 巻. 第 5 号. pp.2-9.

38) 水谷尚人（2003).「簡易 CAD ソフトを用いた空間図形の学習指導に関する研究 -空間を把握する能力の育成を目指して-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 85 巻. 第 5 号. pp.12-18.

39) 宮川健（1998).「テクノロジーによる関数関係理解の改善に関する一考察 -事象のグラフ化におけるミスコンセプションに焦点をあてて-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第 1 号. pp.9-14.

40) 持永純子（1995).「グラフ電卓を活用した数学科の指導に関する研究 -問題づくりの授業を取り入れた「二次関数」の指導-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 77 巻. 第 9 号. pp.22-30.

41) 文部省（1999a). 高等学校学習指導要領.

42) 文部省（1999b). 高等学校学習指導要領解説 -数学編理数編-. 実教出版.

43) Murakami H. and Hata M. (1986). "Mathematical Education in the Computer Age". In Howson A.G. and Kahane J.-P. (Ed.). The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press. pp.85-94.

44) 村上温夫，松本茂樹（1997).「インターネット時代の数学教育 -遠隔教育，特に ICME8/TG4 での実験を中心として-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 79 巻. 第 3 号. pp.2-8.

45) 村田緯和雄（2002).「高校数学の課題と新教科「情報」」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 84 巻. 第 3 号. pp.28-33.

46) 中込雄治（1996).「小型コンピュータの活用で変化する指導形態について -ポケ

コンやグラフ電卓が数学の授業に及ぼす効用-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第 7 号. pp.9-13.

47) 中村好則 (2003).「聾学校におけるテクノロジー活用による実験・観察を取り入れた指導の効果 -高等部における「音の探究」の指導事例を通して-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 85 巻. 第 9 号. pp.18-25.

48) 長崎栄三編著 (2001). 算数・数学と社会・文化のつながり ―小・中・高校の算数・数学教育の改善を目指して―. 明治図書.

49) 永井正洋, 岡部恭幸 (2000).「分散型ネットワーク上における数学科共同学習の展開 -２校間での CSILE 型データベース使用と環境のデザイン-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 82 巻. 第 5 号. pp.13-22.

50) 永嶋賢一, 車浩 (1986). 図形指導におけるパソコンの利用について」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 68 巻. 第 7 号. pp.15-20.

51) 永田潤一郎 (1999).「数学でみる活動を重視した授業の構成（１） -車椅子とスロープの傾斜に注目した授業実践を通じて-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 81 巻. 第 5 号. pp.2-11.

52) 永田潤一郎 (2002).「数学でみる活動を重視した授業の構成（３） -評価の視点の具体化について-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 84 巻. 第 1 号. pp.2-12.

53) 永田裕一郎, 牧野智彦, 本多英之, 礒田正美 (1999).「中学校段階における作図ツールによる変換の指導可能性に関する研究 －反転変換を範例に移動から変換への考え方の発展を目指して－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 81 巻. 第 9 号. pp.10-16.

54) NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston. VA.

55) 根本博 (1999). 数学的活動と反省的経験. 東洋館出版.

56) 日本数学教育学会研究部編 (2001). 数学的な活動を通した数学基礎と総合的な学習. 東洋館出版.

57) 西村圭一 (1996).「探究活動中心の授業に関する一考察 -テクノロジーを利用して-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第 9 号. pp.21-26.

58) 西村圭一 (1998).「CBL／CDA を利用した三角関数の指導に関する研究 -「音」を題材として-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第 7 号. pp.11-19.

59) 西村圭一 (2001).「数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 83 巻. 第 11 号. pp.2-12.

60) 西村圭一 (2003).「数学的モデル化を取り入れた発展的な学習の授業実践 -紙パ

ックジュースを題材に−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 85 巻．第 11 号．pp.31-39.

61) 野嵜睦美，重松敬一（1992）．「コンピュータ利用による中学校数学指導の研究 −FCAI による等積変形の指導について−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 74 巻．第５号．pp.2-11.

62) 緒方優，肥後昭治（1990）．「高専における陰関数の存在定理の指導について」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 72 巻．第１号．pp.31-40.

63) 小川幹夫（1985）．「パソコン利用による数学問題演習（行列）の一試行」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 67 巻．第７号．pp.21-28.

64) 大石正佳，松尾吉晃，寺田文行（1992）．「CSC（Curriculum Supported by Computer）−創造力の養成に向けて−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 74 巻．第 11 号．pp.28-37.

65) 大西正和（1993）．「学校教育におけるコンピュータの利用 −図形指導を支援する教材ソフトの開発と活用−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 75 巻．第７号．pp.2-9.

66) 大澤弘典（1996）．「現実場面に基づく問題解決 −グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 78 巻．第９号．pp.16-20.

67) 大澤弘典（1998）．「数学的モデリングにグラフ電卓の利用を図った教材例 −テープレコーダのカウンター問題−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 80 巻．第９号．pp.30-33.

68) 大澤弘典（1999）．「肥満とやせの判定基準づくり −数学を核とした総合的な学習の時間の展開例−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 81 巻．第 11 号．pp.5-9.

69) 大内俊二（1993）．「Buffon の”針”の問題の”正多角形”への拡張 −理論・シミュレーション・実験のための教材として−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 75 巻．第９号．pp.27-32.

70) 佐伯昭彦（1996）．「米国の教育におけるテクノロジー活用 −T^3 国際会議と授業参観の感想−」．教育科学・数学教育．明治図書．No.465．pp.77-84.

71) 佐伯昭彦，氏家亮子（1998）．「数学的モデリングを重視した総合カリキュラム−身近な物理現象を数学的にモデル化する授業−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 80 巻．第９号．pp.10-18.

72) 佐伯昭彦，氏家亮子（2003）．「数学的モデル化過程における学習者の実データ解析方法−「お湯の冷め方」実験での数学的モデルの解釈・評価・より良いモデル化−」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 85 巻．第３号．pp.12-21.

73) 佐伯昭彦，黒木伸明（2004）.「極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動 ーグラフ電卓を活用した数学的活動ー」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第86巻. 第9号. pp.13-20.

74) 斎藤昇（1989）.「個の生徒の発達段階に応じて自動的に問題選定を行うCAI」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第71巻. 第5号. pp.27-32.

75) 斎藤昇（1991）.「学習意欲を高めさせるCAIのコースウェア設計」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第73巻. 第1号. pp.10-20.

76) 斎藤昇(1998).「創造性創出過程のモデルの構築とその実践」. 日本科学教育学会. 第21巻. 第2号. pp19-27.

77) 斎藤昇（1999）.「数学教育における創造性に関する態度尺度の開発 −小学校6年生・中学1・2・3年生を対象として−」. 全国数学教育学会誌. 第5巻. pp.35-46.

78) 斎藤昇，秋田美代（2001）.「数学教育における児童の創造性の発達に関する研究−小学校3・4・5・6年生を対象として−」. 全国数学教育学会誌. 第7巻. pp.19-30.

79) 斎藤昇，秋田美代（2002）.「数学における創造性と学習成績との関係（Ⅱ）−中学校2年「一次関数」を対象として−」. 全国数学教育学会誌. 第8巻. pp.177-186.

80) 斎藤昇，秋田美代（2003）.「数学の図形領域における創造性の発達に関する研究−図形の証明を対象として−」. 全国数学教育学会誌. 第9巻. pp.181-191.

81) 斎藤昇（2004）.「算数の図形領域における創造性の発達に関する研究−小学生・中学生・大学生を対象として−」. 全国数学教育学会誌. 第10巻. pp.95-106.

82) 坂本雄士（2002）.「課題学習の導入に関する一考察」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第84巻. 第5号. pp.13-19.

83) 瀬崎強一（1983）.「中学校数学指導におけるマイコン利用 ー基礎的な計算の個別指導を中心ー」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第65巻. 第5号. pp.2-6.

84) 志賀清一（1991）.「基礎的概念理解のためのコンピュータの活用について」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第73巻. 第9号. pp.23-32.

85) 島田茂編著（1977）. 算数数学科のオープンエンドアプローチ. みずうみ書房.

86) 島田茂編著（1995）. 新訂 算数数学科のオープンエンドアプローチ. 東洋館出版.

87) Steen L.A. （1986）. "Living with a New Mathematical Species". In Howson A.G. and Kahane J.-P.（Ed.）. The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press. pp.52-60.

88) 杉田孟（1989）.「VTR・CAI併用の学習指導 ー接線の指導ー」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第71巻. 第3号. pp.43-56.

89) 鈴木純子（1998）.「グラフ電卓を活用した数学科の指導に関する研究 −問題づく

りを取り入れた「三角関数」の指導-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第80巻. 第9号. pp.25-29.

90) 鈴木守（1993).「高校数学における論理的な思考力と直観力 -パソコンを用いた高校数学の教育理論-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第75巻. 第3号. pp.9-18.

91) 鈴木守（1994).「パソコンを用いた高校数学の教育理論と実践」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第76巻. 第11号. pp.22-29.

92) 橘川孚（1989).「数式処理システム APL Math の授業での利用 -数学Ⅰ 因数分解を中心として-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第71巻. 第9号. pp.24-34.

93) 高木鋼一（1989).「パソコンを利用した正弦定理・余弦定理の指導」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第71巻. 第1号. pp.35-39.

94) 高遠節夫, 栗本育三郎（1990).「画像・音声教材データベース（ASARI-1）の構築 -数学教育への応用-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第72巻. 第7号. pp.41-48.

95) 滝井哲也（1993).「個が表現できる授業 -コンピュータの活用を中心にして-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第75巻. 第3号. pp.2-8.

96) 滝沢昌弘（1998).「地図と数学」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第80巻. 第11号. pp.17-22.

97) Tall D. and West B.（1986). "Graphic Insight into Calculus and Differential Equations". In Howson A.G. and Kahane J.-P.（Ed.). The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press. pp.107-119.

98) 徳峯良昭（1991).「パソコンを利用して統計の授業をおもしろくする工夫」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第73巻. 第3号. pp.11-20.

99) 辻宏子（1997).「コンピュータ環境での作図活動の効果 -平面図形の学習での図の図形としての認識を促す場の検討-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第79巻. 第11号. pp.11-19.

100) 臼田三知永（2002).「3次元コンピュータグラフィックスを活用した数学教材の実践例」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第84巻. 第9号. pp.29-33.

101) Waits B.K. and Demana F.（2000). "Calculators in Mathematics Teaching and Learning Past, Present, and Future". In Burke M.J.（Ed.). 2000 Yearbook: Learning Mathematics for a New Century. NCTM. pp.51-66.

102) 渡辺俊明（1989).「パソコンを用いた学習指導の研究 -2年図形の基本的な性質編-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第71巻. 第7号. pp.28-42.

103) 柳本哲（1996).「中学校における数学的モデリングについて -給水タンクを事例

として－」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 78 巻．第 5 号．pp.2-9.

104) 吉田信也（1990）．「数学教育とパソコン －『ピタゴラスの定理の学習』を例として－」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 72 巻．第 11 号．pp.28-37.

2．2　グラフ電卓を活用した数学的活動

1．はじめに

前節で述べたように，我が国の数学教育におけるテクノロジー活用は，1990年中旬に，テクノロジー主導型から生徒の主体的な数学的活動へと研究の対象が移っていることが明らかになった．その一つの要因には，手のひらサイズで安価で，かつ，操作性が簡易なグラフ電卓が活用されるようになったことが挙げられる．

グラフ電卓を通常の数学授業に導入すると，授業及び生徒の数学的活動がどのように変化するのであろうか．グラフ電卓を生徒に与えれば，生徒は勝手に主体的な数学的活動を行うとは限らない．生徒がグラフ電卓を適切に活用する必要性を感じる教材開発，学習環境の設定，教師の役割など，授業の目的に応じた事前の準備が大切であると筆者は考える．

本節では，数学的活動におけるテクノロジーの対象を，本研究のタイプ1（通常の数学授業を補完する数学的活動）で活用するグラフ電卓に焦点を絞って，①数学教育におけるグラフ電卓活用の変遷，②グラフ電卓活用の利点，③グラフ電卓の誤表示の原因と教育的利用，の3つの観点について考察することにする．

2．数学教育におけるグラフ電卓活用の変遷

1986年に，日本のカシオによって世界で初めてのグラフ電卓 fx-7000G が技術者用に開発された（Harvey et. al.，1995；Waits and Demana，2000）．この技術者用に開発されたグラフ電卓がどのようにして数学教育界で活用されるようになったのであろうか．ここでは，グラフ電卓活用の先進国である米国の変遷について，さらに，我が国の変遷について述べる．

(1) 米国におけるグラフ電卓活用

表2-2-1に示すように，数学教育でのグラフ電卓の活用は，オハイオ州立大学の Waits B.K.教授と Demana F.教授が1986年に執筆した教材 Precalculus : A Graphing Approach の原案をもとに，オハイオ州コロンバスの高校で授業を行ったことから始まった．彼らは，数学の学習指導におけるグラフ電卓等のテクノロジー活用に関する教師教育と，テクノロジー活用の専門家や質の高いスタッフ養成を目的としたワークショップ T^3（Teachers Teaching with Technology）を1987年に設立し，さらに，プレカリキュラス

におけるコンピュータと電卓活用の講習会 C^2PC（Computers and Calculators in Precalculus）を 1988 年の夏に開催した（Demana and Waits，1992；Harvey et. al.，1995；Farrell，1996；Waits and Demana，2000）．

その翌年（1989 年）に，全米数学教師協議会（NCTM）が「学校数学のためのカリキュラムと評価の基準（スタンダード）」の第 9 学年から 12 学年のスタンダードで，グラフ電卓とコンピュータの活用を推奨したことにより，学校現場でのテクノロジー活用の推進が全国レベルで行われた．

1990 年代には，グラフ電卓の機能が高機能かつ多機能に発達した．例えば，ヒューレットパッカードは，世界に先駆けて数式処理（CAS）の機能を持ったグラフ電卓 HP-28S と HP-48SX を開発し，Dick（1992）は CAS 機能付きのグラフ電卓を“スーパー電卓（Super Calculator）”と呼んでいる．また，1994 年にはデータ収集機（CBL）と各種センサーのハンドヘルド・テクノロジーが開発され，実現象を取り扱った数学的活動が行えるようになった（Waits and Demana，2000）．さらに，1996 年には，CAS 機能と作図ツール（Cabri Geometry）を備えたグラフ電卓 TI-92 が開発され，手のひらサイズのテクノロジーで幾何学習の数学的活動が行えるようになった（Waits and Demana，2000）．

1995 年には，AP カリキュラスの試験の一部でグラフ電卓（数値的な微分積分計算と方程式の根を求めることができるグラフ電卓）の使用が可能となった（瀬沼，1995a；Simonsen and Dick，1997；Dunham，1998）．また，NCTM が 2000 年に発表したスタンダード 2000 においても，グラフ電卓とコンピュータの活用が推奨され，さらに，CBL を活用した事例も紹介された．

表 2-2-1．米国におけるグラフ電卓活用の研究及び実践に関する変遷

年	グラフ電卓に関する主な出来事
1986	オハイオ州立大Bert K. Waits教授とFranklin Demana教授によってグラフ電卓を活用した教材"Precalculus: A Graphing Approach"が開発された．
1987	グラフ電卓などのテクノロジーを活用した教育に関するワークショップT^3(Teachers Teaching with Tecnology)が開催された．
1988	オハイオ州立大学でC^2PC (Calculator and Computer Precalculus Curriculum) 講習会が開催された．
1989	NCTMの９学年から１２学年のスタンダードでグラフ電卓活用が推奨された．
1992	CAS付きのグラフ電卓が" Super Calculator" と呼ばれた．
1994	CBLが開発された．
1995	APカリキュラスの一部の問題でグラフ電卓の使用が可能となった．
1996	CASと作図ツール付きのグラフ電卓TI-92が開発された．
2000	NCTMの９学年から１２学年のスタンダード2000においてもグラフ電卓とコンピュータのテクノロジー活用が推奨された．さらに，CBLの活用も紹介された．

Dunham (1998) は，グラフ電卓に関する 97 本の先行研究（学術論文，口頭発表の論文，博士論文など）を総括した論文の中で，グラフ電卓等の携帯型の装置が他のテクノロジー以上に使われるようになった原因を３つあげている．

①NCTM のような全国組織の推奨

②SAT や AP カリキュラスのような標準化テストでの電卓の使用許可

③低価格，携帯性，使用の簡易性

一方，Dunham (1998) は，グラフ電卓の普及が高まった反面，NCTM が要求するレベルまで教育実践が達していない原因を以下のように指摘している．

①電卓の台数不足とカリキュラム教材の不足

②現職教員の教育機会の欠如

③指導計画のための時間の不足

④活用に関する教師の動機づけの欠如

⑤限られた行政支援

さらに，Dunham (1998) は，グラフ電卓を使用することに対する教師の不安を４つあげている．

①生徒の計算技能の低下

②生徒の松葉づえ的な電卓利用

③生徒の基礎概念の未習得

④電卓が利用できる場面のみの効果

これに対して，Dunham (1998) は，今後解決すべき課題を３つ述べている．

「解決すべき３つの課題は，以下の通りである．

(1)研究が電卓利用の基礎となり推薦を支援することについて，一般の人（親や教師）が理解するための手段を講ずることによって，我々のサイド（問題点）をより良い情況にする．

(2)現職教育や教育プログラムは，電卓活用の指導方法を教師に訓練するだけでなく，数学と数学指導についての教師の信念を刺激するように計画する．

(3)継続的な教師教育と支援を提案する．」[1]

(2) 我が国におけるグラフ電卓活用

表 2-2-2 は，グラフ電卓に関して我が国で最初に行われた主な出来事の一覧を示している．グラフ電卓が我が国で初めて紹介されたのは，1993 年に開催された文部省の情報教育指導者講座で，カシオが世界で始めてグラフ電卓を開発した７年後のことで

[1] カッコ内は筆者が加筆した．

ある（瀬沼，1995a；瀬沼，1997）．この1993年には，文部省の科学研究費補助金による研究（瀬沼，1993），日数教の数学教育論文発表会での口頭発表（倉井，1993），さらに，修士論文の発表（加藤，1993；小出，1993）など，この年は我が国におけるグラフ電卓活用研究の元年とも言える．

1994年には，瀬沼の科研費による研究成果が数学教育関係の雑誌に連載された（瀬沼，1994b；瀬沼，1994c；桁元・瀬沼，1994；久永・瀬沼，1994；久保・瀬沼，1994；森田・瀬沼，1994；筒井・瀬沼，1994；倉井・瀬沼，1994）．また，グラフ電卓とデータ収集機（CBL）を活用した数学的モデリングの教材開発に関する修士論文が発表された（鹿野，1994）．

1995年には，グラフ電卓に関する著書が出版され（寺田他編，1995；一松編，1995），さらに，グラフ電卓を活用した実践の成果が研究論文として日本数学教育学会の学会誌に掲載された（久保他，1995；持永，1995）．

1996年には，金沢工業高等専門学校の新入生全員がグラフ電卓TI-82を購入し，通常の数学授業と総合学習「数物ハンズオン」でグラフ電卓を活用した授業が行われた（氏家他，1996；佐伯他，1996；佐伯他，1999；佐伯，2000）．これにより，これまでは研究授業やトピック的な授業でグラフ電卓が活用されていたのに対し，グラフ電卓を活用した実践が実際のカリキュラムにおける授業で実施されるようになった．さらに，1997年にはグラフ電卓活用で先駆的な実践を行っている教員約150名が集まり，第1回のT^3 Japanが東京で開催され，現職教員による実践研究の情報交換が行われた．

1998年には，グラフ電卓とデータ収集機（CBL）を活用した数学的モデリングの実践成果が研究論文として学会誌に掲載された（宮川，1998；西村，1998；佐伯他，1998a）．さらに，文部省の科学研究費補助金によってグラフ電卓とデータ収集機（CBL）を活用した研究が行われた（佐伯，2000）．

1999年に公表された高等学校指導要領解説−数学編 理数編−では，生徒の主体的な数学的活動をより充実するためのテクノロジー活用を推奨しており，その中に「グラフ表示などができる電卓」の文言が記述された（文部省，1999）．2000年には，福井工業高等専門学校の新入生全員が数式処理付きのグラフ電卓TI-89を購入し，通常の数学授業で活用された（井之上，2000；坪川他，2002）．さらに，2002年には，数式処理付きのグラフ電卓TI-92またはVoyage200を活用した中高一貫校用の教科書が出版され，大阪府の清風中学校・高等学校の数学授業で使用された（公庄他，2002a；公庄他，2002b；公庄他，2002c；公庄他，2002d；公庄・森田他，2002；公庄・高野他，2002；公庄他，2004a；公庄他，2004b；公庄他，2004c）．

以上ことから 1993 年に我が国に初めて紹介されたグラフ電卓活用は，最初の３年間は研究授業やトピック的な授業が行われていたが，1996 年を境に，実際のカリキュラムに位置づけられた数学授業での活用，文部省の学習指導要領での推奨，さらに教科書の出版など，数学授業におけるグラフ電卓活用の基礎が整いつつあるように見える．しかし，１．１節で示した国立教育政策研究所（2004）の調査結果を参照すると，テクノロジーを活用する数学教員が 2.6%であることは事実である．この要因はどこにあるのだろうか？ Dunhaum（1998）が米国の課題を示した以外に，もっと大きな課題が我が国に存在するように思われる．

表 2-2-2. 我が国におけるグラフ電卓活用の研究及び実践に関する変遷

年	グラフ電卓に関する主な出来事
1986	カシオが世界で始めて技術者向けにグラフ電卓fx-7000Gを開発した．
1993	文部省の情報教育指導者講座でグラフ電卓が紹介された．
	科研費によるグラフ電卓の研究が行われた．
	日本数学教育学会・第26回数学教育論文発表会でグラフ電卓を活用した実践研究が報告された．
	修士論文でグラフ電卓を活用した実験・観察型の教材開発の研究が行われた．
1994	グラフ電卓に関する論文が数学教育関係の雑誌（明治図書）に連載された．
	修士論文でグラフ電卓とCBL/CDAをを活用した実験・観察型の教材開発の研究が行われた．
1995	グラフ電卓に関する著書が出版された．
	日本数学教育学会誌にグラフ電卓を活用した研究論文が掲載された．
1996	金沢高専の新入生全員がグラフ電卓TI-82を購入した．
	金沢高専でグラフ電卓とCBLを活用した総合学習が実施された．
1997	第１回T^3 Japan年会が東京で開催された．
1998	日本数学教育学会誌にグラフ電卓とCBL/CDAを活用した研究論文が掲載された．
	科研費によるグラフ電卓とCBL/CDAを活用した研究が行われた．
1999	高等学校学習指導要領解説-数学編・数理編-に「グラフ表示などができる電卓」の文言が記述された．
2000	福井高専の新入生全員がCAS付きグラフ電卓TI-89を購入した．
2002	グラフ電卓（TI-92またはVoyage200）を活用した中高一貫校用の教科書が出版された．

３．グラフ電卓活用の利点

清水（1997）は，テクノロジーの活用の利点について数学的現象の視覚化（visualization）と実験・観察アプローチの二点をあげている．数学的現象の視覚化（visualization）とは，従来の代数的解法や演繹的証明などの抽象的記述をグラフや幾何図形などの具体的な表現で表すことである．さらに，実験・観察アプローチとは，視覚化された具体物を観察することにより生徒が帰納的に規則や性質を発見しながら数学を創り上げていく数学的活動のことである．清水が述べる実験・観察アプローチは，1991 年に米国の大学の数学教育で注目された実験室アプローチ（Laboratory Approach）を参考にしている．Leinbach（1991）は，著書「微積分の指導のための実験室アプローチ」において，実験室アプローチに必要な五つの活動（①観察［Observation］，②同定［Identification］，③探究［Exploration］，④分析［Analysis］，

⑤説明［Explanation］）を指摘している．

数学的現象の視覚化（visualization）と実験・観察アプローチの利点は，グラフ電卓を活用した場合も同様である．以下では，①グラフ電卓の効果的な活用方法と②教室内での数学的活動への影響について先行研究をもとに考察する．

(1) グラフ電卓の効果的な活用方法

ここではグラフ電卓の効果的な活用方法について，①帰納的な数学的活動による規則・性質の発見，②多表現の関連づけによる理解の深化，③生徒の主体的な数学的活動による数学間のつながり，の三つの観点について考察する．なお，これらの観点は，それぞれが独立したものではなく，それぞれが相互に関連して数学的活動を行うことが重要であると考える．

ａ．帰納的な数学的活動による規則・性質の発見

Skemp（1986）は，彼が主張する数学学習の第一原理で，概念を理解するために適切な事例を示すことの重要性を次のように述べている．

> 「ある個人がすでに持っている概念より高次な概念は，単なる定義によっては理解されない．唯一の方法は，適切な事例の集合を示すことである．」（p.30）

グラフ電卓等のテクノロジー活用によって，手作業では膨大な時間や労力を必要とした数学的実験や観察が瞬時にかつ容易に行えるため，Skemp の述べる数学的活動が可能となった．つまり，生徒はテクノロジーと対話をしながら主体的に実験・観察し，数学的な規則・性質を帰納的に発見し，仮説を立て，さらに，仮説を数学的に証明する数学的活動が行えるようになったのである．

Banchoff（1991）は，複数の実例を実験・観察する探究を「実例の族の探究（Investigating Families of Examples)」として，その有効性について次のように述べている．

> 「（テクノロジーを活用した）実験室的経験は，無関係な事例の集まりを取り扱うのではなく，むしろ実例の族を取り扱う方が特に効果的であることが分かった．[2]」（p.5）

この探究方法は，グラフ表示機能を使って関数の規則・性質を観察する探究と，数式処理の因数分解や展開の機能を使って代数の規則・性質を観察する探究の二通りがある．磯田（1997）は前者を「関数族の探究」と述べているため，本研究では後者を

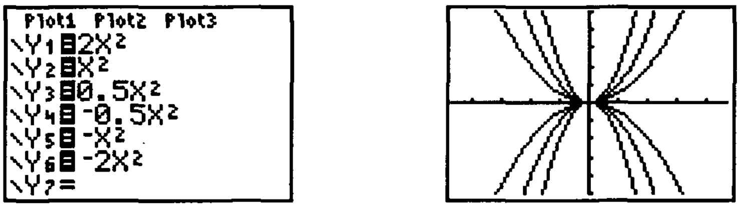
[2] カッコ内の文章は筆者が加筆した．

「代数族の探究」とする．以下に「関数族の探究」と「代数族の探究」について先行研究をもとに考察する．

①関数族の探究

図 2-2-1 に，2次関数における関数族の探究例を示す．図に示した $y=ax^2$ の関数族では係数 a と放物線の開きとの関係，さらに，$y=x^2-3x+c$ の関数族では係数 c と y 軸方向の平行移動または y 切片との関係についての探究であり，生徒はグラフ電卓に表示された複数のグラフを観察・実験することで規則を発見する事例である．

【$y=ax^2$ の関数族】



【$y=x^2-3x+c$ の関数族】

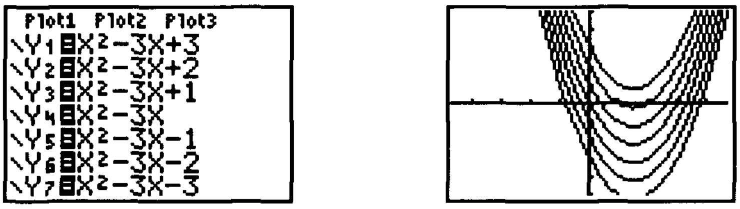


図 2-2-1．**関数族の探究の事例**

NCTM（1989）は関数族の探究[3]を以下のように推奨している．

> 「全ての生徒は，係数 a，b，c，d のさまざまな変化に対して $y=af(bx+c)+d$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフとどのように関連するかをユーティリティで探究すべきである．」(p.155)

さらに，Hector（1992）は，教科書による関数族の事例には限りがあるのに対して，グラフ電卓では多くの事例を探究できるため，代数的表現とグラフ的表現を関係づけることができることを次のように述べている．

> 「簡単な操作トレーニングにより，生徒はグラフ電卓を使って曲線の一群（families）をグラフ化することができ，代数的表現とグラフ的表現の関係を発見することができる．（中略）．教科書は，$y=sinx$ と $y=sin2x$ のグラフを示すであろう．しかし，生徒が一般形式 $y=asin(bx+c)+d$ での作業で，グ

[3] NCTM（1989）のスタンダードでは，classes of functions（関数の類）と記述している．スタンダード 2000 においてもテクノロジーを活用した関数族の探究を推奨している．

ラフがどのように変化するかを観察するために係数 a, b, c, d に異なった値を選んで行う探究は強いインパクトがある．従って，生徒はグラフ的表現と代数的表現の関係を発見するように求めることができる．」(pp.131-133)

我が国においてもグラフ電卓を活用した関数族の探究が実践されており，その研究成果が研究論文として公表されている（久保・藤澤，1995；持永，1995；鈴木，1998；公庄，1999；中村・森本，1999；井之上，2000；佐伯・黒木，2004a；梅野，2004b)．これらの研究では，生徒が発見した規則・性質は多様であり，しかも，教師が授業前に想定していた規則・性質以上のことを生徒が発見しており，オープンエンドアプローチ的な数学的活動が行われている．さらに，公庄（1999)，佐伯・黒木（2004a)，梅野（2004b）では，生徒が発見した規則について，生徒自らの力で既習事項を使って規則が成り立つ理由を記述しているのが特徴的である

本論文では，関数族の探究に関して，3．2節で極方程式を使った正葉曲線の規則を探究する数学的活動，さらに，3．3節で3次関数のグラフの種類と規則を探究する数学的活動について詳しく報告する．

②代数族の探究

代数族の探究は，1985年3月に数学教育国際委員会（ICMI）が開催したストラスブール会議の報告書の中でコンピュータの数式処理システムを使った事例が紹介されている（Lane K., Ollongren A. and Stoutemyer D.R., 1986; Murakami H. and Hata M., 1986)．グラフ電卓に数式処理システムが付加されるようになってから代数族の探究がグラフ電卓上で行えるようになった．図2-2-2に，因数分解における代数族の探究例を示す．この探究では x^n-1 をグラフ電卓で因数分解して，整数 n と因数との間に見られる規則や性質を発見し，その規則や性質が成り立つ理由を数学的に解決する数学的活動である．

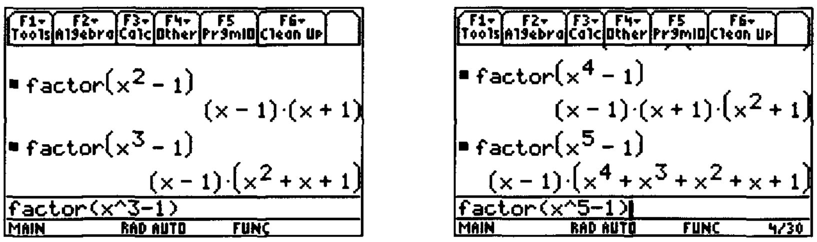


図 2-2-2．因数分解における代数族の探究例

我が国におけるグラフ電卓を活用した代数族の探究の実践研究は，公庄（2000)，阿蘇（2002)，坪川他（2002）によって成果が報告されている．これらの実践についても，オープンアプローチ的な数学的活動が行われている．

b．多表現の関連づけによる理解の深化

NCTM（1989）の第9学年から第12学年のスタンダード6（関数）では，関数の学習において全ての生徒が代数的表現，グラフ的表現，数値的表現の多表現（multiple-representation）を利用して関数を表現し分析することができ，かつ，表現間を相互に翻案できることを要求している．

同様に，第9学年から第12学年のスタンダード13（微分積分学の概念的理解）では，グラフ的な観点と数値的な観点の両方に基づく微分積分学の概念についてのインフォーマルな探究を含む必要性を求めており，このためのテクノロジー活用を次のように述べている．

> 「このスタンダードでは，全ての生徒または大学進学を希望する生徒に対して，高等学校の微積分学のフォーマルな学習を主張しているのではない．むしろ，微積分学の中心的な概念 − 極限，曲線下の面積，変化率，さらに接線の傾き − を体系的であるがインフォーマルに探究する機会を生徒に要求する．これらの中心的概念は，関数の深い理解や，現実現象についての問題を表現し解決するための有用性に貢献するものである．
> （略）
> 教授は，電卓とコンピュータテクノロジーの両方を活用して，高度に探究的で，かつ，数値的経験と幾何的（グラフ的）経験に基づくべきである．教授活動は，操作的（代数的）テクニックを発達させるよりも微分積分学の確かな概念的な土台を生徒に与えることを目的とすべきである．[4]」（p.180）

Dick（1992）は，数式処理付きのグラフ電卓が多表現を関連づけた微積分の学習に合理的であることを次のように述べている．

> 「手で長たらしい計算やグラフを描画することは時間の浪費であることから，代数的表現に頼るのは最も効果的なアプローチではない．数値的表現とグラフ的表現へのアクセスへの改善によって，スーパー電卓（数式処理付きグラフ電卓）は生徒が数値的かつグラフ的手法を活用することを合理的にした．それらは多表現を強調する微積分カリキュラムのためにオーダーメイドした装置のように思える．」（p.148）

さて，グラフ電卓を使って微分積分学の概念的な土台をどのようにインフォーマルに生徒は探究できるのであろうか．ここでは，グラフ電卓で多表現を関連づけながら

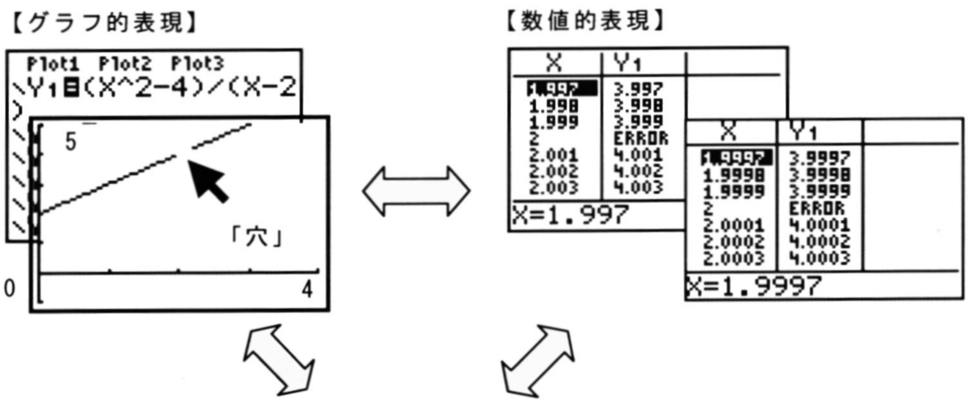
---

[4] カッコ内は筆者が加筆した．

関数の振る舞いを探究する数学的活動として，①local behavior の探究（例えば，関数の連続性，不連続，穴［removable discontinuity］，漸近線，凹凸，接線など）と②end behavior の探究[5]（例えば，$x \to \infty$など）について考察する．

① local behavior **の探究**

図 2-2-3 に，グラフ電卓を活用したグラフ的表現，数値的表現，さらに，代数的表現を関連づけた local behavior の探究の具体例を示す．教科書では，代数的表現による解法のみが記述されているのに対して，グラフ電卓のグラフ機能を活用すると $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ のグラフが直線であり，しかも，$x = 2$ で不連続であることが視覚的に観察することができる．さらに，グラフ電卓の TABLE 機能で関数の値が限りなく 4 に近づいていることを数値的に観察することができる．このように，$y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ の不連続点をグラフ的，数値的，代数的に関連づけて探究することで，生徒は local behavior に関するより深い理解を得ることができる．



【代数的表現】

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

図 2-2-3．**多表現の関連づけによる** local behavior **の探究**

我が国におけるグラフ電卓を活用した local behavior の探究の実践研究は，佐伯 (1998b)，佐伯・黒木（2004a)，佐伯・黒木（2004b）によって報告されている．

本論文の３．１節では，多表現を関連づけた local behavior の探究を通して極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動について詳しく報告する．

---

[5] NCTM のスタンダード，および，スタンダード 2000 では，global behavior と記述している．

② end behavior の探究

図 2-2-4 に，グラフ電卓を活用したグラフ的表現，数値的表現，さらに，代数的表現を関連づけた end behavior の探究の具体例を示す．この事例は，Hector (1992)，Waits and Demana（1998），NCTM（2000）の事例を参考に作成した．

図のように，分数関数 $f(x)=\dfrac{2x^2+11x+6}{x-2}$ のグラフをグラフ電卓で広範囲に表示すると，グラフが直線的に近似することがグラフ的に観察することができる．さらに，グラフ電卓の TABLE 機能で x の絶対値を大きくすると，y の値が一次関数的に増加していることが数値的に観察することができる．このことを代数的に確認するために分数関数を $f(x)=2x+15+\dfrac{36}{x-2}$ に変形し $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{36}{x-2}=0$ であることを適用すると，分数関数 $f(x)=\dfrac{2x^2+11x+6}{x-2}$ は $x\to\pm\infty$ において一次関数 $g(x)=2x+15$ に近似できることが分かる．このように，$f(x)=\dfrac{2x^2+11x+6}{x-2}$ の $x\to\pm\infty$ における振る舞いをグラフ的，数値的，代数的に関連づけて探究することで，生徒は end behavior に関するより深い理解を得ることができる．

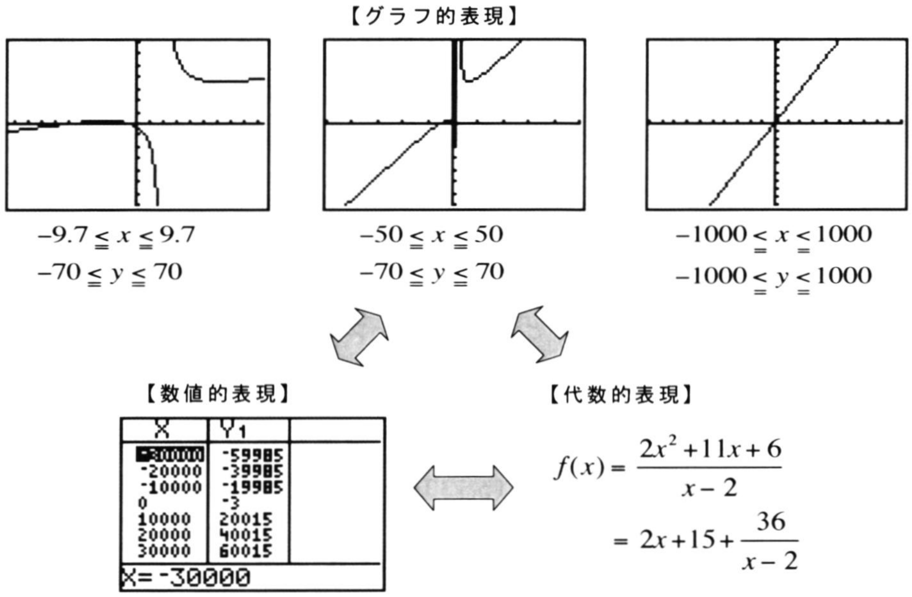


図 2-2-4. 多表現の関連づけによる end behavior の探究

我が国におけるグラフ電卓を活用した end behavior の探究の実践研究は，片岡 (1996)，佐伯（1998b）によって成果が報告されている．特に片岡の研究では，生徒が増減表を使って描いたグラフとグラフ電卓の表示結果が異なった場合，生徒が持っている知識

との「葛藤」が生じ，手計算（代数的表現）と電卓（グラフ的表現）との往復を繰り返しながら $x \rightarrow \pm\infty$ の場合のグラフの振る舞い（end behavior）を生徒自らが調べており，生徒主体による数学的活動として高く評価できると考える．

c．テクノロジー活用による数学内容間のつながり

NCTM（2000）のスタンダード2000では，数学をより深く理解するために数学内容間のつながりを認識し使うための道具として，テクノロジーの活用の必要性を次のように述べている．

「（内容が）豊かな問題，数学的思考を支援する環境，さらに，様々な数学的ツールすべてのものへのアクセスは，数学をつながりのある全体とみなす生徒の能力に貢献する．[6]」（p.359）

これまでの先行研究を調べると，テクノロジーを活用した数学内容間のつながりには以下の２通りの研究があると思われる．

①概念形成及び学習経験のつながり

②生徒の主体的な数学的活動におけるつながり

以下に，これらのつながりについて考察する．

①概念形成及び学習経験のつながり

グラフ電卓活用の利点は前述したように，1)関数族の探究による規則・性質の発見と 2)多表現を関連づけたグラフの振る舞いを探究することである．Hector (1992) は，初等関数の学習でこれらの学習方法を経験することが，微分積分学の学習基盤としてつながることを次のように述べている．

「（グラフ電卓を活用する）目的は，初等関数における規則とグラフについて豊かな基盤となる経験を育成すること，かつ，グラフを伴った規則を認識させることである．これらの経験は，後で学習する極限，連続，導関数，曲線による面積，さらに，グラフ的に導入することができる他の微分積分の概念に対して，しっかりした基盤を形成する．[7]」(p.133)

同様に，Demana 他 (1993) は，教科書「Precalculus Mathematics – A Graphing Approach –」の分数関数の学習目的でテクノロジーを活用による分数関数と極限の学習との関連づけを次のように述べている．

「生徒は，分数関数の end behavior モデルと漸近線を記述することで極限の概念を

---

[6] カッコ内は筆者が加筆した．

[7] カッコ内は筆者が加筆した．

調べる．」（p.215）

西村（1996）は，オープンエンドな課題を取り扱って，生徒が考えた１次・２次・三角・逆三角・指数・無理・分数関数，および，それらの合成関数の関係について，グラフ電卓を使ってグラフ的・数値的に問題解決した授業事例を報告している．オープンエンドアプローチでは，生徒が発見した規則や関係の中で，未学習の規則や関係を授業で取り扱うことが困難であることが指摘されているが，西村の研究では，グラフ電卓の活用により未学習の関数関係をグラフ的・数値的に調べる数学的活動が行われている．西村の研究成果によって，グラフ電卓等のテクノロジーを活用した関数の指導展開，さらに，関数内容間のつながりを強調した発展的な指導の可能性が示された．

②生徒の主体的な数学的活動におけるつながり

グラフ電卓を活用した生徒の主体的な数学的活動に関する研究では，生徒が自らの力で既習事項を積極的に活用して問題解決した事例や，未学習事項を発展的に活用した事例が報告されている（例えば，久保・藤澤，1995；中込，1996；公庄，1999；坪川，2002；梅野，2004a；梅野，2004b；佐伯・黒木，2004a；佐伯・黒木，2004b）．

久保・藤澤（1995），中込（1996），坪川（2002），梅野（2004a）は，グラフ電卓の画面をキャンバスにして複数の関数方程式を使って絵（アート）を作成するグラフ・アートの実践を報告している．彼らの論文に掲載された生徒の作品を見ると，教師指導型の座学では見られないような生徒の生き生きとした数学的活動が見えてくる．しかも，単なる「お絵書き」ではなく，べき関数，無理関数，指数関数，対数関数，三角関数などの多様な関数が使用されており，作品の創作過程には既習の数学的知識が関連づけて駆使されていることが窺われる．梅野（2004a）は，生徒の作品を詳細に分析した結果，グラフ・アートの教育上の意義を次のように述べている．

「(ⅰ)作成しようとする図形の構成曲線は，どのようなタイプの関数のグラフかを判断すること．

(ⅱ)そのグラフが図形の該当部分に表示されるようにするには，どのような平行移動や対称移動を行えばよいかを考えること．

(ⅲ)係数等を適切に決めて，その関数の式を具体的に決定すること．

(ⅳ)複数のグラフで構成されるときは，その接続箇所の座標を決めること．」（p.194）

また，生徒が積極的に既習事項をつなげる活動以外に，作品を作成する数学的活動で未学習の内容を発見した事例も報告されている（久保・藤澤，1995）．

公庄（1999），梅野（2004b），佐伯・黒木（2004a），佐伯・黒木（2004b）は，生徒

が発見した規則・性質が成り立つ理由を生徒が自主的に考察し，生徒自らが既習事項をつなげながら問題解決した実践例を報告している．

本論文では，生徒自らが既習事項をつなげて問題解決した事例として，3．2節で極方程式を使った正葉曲線の規則を探究する数学的活動，さらに，3．3節で3次関数のグラフの種類と規則を探究する数学的活動について詳しく報告する．

(2) 教室内での数学的活動への影響

NCTM（1989）第9学年から第12学年のスタンダードでは，テクノロジーを活用した新しい教室活動（Classroom dynamics）の展開を求めている．

> 「豊かなテクノロジー環境に応じた指導パターンの変化における最も基本的な意義は，教師と生徒が本来のパートナーとなって数学的な考えを展開し，数学的問題を解決する新しい教室活動を展開することである．」(p.128)

実際に数学授業でグラフ電卓が活用されると，生徒の数学的活動にどのような影響があるのであろうか．ここでは，まず最初に，我が国における先行研究を参考に，グラフ電卓を活用した授業の数学的活動への影響についてまとめてみる[8]．

①数学に対する興味・関心・意識の向上

（久保・藤澤，1995；井之上，2000；梅野，2001；梅野，2002；梅野，2003；佐伯・黒木，2004a；佐伯・黒木，2004b）

②数学学習の楽しさ

（久保・藤澤，1995；梅野，2004a）

③数学学習に対する不安の減少

（梅野，2002）

④数学理解の深まり

（梅野，2002；梅野，2003）

⑤主体的な数学的活動［問題解決活動，探究活動］

（久保・藤澤，1995；中込，1996；西村，1996；梅野，2004a；梅野，2004b；佐伯・黒木，2004a）

⑥発展的な数学的活動

（久保・藤澤，1995；片岡，1996；西村，1996；佐伯・黒木，2004a；佐伯・黒木，2004b）

⑦創造的な数学的活動

---

[8] ここにあげた項目は，生徒に対するアンケート調査，授業を実施した教師に対するアンケート調査，授業を実施した教師の観察結果など，それぞれの先行研究によって異なる．

（中込，1996；佐伯・黒木，2004a；佐伯・黒木，2004b）

⑧生徒間，生徒-教師間の数学的コミュニケーションの増加

（持永，1995；西村，1996；阿蘇，2002；坪川，2002）

⑨生徒とグラフ電卓との対話による数学的活動［外的活動と内的活動の相互作用］

（持永，1995；片岡，1996；佐伯・黒木，2004a；佐伯・黒木，2004b）

①ー④は数学学習に対する生徒の態度に関する影響，⑤ー⑦は教師主導型の講義から生徒の主体的な数学的活動への変化に伴う学習活動に関する影響，さらに，⑧ー⑨は教室内の学習環境に関する影響についての評価であり，それぞれの項目が好意的に変化したことが報告されている．

Dunham（1998）は，グラフ電卓に関する文献レビューの教室活動（Classroom dynamics）の項目で，「グラフ電卓の最も大きな影響の一つは，教室の雰囲気の変化とNCTM（1989）が構想する学習環境の確立である」と述べ，グラフ電卓活用による教室活動への影響をまとめている．以下では，その文献レビューの中から，グラフ電卓を活用した6人の授業をビデオで分析したFarrell（1996）の研究と，1年間グラフ電卓を活用した27人の教師に対するインタビュー内容を詳細に分析したSimonsen and Dick（1997）の研究について簡単に紹介する．

【Farrellの研究】

この研究の目的は，高等学校のプレカリキュラスの教室で，教師と生徒の役割と活動を観察し分析することであった．この研究の対象となった6人の教師は，高等学校の数学に電卓とコンピュータの導入を企画しているカリキュラム開発プロジェクトに参加した教師の中から採用され，全員が C^2PC 教材を使ったプレカリキュラス数学の授業をほぼ1年間授業した教師であった．連続した10時間の授業がビデオ撮影され，実験的な研究授業やトピック的な話題を扱った特別授業ではなく，各教師には通常の授業の手順と方法を最低限守ることが要求された．教室で使用した教科書は，グラフィングユーティリティ（電卓またはコンピュータ）を使用することを前提とした教科書で，全ての生徒はグラフ電卓とコンピュータに頻繁にアクセスした．さらに，教師は，グラフィングユーティリティを接続できるオーバーヘッドディスプレイ装置を使用した．

この研究の分析方法は，撮影された最初の6時間分の授業を5分間隔のセグメントに分割し，テクノロジー活用のセグメントにおける教師と生徒の役割と活動と，非活用のセグメントにおける教師と生徒の役割と活動についての比較が行われた．なお，テクノロジーを活用したセグメントは56%で[9]，テクノロジーを活用しなかったセグ

[9] テクノロジー活用の内訳は，グラフ電卓のみを活用したのは43%，コンピュータのみを活用し

メントは44％であった．以下に研究成果を簡単に示す．

表2-2-3に，教師の役割と教授活動についての分析結果を示す．

教師の役割に関しては，テクノロジー活用の方が，課題設定と説明の役割が減り，生徒の相談と生徒と一緒に探求する役割が増えた．特に，相談の役割は，全ての教師において，テクノロジー活用が非活用を上回っていた．説明の役割は，６人中５人の教師において，テクノロジー活用が非活用を下回っていた．課題設定の役割は，６人中４人の教師において，テクノロジー活用が非活用を下回っていた．

次に，教師の教授活動に関しては，テクノロジー活用の方が，説明（講義）の活動が少なくなり，生徒のグループ活動がかなり増えたことが明らかになった．

表 2-2-3．教師の役割と教授活動における比較

［教師の役割］

	Without Technology	With Technology
Manager	100	96
Task setter	82	75
Explainer	91	75
Consultant	19	43
Fellow investigator	6	17
Resource	3	5

［教授活動］

	Without Technology	With Technology
Exposition	59	41
Practice	53	56
Discussion	5	5
Investigation	27	25
Applied mathematics	6	7
Problem solving	3	5
Group work	2	29

表2-2-4に，生徒の役割と学習活動についての分析結果を示す．

生徒の役割に関しては，テクノロジー活用の方が，課題設定，生徒同士の相談，他の生徒と一緒に探究する活動が増えた．つまり，テクノロジーを活用することにより，生徒が主体的に課題を設定し，生徒同士がコミュニケーションをしながら共に探究を行う役割が増えたことが明らかになった．

生徒の学習活動に関しては，テクノロジー活用の方が，講義形式が減り，記述活動（電卓，コンピュータにデータを入力する活動を含む），探究活動，問題解決活動，及び，高いレベルの思考活動が増えたことが明らかになった．

表 2-2-4．生徒の役割と学習活動における比較

［生徒の役割］

	Without Technology	With Technology
Manager	0	6
Task setter	10	27
Explainer	6	11
Consultant	7	20
Fellow investigator	0	11
Resource	2	2

［学習活動］

	Without Technology	With Technology
Didactic	98	87
Symbolizing	44	91
Investigating	54	87
Problem solving	2	20
Higher level thinking	29	36

たのは27％，さらに，両方のテクノロジーを活用したのが30％であった．

以上の結果から，テクノロジーを活用することにより，教師の役割や教授活動が変わり，生徒の教室での活動（グループ作業，探究活動，問題解決活動）が活発になったことが明らかになった．さらに，それらの活動は，生徒同士，教師，テクノロジーとのコミュニケーションによって活性化されており，NCTM（1989）が提唱する「教師と生徒が本来のパートナーとなって数学的な考えを展開し，数学的問題を解決する新しい教室活動」が展開されたと言える．

【Simonsen and Dick の研究】

この研究の目的は，数学教室におけるグラフ電卓の影響に関する教師の認識を調査することであった．1991 年に 36 校の高等学校に数式処理付きのグラフ電卓（HP-48S）が 30 台と OHP 用投影装置が寄付され，寄付された教師は，１日の講習会の参加が義務づけられ，希望者には１週間の講習会が開講された．１年後の 1992 年３月から４月の４週間の間にインタビューが行われ 27 人の教師がインタビューに応じた．何れの教師も教師経験が約 15 年で，修士が 19 名で，博士が１名であった．さらに，26 名（男性 19 名：女性７名）が１日講習会を受け，15 名が１週間の講習会を受けた．１週間の講習会を受講しなかった教師の６名は，既に他の機種を授業で活用していた．インタビューは電話で行われ，５つの項目（①グラフ電卓利用の利点，②グラフ電卓利用の欠点，③授業活動，④カリキュラムと評価，⑤教師支援と展開）についての自由回答式の質問（open-ended questions）が行われた．

表 2-2-5 にインタビュー内容の分析結果を示す．この表は，授業でのグラフ電卓の活用頻度（(a)週に１度以上活用する［８名］，(b)週に１度は使わないが１ヶ月に１度以上活用する［10 名］，(c)特定の簡単な話題に散発的に活用する［９名］）よってグループ化されている．以下に分析結果を簡単にまとめる．

・<u>グラフ電卓利用の利点（Advantages of Calculator Use）</u>

「細かい計算からの解放（67%）」，「即時フィードバックの有効性（63%）」，「視覚化の向上（56%）」の項目で好意的な結果が得られた．これらの項目に関しては，グループ間における差は見られなかった．

・<u>グラフ電卓利用の欠点（Disadvantages of Calculator Use）</u>

「授業実行の財政困難とアクセス不足（59%）」は，寄付された 30 台のグラフ電卓が各学校の数学教師で分配（シェア）されたため，生徒一人に１台の使用や宿題での使用が出来なかったことが原因であった．「セキュリティの問題（52%）」は，グラフ電卓を良く使う教師が問題としてあげている．さらに「操作練習に使用する時間（41%）」と「電卓依存への不安（37%）」は，グラフ電卓を良く使う教師はあまり問題としていなく，むしろグラフ電卓を使わない教師が問題として取り上げている．

・授業活動（Classroom Dynamics）

全ての項目においてグループに関わらず好意的な意見が多かった．つまり，グラフ電卓を活用することにより，教師主導型の授業が減り，オープンエンドな問題，発見学習における生徒の主体的な数学的活動が増え，さらに，共同学習などによって生徒がお互いに助け合いながら学習できることを多くの教師が認めていることが明らかになった．

・カリキュラムと評価（Curriculum and Evaluation）

「教材の準備時間の増加（78%）」と「数学的深まりの増加（59%）」を認めた教師が多かった．多くの教師は，グラフ電卓の活用が教師の評価手続にほとんど影響がないことを示した．さらに，試験でのグラフ電卓活用に関心を示した教師が多かった．特に，数学的深まりを認めた半分以上の教師は，テスト問題がオープンエンドで数学的思考を引き出す問題に変わったことを述べた．また，グラフ電卓を週に1回以上使用したクラスの生徒は，試験でのグラフ電卓の使用を認めたのに対して，残りのあまり使用しなかったクラスの生徒は，試験でのグラフ電卓の使用を認めなかった．この結果は，グラフ電卓を活用した授業，または，活用しない授業によって，生徒の試験に対する考え方に差異があることを示している．これは，グラフ電卓使用と非使用によってテスト問題の内容が異なることに要因があると思われる．

「AP 試験への影響（22%）」が低いのは，調査を行った 1991 年～1992 年には AP 試験でのグラフ電卓の使用が認められていなかったためである[10]．このため，グラフ電卓の必要性を感じていた当時の教師が，AP 試験終了後の4週間の授業で集中的にグラフ電卓を使用した授業を行ったことが Simonsen の論文で報告されている．

・教師支援と展開（Professional Support and Development）

「テクノロジー指向の教材の要求（74%）」，「教師教育の追加要求（71%）」，「教師ネットワークの要求（52%）」を認めた教師が多かった．Simonsen は，教師教育と支援を行うためには，(a)グラフ電卓の適切な台数，(b)カリキュラムに直接的に関連する教材，(c)技術的な補助，(d)教師の専門的な向上と展開を目指した支援環境，の必要性を述べている．

[10] 1995 年から AP 試験の一部でグラフ電卓の使用が認められた．

表 2-2-5. グラフ電卓の使用頻度における教師の認識結果

傾向	1週間に1回以上	1週間に1回未満で1ヶ月に1回以上	特定の簡単な話題における散発的な使用	合計
	n=8	*n=10*	*n=9*	*n=27*
電卓利用の利点				
細かい計算からの解放	6	6	6	18
即時フィードバックの有効性	6	5	6	17
視覚化の向上	5	4	6	15
関係づけの展開	4	2	2	8
電卓利用の欠点				
授業実行の財政困難とアクセス不足	4	6	6	16
セキュリティの問題	6	3	5	14
操作練習に使用する時間	1	6	4	11
電卓依存への不安	2	4	4	10
授業活動				
教師主導型の減少	6	4	7	17
オープンエンド問題の増加	5	4	6	15
発見学習の促進	5	3	6	14
共同学習の増加	7	6	5	18
生徒の数学に関する議論の増加	5	3	5	13
生徒の参加の増加	4	5	4	13
生徒の意気込みの増加	4	5	4	13
カリキュラムと評価				
準備時間の増加	6	7	8	21
数学的深まりの増加	5	6	8	19
技術的公開の必要性	1	2	4	7
AP試験への影響	1	2	3	6
教師支援と展開				
テクノロジー指向の教材の要求	6	6	8	20
教師教育の追加要求	5	7	7	19
教師のネットワークの要求	4	5	5	14
電卓の追加要求	5	2	3	10
継続的な教師のｺﾐｭﾆｹｰｼｮﾝの要求	3	3	1	7

以上に示した先行研究の調査結果から，グラフ電卓を活用した授業では，教師主導型の授業が減り，オープンエンドな問題，発見学習における生徒の主体的な数学的活動が増え，さらに，それらの活動は，生徒同士，教師，テクノロジーとのコミュニケーションによって活性化された授業活動が展開されたことが明らかになった．

本論文の第３章で示すグラフ電卓を活用した授業においても同様な結果が観察されているが，本論文では，特に生徒とグラフ電卓とのコミュニケーションに焦点を絞り，生徒がグラフ電卓をパートナーとしてどのように数学的活動を行ったかについての分析を行った．

４．グラフ電卓の誤表示の原因と教育的利用

上記において，グラフ電卓は，手のひらサイズで操作性が簡単なことから，関数グラフの特徴を掴む数学的活動として有効に活用することができ，かつ，教室内の活動も活発になることを示してきた．一方，グラフ電卓には，液晶の制約や性能上の問題から誤った結果を表示することがあり，生徒に誤解を与える危険性も含んでいることが，これまでの先行研究で指摘されている（Demana and Waits, 1988 ; Goldenberg, 1989; Dion, 1990 ; Dick, 1992 ; Hector, 1992 ; Donley and Elizabeth, 1993 ; Williams, 1993 ; Hansen, 1994; Ward, 1998 ; Krumpe and Keiser, 2003）. この現象に対して，Dick (1992)，Hansen (1994)，Krumpe and Keiser (2003) は，グラフ電卓の誤表示を逆に利用することで，生徒に興味・関心を持たせながら矛盾点を数学的に解決する指導方法について述べている．ここでは，①グラフ電卓の誤表示の種類，②誤表示の原因，③誤表示の教育的利用，について先行研究をもとに考察する．

(1) グラフ電卓の誤表示の種類

Dick (1992) は，グラフ電卓を活用する際に必要な技能として①数値的技能（Numerical Skills)，②グラフ的技能（Graphical Skills)，③記号的技能（Symbolic Skills)，④翻案技能（Translation Skills）[11]を挙げている．その中のグラフ的技能では，液晶画面の制約の問題や不適切な Window の設定による誤表示に対処すべき教育的観点を三つ強調している．以下に，具体的な事例をもとに簡単に説明する．

1．有限な表示画面外に存在するグラフ

図 2-2-5 に示すように，３次関数 $y=x^3-6x^2+10$ のグラフを $-5\leq x\leq 5$，$-10\leq y\leq 10$ の範囲で Window を設定すると，放物線のようなグラフが描かれる．このように，設定した Window 外に存在する３次関数のグラフの一部が表示さ

[11] 数値的表現，グラフ的表現，代数的表現の３つの表現間を互いに関連づけて言い換える技能のことである．

れていないため，３次関数のグラフの特徴を理解していない生徒が誤解をする可能性がある．

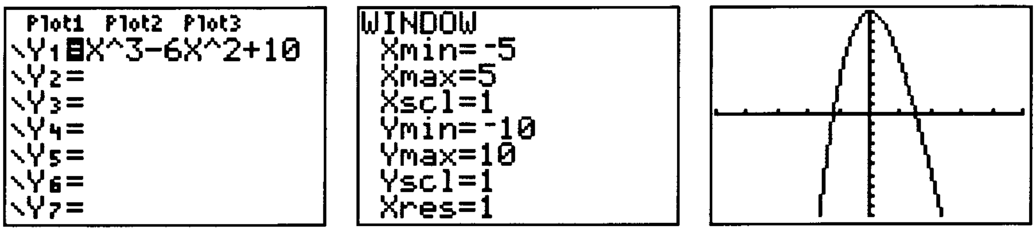


図 2-2-5. Window 設定外に存在するグラフ

２．スケール（ズームインはグラフの広域情報を，さらに，ズームアウトはグラフの局所情報を不明瞭にする）

前述の図 2-2-4 では，分数関数 $f(x)=\dfrac{2x^2+11x+6}{x-2}$ の Window 設定範囲を広げてズームアウトすると一次関数 $g(x)=2x+15$ に近似できることをグラフ的に示した．一方，Window 設定範囲を小さくしてズームインすると，不連続点の振る舞いや曲線が直線に近似できることをグラフ的に示すことができる．このようにグラフ電卓では，ズームインとズームアウトによって，end behavior と local behavior の振る舞いを観察できる利点があるが，このことを過度に一般化すると逆に生徒に誤解を与える可能性がある．

３．数値的精度の限界（丸めエラーは，座標を描くためのピクセルを離散的に選択することに影響を与える）

図 2-2-6 に示すように，３次関数 $y=x^3+1$ と $y=x^3+x^2+1$ のグラフを $-5\leq x\leq 5$，$-10\leq y\leq 10$ の範囲で Window を設定すると，$x=0$ 近辺で二つのグラフが一致しているように見える．しかも，$y=x^3+x^2+1$ のグラフは極値がないようなグラフに見える．これが数値的精度の限界による誤表示である．

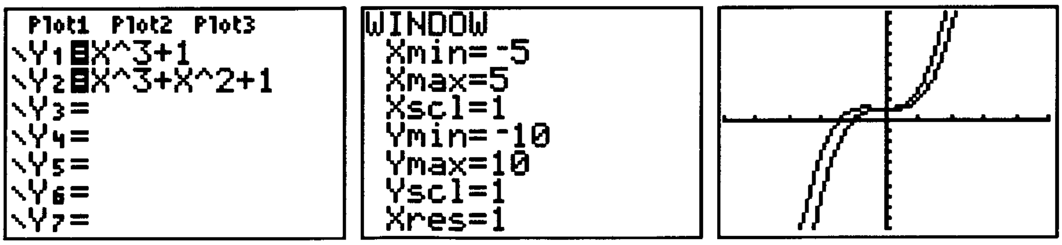


図 2-2-6. 数値的精度の限界による誤表示

本論文の３．３節では，３次関数の種類を発見する数学的活動において，自分で作成した増減表とグラフ電卓の結果を比較しながら不適切な Window 設定を適切なグラフに修正した事例を報告する．

(2) **誤表示の原因**

ここでは①取り除き得る不連続点（removable discontinuity）と②周期関数の事例をもとに，グラフ電卓の誤表示の原因について考察する．

まず最初に，グラフ電卓のグラフ表示の仕組みについて説明する．図 2-2-7 に示すように，グラフ電卓（TI-83）の液晶画面は，横が 95 個のピクセル数，縦が 63 個のピクセル数で構成されている[12]．グラフ表示の仕組みは，横が 95 個のピクセルに対応する x の値を関数に代入して得られた座標を結んで表示している．ここで，左から n 番目のピクセルに対する x の値を X_n（ただし $1 \leq n \leq 95$ の整数）と定義すると，定義域 $[X\min, X\max]$ におけるピクセルの間隔は 94 個であるため，X_n は初項 $X_1 = X\min$，公差 $d = \dfrac{X\max - X\min}{94}$ の等差数列であることが分かる．つまり，一般項 $X_n = Xmin + \dfrac{X\max - Xmin}{94} \times (n-1)$ をもとに，グラフ電卓は $(X_n, f(X_n))$ と $(X_{n+1}, f(X_{n+1}))$ を計算し，この２点を結んでグラフを描いている（ただし $1 \leq n \leq 94$）．

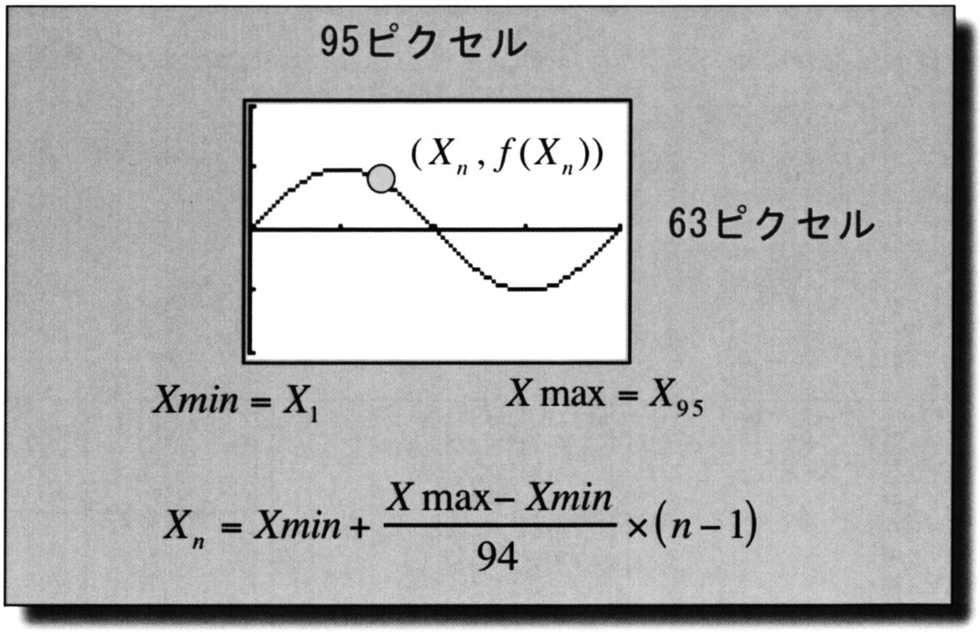


図 2-2-7. グラフ電卓のグラフ表示の計算方法

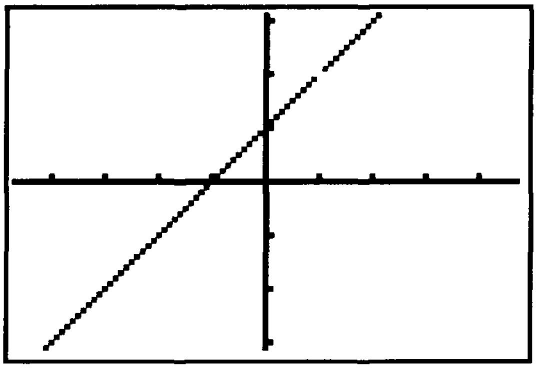
[12] TI-89 は，横が 159 個のピクセル数，縦が 77 個のピクセル数で構成されている．このため，文中に書かれている等差数列の数字 95 を 159 に，さらに，数字 94 を 158 に置き換えて式を適用すると，TI-89 でも同じ現象が生じる．

a．取り除き得る不連続点（removable discontinuity）の誤表示

Dick（1992）は，取り除き得る不連続点（removable discontinuity）を持つ関数のグラフの「穴」[13]は，Window の設定によって3種類（①1ピクセルが欠ける，②“ジャンプ”または“ドロップ”のように急激に変化する，③連続に見える）のグラフが表示されることを示している．以下に分数関数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ を事例に3種類のグラフを示す．

①1ピクセルのみが欠ける「穴」

図 2-2-8 は，グラフの表示範囲が $-4.7\leqq x\leqq 4.7$，$-3.1\leqq y\leqq 3.1$ の場合のグラフと「穴」付近のピクセルの座標を示している．xの表示範囲が $-4.7\leqq x\leqq 4.7$ であるため，横方向に1ピクセル増えるとxの増分が 0.1 となる．このため，左から 58 番目のピクセルのx座標が1で，これに対応するy座標が「値なし」となり不連続点が表示されないことになる．一方，yの表示範囲が $-3.1\leqq y\leqq 3.1$ であるため，縦方向に1ピクセル増えるとyの増分も 0.1 となる．この結果，座標$(1,2)$に対応する1ピクセルのみが表示されないことになる．



$-4.7\leqq x\leqq 4.7$，$-3.1\leqq y\leqq 3.1$

n	Xn	f(Xn)
1	-4.7	3.7
:	:	:
56	0.8	1.8
57	0.9	1.9
58	1.0	ERROR
59	1.1	2.1
60	1.2	2.2
:	:	:

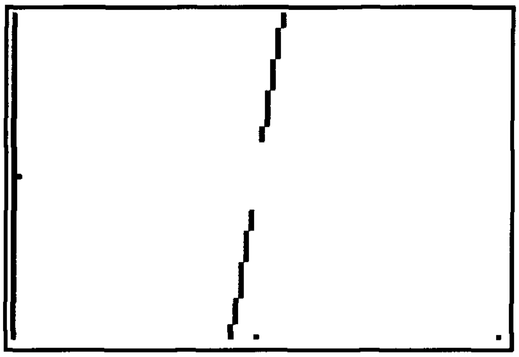
図 2-2-8．1ピクセルが表示されない「穴」の例

②急激にジャンプする「穴」

図 2-2-9 は，グラフの表示範囲が $0\leqq x\leqq 2$，$1.9\leqq y\leqq 2.1$ の場合のグラフと「穴」付近のピクセルの座標を示している．xの表示範囲が $0\leqq x\leqq 2$ であるため，左から 48 番目のピクセルのx座標が1で，これに対応するy座標が「値なし」となり不連続点が表示されないことになる．一方，yの表示範囲が $1.9\leqq y\leqq 2.1$ であるのに対して,「穴」前後の 47 番目と 49 番目のピクセルのy座標が $1.97872\leqq y\leqq 2.02130$

[13] Dick（1992），Murdock, J. 他（1998）と Hornsby, J.他（1999）は，removable discontinuity のことを「穴（hole）」と記述している．

であるため，縦軸方向の約２割が表示されないことになる．このため急激にジャンプしたように見える．



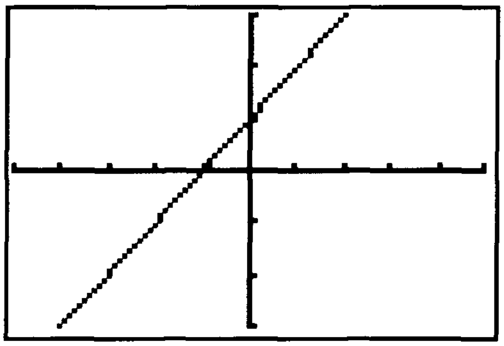
$0 \leqq x \leqq 2$， $1.9 \leqq y \leqq 2.1$

n	Xn	$f(Xn)$
1	0.00000	1.00000
:	:	:
46	0.95745	1.95745
47	0.97872	1.97872
48	1.00000	ERROR
49	1.02130	2.02130
50	1.04260	2.04260
:	:	:

図 2-2-9. 急激にジャンプする「穴」の例

③連続に見える「穴」

図 2-2-10 は，グラフの表示範囲が $-5 \leqq x \leqq 5$， $-3 \leqq y \leqq 3$ の場合のグラフと「穴」付近のピクセルの座標を示している．xの表示範囲が $-5 \leqq x \leqq 5$ であるため，左から 57 番目のピクセルの座標が $(0.95745,\ 1.95745)$ で，58 番目のピクセルの座標が $(1.06380,\ 2.06380)$ となり，これらの２点を結ぶため不連続点である「穴」が連続して見えることになる．



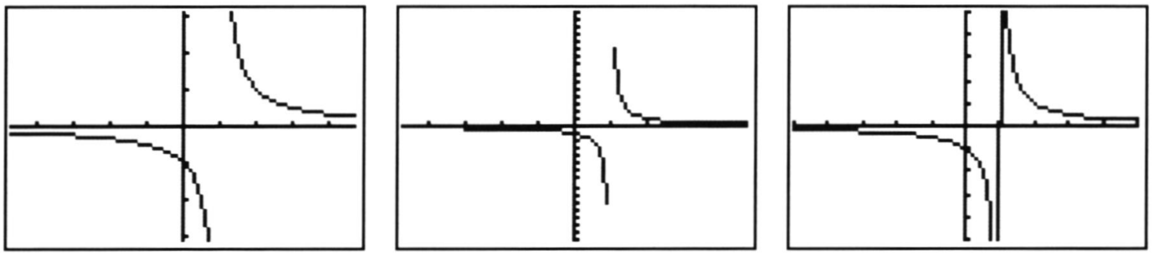
$-5 \leqq x \leqq 5$， $-3 \leqq y \leqq 3$

n	Xn	$f(Xn)$
1	-5.0	-4.0
:	:	:
56	0.85106	1.85106
57	0.95745	1.95745
58	1.06380	2.06380
59	1.17020	2.17020
:	:	:

図 2-2-10. 連続にみえる「穴」の例

以上のように，不連続点である「穴」は，Window の設定によって３種類のグラフが表示される．図 2-2-11 に $y = \dfrac{1}{x-1}$ のグラフを示すように，漸近線の場合も同様に３種類のグラフが表示される．最初のグラフは正常なグラフ，二番目のグラフは yの表示

範囲を広げると二つの曲線が途切れるグラフ，三番目のグラフは二つの曲線が直線で結ばれるグラフである．これらの誤表示も上記で示したグラフ電卓のグラフ表示の仕組みに原因がある．



$-4.7 \leqq x \leqq 4.7$，$-3.1 \leqq y \leqq 3.1$　$-4.7 \leqq x \leqq 4.7$，$-15 \leqq y \leqq 15$　$-5 \leqq x \leqq 5$，$-5 \leqq y \leqq 5$

図 2-2-11．漸近線に関する誤表示

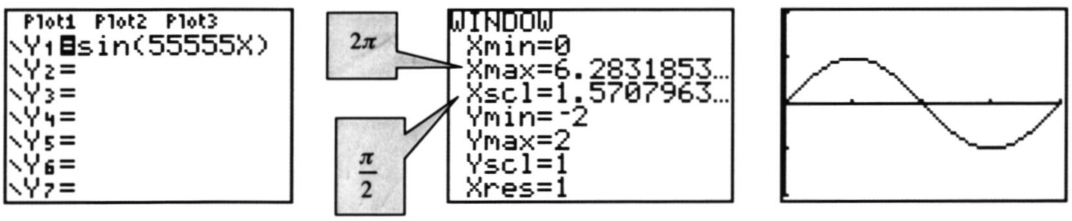
上記の考察から，不連続点の「穴」や漸近線が教科書どおりに綺麗に表示できるのは，特殊な Window 設定が必要であることが分かる．実際に，本論文の３．１節で行った極限の数学的活動では，生徒たちは連続に見える「穴」のグラフや双曲線が直線で結ばれる現象を沢山観察していた．しかし,生徒達はグラフ的な観察だけではなく，TABLE 機能を使って数値的に「穴」や漸近線が生じることを確認したり，また，分数関数の方程式を変形して代数的に確認している生徒もいた．このように，グラフ電卓を使った数学的活動では，グラフ的表現の観察だけではなく，３つの表現を総合的に観察・検証する必要があることが明らかになった．

ｂ．周期関数の誤表示

ここでは周期関数の周期性によって，グラフ電卓が誤ったグラフを表示する４つの事例とその原因について示す．

①事例１：関数

$y = sin55555x$ のグラフが $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で１周期しか表示されない誤表示．



【誤表示の原因】

- $f(x) = \sin x$，　$g(x) = sin55555x$，　$Xmin = 0$，　$X\max = 2\pi$　とする．
- X_n　を求める．

$$X_n = Xmin + \frac{X\max - Xmin}{94} \times (n-1)$$

$$= 0 + \frac{2\pi - 0}{94} \times (n-1) = \frac{2\pi}{94} \times (n-1) = \frac{\pi}{47} \times (n-1)$$

● $f(X_n)$，$g(X_n)$ を比較する．

(1) $f(X_n) = sin\,X_n = sin\left\{\frac{\pi}{47}(n-1)\right\}$

(2) $g(X_n) = sin\,55555X_n = sin\left\{55555 \times \frac{\pi}{47}(n-1)\right\} = sin\left\{\left(1182\pi + \frac{\pi}{47}\right)(n-1)\right\}$

$$= sin\left\{\underbrace{1182\pi(n-1)}_{591(n-1)\ \text{回転}} + \frac{\pi}{47}(n-1)\right\} = sin\left\{\frac{\pi}{47}(n-1)\right\} = f(X_n)$$

ゆえに，$f(X_n) = g(X_n)$ であるから，$y = sin55555x$ のグラフは $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で 1 周期しか表示されないことが明らかである．

【$y = sin55555x$ 以外の関数】

● $h(x) = sin(mx)$ とする．

● $h(X_n) = sin(mX_n) = sin\left\{m \times \frac{\pi}{47}(n-1)\right\}$

$$= sin\left\{\left(\underbrace{2\pi p}_{p(n-1)\ \text{回転と仮定}} + \frac{\pi}{47}\right) \times (n-1)\right\}$$ と仮定すると

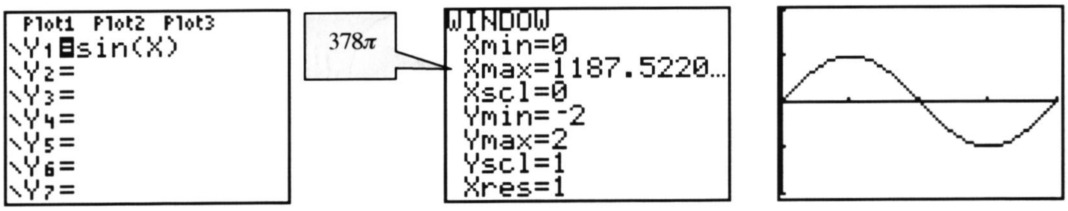
$$m \times \frac{\pi}{47}(n-1) = \left(2\pi p + \frac{\pi}{47}\right)(n-1)$$

p	*m*
1	95
2	189
3	283
：	：
591	55555
：	：

∴　$m = 94p + 1$ の場合，1 周期しかグラフが表示されない．

②事例２：関数

$y = sin\,x$ のグラフが $0 \leqq x \leqq 378\pi$ の範囲で１周期しか表示されない誤表示．



【誤表示の原因】

- $f(x) = sin\,x$， $Xmin = 0$， $X\max = 378\pi$ とする
- X_n を求める．

$$X_n = Xmin + \frac{X\max - Xmin}{94} \times (n-1)$$

$$= 0 + \frac{378\pi - 0}{94} \times (n-1) = \frac{378\pi}{94} \times (n-1) = \frac{189\pi}{47} \times (n-1)$$

- $f(X_n)$ を求める．

$$f(X_n) = sin\,X_n = sin\left\{\frac{189\pi}{47}(n-1)\right\} = sin\left\{\left(4\pi + \frac{\pi}{47}\right)(n-1)\right\}$$

$$= sin\left\{4\pi(n-1) + \frac{\pi}{47}(n-1)\right\} = sin\left\{\frac{\pi}{47}(n-1)\right\}$$

$2(n\text{-}1)$ 回転

$\therefore\ f(X_n) = sin\left\{\frac{\pi}{47}(n-1)\right\}$ となり，

これは事例１の $Xmin = 0$， $X\max = 2\pi$ の場合と同じ値になるので $f(x) = sin\,x$ は，定義域 $[0, 378\pi]$ で１つの波が表示される．

【定義域 $[0, 378\pi]$ 以外の範囲】

- $X\max = W$ とすると $X_n = \frac{W}{94}(n-1)$
- $f(X_n) = sin\left\{\frac{W}{94}(n-1)\right\}$

$$= sin\left\{\left(2\pi p + \frac{2\pi}{94}\right) \times (n-1)\right\} = sin\left\{\frac{\pi}{47} \times (n-1)\right\}$$

と仮定すると

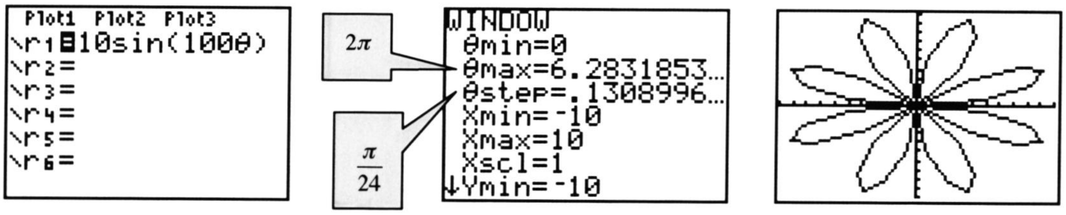
$$\frac{W}{94}(n-1) = \left(2\pi p + \frac{2\pi}{94}\right)(n-1) \text{ だから } \frac{W}{94} = 2\pi p + \frac{2\pi}{94}$$

$\therefore\ W = 188\pi \times p + 2\pi$ の場合，１つの波が表示される．

p	W
1	190π
2	378π
3	566π
4	754π
：	：

③事例３：極方程式

$\theta step = \dfrac{\pi}{24}$ の場合に，$r = 10\,sin 100\theta$ のグラフが $r = 10\,sin 4\theta$ と同じグラフを描く誤表示.



【誤表示の原因】

- $R_1(\theta) = 10 sin\, 4\theta$，$R_2(\theta) = 10 sin\, 100\theta$

  $\theta min = 0$，$\theta \max = 2\pi$，$\theta step = \dfrac{\pi}{24}$ とする

- θ_n を求める.

  $\theta_n = \theta min + \theta step \times (n-1)$

  $= 0 + \dfrac{\pi}{24} \times (n-1) = \dfrac{\pi}{24} \times (n-1)$

  $\theta step = \dfrac{\theta \max - \theta min}{n-1}$ だから

  $\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{2\pi - 0}{n-1}$ より $0 \leqq n \leqq 49$

- $R_1(\theta_n)$，$R_2(\theta_n)$ を比較する.

  (1) $R_1(\theta_n) = 10 sin\left\{4 \times \dfrac{\pi}{24}(n-1)\right\} = 10 sin\left\{\dfrac{\pi}{6}(n-1)\right\}$

  (2) $R_2(\theta_n) = 10 sin\left\{100 \times \dfrac{\pi}{24}(n-1)\right\}$

  $= 10 sin\left\{\dfrac{25\pi}{6}(n-1)\right\} = 10 sin\left\{\left(4\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)(n-1)\right\}$

  $= 10 sin\left\{4\pi(n-1) + \dfrac{\pi}{6}(n-1)\right\} = 10 sin\left\{\dfrac{\pi}{6}(n-1)\right\} = R_1(\theta_n)$

  2(n-1) **回転**

【$r = 10 sin\, 100\theta$ 以外の極方程式】

- $R_3(\theta) = 10 sin(m\theta)$ とする.

- $R_3(\theta_n) = 10 sin(m\theta_n) = 10 sin\left\{m \times \dfrac{\pi}{24}(n-1)\right\}$

  p(n-1) **回転と仮定**

  $= 10 sin\left\{\left(2\pi p + \dfrac{\pi}{6}\right) \times (n-1)\right\}$ と仮定すると

$$m \times \frac{\pi}{24}(n-1) = \left(2\pi p + \frac{\pi}{6}\right)(n-1)$$

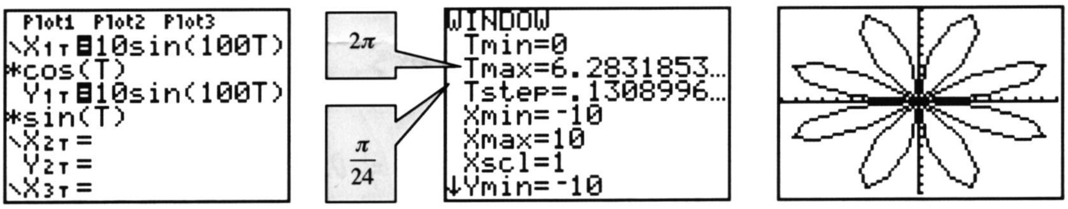
$\therefore$　$m = 48p + 4$　の場合，

$r = 10\,sin4\theta$　と同じグラフが表示される．

p	m
1	52
2	100
3	148
4	196
5	244
：	：

④事例４：媒介変数方程式

$t\,step = \dfrac{\pi}{24}$ の場合に，　$x = 10sin100t \times \cos t$，　$y = 10sin100t \times sin\,t$　のグラフが $x = 10sin4t \times \cos t$，　$y = 10sin4t \times sin\,t$　と同じグラフを描く誤表示．



【誤表示の原因】

事例３と同じであるので省略する．

(3) 誤表示の教育的利用

Dick（1992）は，グラフ電卓の誤表示の現象を避けるのではなく，むしろ生徒の注意をグラフ電卓の限界・制限に向かせることによって，誤った結論を防ぐより良い懐疑心を育てることの必要性を述べている．Hansen（1994），Krumpe and Keiser（2003）は，グラフ電卓の誤表示を逆に利用することで，生徒に興味・関心を持たせながら矛盾点を数学的に解決する指導方法について述べている．しかし，生徒自身の力で問題解決した事例研究は，佐伯・黒木（2004c）以外に見られないように思われる．

佐伯・黒木(2004c)は，正葉曲線の数学的活動において，$r = 10\,sin100\theta$ と $r = 10\,sin4\theta$ が同じグラフになる現象を不思議に思った生徒の疑問を取り上げ，その原因をクラス全体に考察するように求めた．その結果，二人の生徒が誤表示の原因のレポートを提出した．

図 2-2-12 は，誤表示の原因を代数的に考察した生徒のレポートである．この生徒の記述の「実際に $\dfrac{\pi}{24}$ ずつして代入していくとよく分かる．」では，$r = 10\,sin100\theta$ と

$r = 10\,sin4\theta$ の θ に $\dfrac{\pi}{24}$ の自然数倍を代入していることが窺われる．実際に $\theta = \dfrac{\pi}{24}$ を代入して計算している部分では，三角関数の周期性の性質 $sin(\theta + 2n\pi) = sin\theta$ を使ってそれぞれの値が一致することを確認している．さらに，θ を一般化して，$r = 10\,sin100\theta$ の n ステップ目の動径が $\left(4\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) \times n$ となり，動径は $4\pi \times n$ 回転して $r = 10\,sin4\theta$ の動径と一致することを代数的に考察し，その結果，両方のグラフが同じになることを結論づけた．

$r = 10\,sin(100\theta)$ と $r = 10\,sin(4\theta)$ と同じ？
$\theta step = \frac{\pi}{24}$ とした時、

実際に $\frac{\pi}{24}$ ずつに代入していくとよく分かる。

$sin\left(100 \times \frac{\pi}{24}\right) = sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = sin\left(4\pi + \frac{1}{6}\pi\right) = 0.5$
$sin\left(4 \times \frac{\pi}{24}\right) = sin\,\frac{1}{6}\pi = 0.5$
→ 同じ値が出てくる

$sin(100\theta)$ は、$\frac{\pi}{24}$ ずつ回っていく分には、$\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) \times n$（nは整数）
となり $4\pi \times n$ 分 $sin(4\theta)$ よりは進んでいるが値は等しくなってしまう。
よってグラフは同じくなる。

図 2-2-12．グラフの誤表示を代数的に解決した生徒のレポート

図 2-2-13 は，数表と弧度法の周期性を考察して結論づけた生徒のレポートである．この生徒も，WINDOW 設定の θ step が $\dfrac{\pi}{24}$ であることに着目して，$r = 10\,sin100\theta$ と $r = 10\,sin4\theta$ の数表を $\theta = \dfrac{\pi}{24}$ の自然数倍ごとに求め，それぞれの値が一致することを数値的に確認している．次に，$\theta = \dfrac{\pi}{24}$ の場合について，$100\theta = \dfrac{25}{6}\pi$ の動径は円を２回転して $4\theta = \dfrac{1}{6}\pi$ に一致することを図的に考え，他の場合も同様に円を回転して動径が一致することを調べ，２つのグラフが同じになると結論づけている．さらに，この考え方を発展させて，$r = 10\,sin2\theta$ と $r = 10\,sin50\theta$ が同じグラフ（レポートでは

$2\theta = 50\theta$ と記述）であることなど，同じ現象を起こす事例を幾つも推測し，その推測をグラフ電卓で検証していることが分かる．このように，この生徒は，単に原因を数学的に追及するだけでなく，グラフ電卓を数学的活動のパートナーとして何度も対話を繰り返すことにより，誤表示の原因を発展的に考察し，検証したと言える．

(1) 規則の理由

規則　$r=10\sin(100\theta)$ が $r=10\sin(4\theta)$ と同じ？

$n=4$ の場合

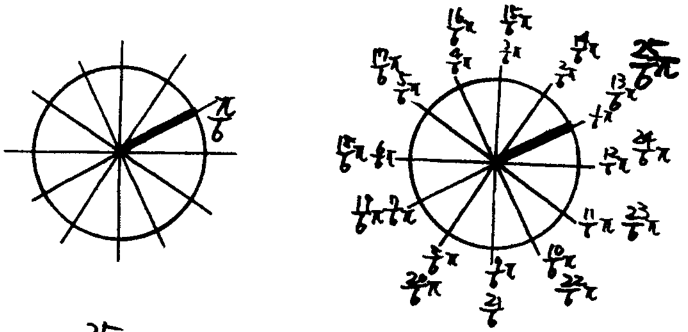
θ	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{2}{24}\pi$	$\frac{3}{24}\pi$	$\frac{4}{24}\pi$	$\frac{5}{24}\pi$	$\frac{6}{24}\pi$	$\frac{7}{24}\pi$	$\frac{8}{24}\pi$	$\frac{9}{24}\pi$	$\frac{10}{24}\pi$	$\frac{11}{24}\pi$	$\frac{12}{24}\pi$	…
4θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2}{6}\pi$	$\frac{3}{6}\pi$	$\frac{4}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{8}{6}\pi$	$\frac{9}{6}\pi$	$\frac{10}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	…
r	0	5	$5\sqrt{3}$	10	$5\sqrt{3}$	5	0	-5	$-5\sqrt{3}$	-10	$-5\sqrt{3}$	-5	0	…

$n=100$ の場合

θ	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{2}{24}\pi$	$\frac{3}{24}\pi$	$\frac{4}{24}\pi$	$\frac{5}{24}\pi$	$\frac{6}{24}\pi$	$\frac{7}{24}\pi$	$\frac{9}{24}\pi$	$\frac{10}{24}\pi$	$\frac{11}{24}\pi$	$\frac{12}{24}\pi$	…	
100θ	0	$\frac{25}{6}\pi$	$\frac{50}{6}\pi$	$\frac{75}{6}\pi$	$\frac{100}{6}\pi$	$\frac{125}{6}\pi$	$\frac{150}{6}\pi$	$\frac{175}{6}\pi$	$\frac{200}{6}\pi$	$\frac{225}{6}\pi$	$\frac{250}{6}\pi$	$\frac{275}{6}\pi$	…	
r	0	5	$5\sqrt{3}$	10	$5\sqrt{3}$	5	0	-5	$-5\sqrt{3}$	-10	$-5\sqrt{3}$	-5	0	…

$\theta=\frac{\pi}{24}$ のとき　$4\theta=\frac{\pi}{6}$，$100\theta=\frac{25}{6}\pi$ となる

つまり，



このように，$\frac{25}{6}\pi$ は円を2周して $\frac{\pi}{6}$ と同じ位置に戻ってくるので
rが同じ値になりグラフの結果が出てきたのだと思う
他の $\frac{50}{6}\pi$，$\frac{75}{6}\pi$，$\frac{100}{6}\pi$ なども同じように円を何もして $\frac{2}{6}\pi$，$\frac{3}{6}\pi$，$\frac{4}{6}\pi$
などと同じ値になる．
したがって，nの値がどんなものでも $n\theta$ が同じ位置になれば
グラフ電卓の結果は同じになるのである。
$4\theta=100\theta$ の他にも　$2\theta=50\theta$，$6\theta=150\theta$，$8\theta=200\theta$
$10\theta=250\theta$ という具合に結果が同じになることがわかった．

図 2-2-13．グラフの誤表示を数値的・図的に解決した生徒のレポート

５．まとめ

本節では，テクノロジーの対象を，本研究におけるタイプ１（通常の数学授業を補完する数学的活動）で活用するグラフ電卓に焦点を絞って，①数学教育におけるグラフ電卓活用の変遷，②グラフ電卓活用の利点，③グラフ電卓の誤表示の原因と教育的利用，の３つの観点について考察した．

先行研究の調査結果から，1986年に世界で初めて開発されたグラフ電卓が米国の数学教育で積極的に活用されていることが先行研究から明らかになった．一方，我が国では，1993年に初めて紹介され，最初の３年間は研究授業やトピック的な授業が行われ，1996年を境に，実際のカリキュラムに位置づけられた数学授業での活用，文部省の学習指導要領での推奨，さらに教科書の出版など，数学授業におけるグラフ電卓活用の基礎が整いつつあることが分かった．しかし，グラフ電卓の教材の不足，教師教育，財政面の問題等によって，実際の学校現場ではあまり活用されていないことが明らかになった．

次にグラフ電卓活用の利点に関しては，①グラフ電卓の効果的な活用方法と②教室内での数学的活動への影響について先行研究をもとに考察した．グラフ電卓の活用方法は，1)帰納的な数学的活動による規則・性質の発見，2)多表現の関連づけによる理解の深化，3)生徒の主体的な数学的活動による数学間のつながり，の三つの方法が効果的であることが分かった．また，教室内での数学的活動への影響については，教師主導型の授業が減り，オープンエンドな問題解決，発見学習における生徒の主体的な数学的活動が増え，さらに，それらの活動は，生徒同士，教師，テクノロジーとのコミュニケーションによって活性化された授業活動が展開されたことが明らかになった．

最後に，グラフ電卓の液晶の制約や性能上の問題による誤表示の原因と教育的利用について先行研究をもとに考察した．佐伯（2004c）の研究から，グラフ電卓の誤表示を逆に利用することで，生徒に興味・関心を持たせながら矛盾点を数学的に解決する指導が可能であることが明らかになった．

引用文献・参考文献

1) 阿蘇和寿 (2002).「数学の授業における学生の探究活動 -テクノロジーの効果的な活用に向けて-」. 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌. Vol.9. No.1. pp.31-50.

2) Banchoff T. F. (1991). "Computer Laboratory Magnification of Idiosyncracies" . In Leinbach L. C. (Ed.) . The Laboratory Approach to Teaching Calculus. MAA Notes Vol.20. pp.1-7.

3) Demana F. and Waits B. K. (1988). "Pitfalls in Graphical Computation, or Why a Single Graph Isn't Enough" . The College Mathematics Journal. 19(2) . pp.177-183.

4) Demana F. and Waits B.K. (1992). "A Computer for *All* Students". Mathematics Teacher. Vol.85. No.2. pp.94-95.

5) Demana F., Waits B.K. and Clemens S.R.(1993). Precalculus Mathematics – A Graphing Approach - (Teacher's Edition / Third Edition). Addison-Wesley Publishing Company.

6) Dick T. P. (1992). "Super Calculators: Implications for the Calculus Curriculum, Instruction, and Assessment" . In Fey J.T. (Ed.) . 1992 Yearbook: Calculators in mathematics education. NCTM. pp. 145-157.

7) Dion G. (1990). "The Graphics Calculator: A Tool for Critical Thinking" . Mathematics Teacher. pp.564-571.

8) Donley H. E. and Elizabeth A. G. (1993). "Hidden Behaviors in Graphs" . Mathematics Teacher. Vol.86. No.6. pp.466-468.

9) Dunham P.H. and Dick T. P. (1994). "Research on Graphing Calculators" . Mathematics Teacher. Vol.87. No.6. pp.440-445.

10) Dunham P.H. (1998). "Hand-held Calculators in Mathematics Education: A Research perspective". Paper presented at the Technology and NCTM Standards 2000 Conference. http://www.mathforum.com/technology/papers/papers/dunham.html.

11) Farrell A.M. (1996). "Roles and Behaviors in Technology Integrated Precalculus Classrooms". Journal of Mathematical Behavior. Vol.15. pp.35-53.

12) Goldenberg E. P. (1989). "Mathematics, Metaphors, and Human Factors: Mathematical, Technical, and Pedagogical Challenges in the Educational Use of Graphical Representation of Functions" . Journal of Mathematical Behavior. 7. pp.135-173.

13) Harvey J.G., Waits B.K. and Demana F. (1995). "The Influence of Technology on the Teaching and Learning of Algebra". Journal of Mathematical Behavior. Vol.14. pp.75-109.

14) Hansen W. (1994). "Using Graphical Misrepresentation to Stimulate Student Interest" . Mathematics Teacher.　Vol.87. No.3. pp.202-205.

15) Hector J. H. (1992). "Graphical Insight into Elementary Functions" . In Fey J.T. (Ed.) . 1992 Yearbook: Calculators in mathematics education. NCTM. pp. 131-137.

16) 久永靖史，瀬沼花子（1994).「グラフ電卓を使った新しい指導（その３）　中学校３年／課題学習における利用」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.437. pp.86-93.

17) 一松信（1995). グラフ電卓を数学に ―活用の意義と教材集―. 教育社.

18) Hornsb J. and Lial M.L.(1999). A Graphical Approach to Precalculus – (Second Edition) Addison-Wesley Publishing Company.

19) 井之上和代(2000).「TI-89 を利用した２次関数の学習から見る高専の数学教育」. 福井工業高等専門学校・研究紀要・自然科学・工学. 第 34 号, pp.95-105.

20) 磯田正美（1997).「数学内の関連づけを促す実験・観察アプローチ －表現変更型推論による仮説検証型探究を通して－」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育－実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善－」. 明治図書. pp.35-48.

21) 片岡啓（1996).「高校「微分法」におけるグラフ電卓の活用」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第 7 号. pp.14-19.

22) 加藤達也(1993). グラフ電卓を用いたラボラトリーアプローチについての一考察. 筑波大学大学院修士論文.

23) 小出岳夫（1993). 数学教育における visualization の役割についての研究. 筑波大学大学院修士論文.

24) 国立教育政策研究所（2004). 平成１４年度高等学校教育課程実施状況調査. http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h14/index.htm.

25) 久保良宏，瀬沼花子（1994).「グラフ電卓を使った新しい指導（その４）　中学校２年／一次関数における利用」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.438. pp.85-92.

26) 久保良宏，藤澤由美子（1995).「中学校数学科におけるグラフ電卓利用の視点と授業例 －中学１．２年の関数指導を中心に－」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 77 巻. 第 5 号. pp.2-10.

27) 公庄庸三(1999).「 M．T．Tの実践報告」. Teachers Teaching with Technology Japan. Vol.3. pp.174-179.

28) 公庄庸三（2000).「数式処理電卓は数学教育を蘇生させることができる」. 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌. Vol.7. No.1. pp.146-150.

29) 公庄庸三，他 15 名（2002a). 代数学Ｉ. 東京書籍.

30) 公庄庸三，他 14 名 (2002b). 幾何学入門. 東京書籍.
31) 公庄庸三，他 14 名 (2002c). 幾何学Ⅰ. 東京書籍.
32) 公庄庸三，他 16 名 (2002d). 幾何学Ⅱ. 東京書籍.
33) 公庄庸三，森田啓，他 13 名 (2002). 代数学入門. 東京書籍.
34) 公庄庸三，高野良昭，他 16 名 (2002). 関数入門. 東京書籍.
35) 公庄庸三，他 7 名 (2004a). 関数Ⅰ. 東京書籍.
36) 公庄庸三，他 10 名 (2004b). 関数Ⅱ. 東京書籍.
37) 公庄庸三，他 8 名 (2004c). 離散数学. 東京書籍.
38) 倉井庸維 (1993).「高等学校におけるグラフ電卓の授業実践研究」. 日本数学教育学会. 第 26 回数学教育論文発表会論文集. Vol26. pp.371-376.
39)倉井庸維，瀬沼花子 (1994).「グラフ電卓を使った新しい指導（その７） 高校／回帰直線の指導の実験的な試み」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.441. pp.93-100.
40) Krumpe N. and Keiser J.W. (2003). "Getting to Know a Calculator's Numerical Limitations". Mathematics Teacher. Vol.96. No.2. pp.138-140.
41) Lane K., Ollongren A. and Stoutemyer D.R. (1986). "Computer-based Symbolic Mathematics for Discovery". In Howson A.G. and Kahane J.-P. (Ed.). The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press. pp.133-146.
42) Leinbach L. C. (1991). "INTRODUCTION: The Laboratory Approach to Teaching Calculus". In Leinbach L. C. (Ed.). The Laboratory Approach to Teaching Calculus. MAA Notes Vol.20. pp.vii-viii.
43) 柗元新一郎，瀬沼花子 (1994).「グラフ電卓を使った新しい指導（その２） 中学校３年／二次関数」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.436. pp.87-94.
44) 宮川健 (1998).「テクノロジーによる関数関係理解の改善に関する一考察 -事象のグラフ化におけるミスコンセプションに焦点をあてて-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第１号. pp.9-14.
45) 持永純子 (1995).「グラフ電卓を活用した数学科の指導に関する研究 -問題づくりの授業を取り入れた「二次関数」の指導-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 77 巻. 第９号. pp.22-30.
46) 文部省 (1999). 高等学校学習指導要領解説 -数学編理数編-. 実教出版.
47) 森田真康，瀬沼花子 (1994).「グラフ電卓を使った新しい指導（その５） 高校／微分・積分の「関数の極限」」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.439. pp.101-108.
48) Murakami H. and Hata M. (1986). "Mathematical Education in the Computer Age".

In Howson A.G. and Kahane J.-P.（Ed.）. The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press. pp.85-94.

49) Murdock J., Kamischke Ellen and Kamischke Eric(1998). Advanced Algebra Through Data Exploration – A Graphing Calculator Approach -. Key Curriculum Press.

50) 中込雄治（1996).「小型コンピュータの活用で変化する指導形態について –ポケコンやグラフ電卓が数学の授業に及ぼす効用–」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第 7 号. pp.9-13.

51) 中村好則，森本明（1999).「グラフ電卓の活用が聾学校高等部の数学科指導へもたらす効果」. ろう教育科学. Vol.41. No.2. pp.89-98.

52) NCTM（1989）. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston. VA.

53) NCTM（2000）. Principles and Standards for School Mathematics. Reston. VA.

54) 西村圭一（1996).「探究活動中心の授業に関する一考察 –テクノロジーを利用して–」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第 9 号. pp.21-26.

55) 西村圭一（1998).「CBL／CDA を利用した三角関数の指導に関する研究 –「音」を題材として–」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第 7 号. pp.11-19.

56) 佐伯昭彦，氏家亮子，槻橋正見（1996).「テクノロジーを活用した数学と科学との統合教育の授業設計(1) ー統合教育の基本構想についてー」. 日本科学教育学会第 20 回年会論文集. Vol.20. pp.273-274.

57) 佐伯昭彦，氏家亮子（1998a).「数学的モデリングを重視した総合カリキュラム–身近な物理現象を数学的にモデル化する授業–」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第 9 号. pp.10-18.

58) 佐伯昭彦（1998b).「分数関数のグラフの振る舞いをインフォーマルに探求する役割について ーグラフ電卓を活用した探求ー」. 筑波数学教育研究. 第 17 号. pp.77-86.

59) 佐伯昭彦，氏家亮子(1999).「数学と他教科とを関連づけたクロスカリキュラムの試み」. 日本数学教育学会編「算数・数学カリキュラムの改革へ」. 産業図書. pp.295-313.

60) 佐伯昭彦（2000). 数学と物理とを関連づけた総合カリキュラムに関する実証的研究ー身近な自然現象を取り入れた実験・観察型授業ー. 平成 10ー11 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究（C）：課題番号 10680298，代表：佐伯昭彦）研究成果報告書.

61) 佐伯昭彦，黒木伸明（2004a).「グラフ電卓を活用した極座標における正葉曲線に関する数学的活動とその有効性」. 日本科学教育学会誌. 科学教育研究. Vol.28.

No.5. pp.325-334.

62) 佐伯昭彦，黒木伸明（2004b).「極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動 ーグラフ電卓を活用した数学的活動ー」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第86巻. 第９号. pp.13-20.

63) 佐伯昭彦，黒木伸明（2004c).「グラフ電卓のグラフ的誤表示の原因に関する生徒の分析方法」. 日本科学教育学会第28回年会論文集，Vol.28. pp.377-378.

64) 瀬沼花子（1994a). 算数・数学教育における電卓・グラフ電卓を利用する教材の開発. 平成５年度科学研究費補助金（奨励研究Ａ：課題番号 05780155，代表：瀬沼花子）研究成果報告書.

65) 瀬沼花子（1994b).「グラフ電卓を使った新しい指導（その１） グラフ電卓を利用する授業の実験的試みの背景」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.435. pp.86-93.

66) 瀬沼花子（1994c).「グラフ電卓を使った新しい指導（その８） まとめと今後の課題」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.442. pp.87-94.

67) 瀬沼花子(1995a).「数学教育におけるグラフ電卓の国内外の研究や実践の動向」. 寺田文行，巻久，吉村啓編著「グラフ電卓で数学する」. 共立出版. pp.10-22.

68) 瀬沼花子（1995b). 電卓・グラフ電卓を利用した算数・数学教育 −小学校から大学まで−. 平成６年度科学研究費補助金（一般研究Ｃ：課題番号 06680189，代表：瀬沼花子）研究成果報告書.

69) 瀬沼花子（1997).「グラフ電卓とコンピュータ」. 日本数学教育学会編「学校数学の授業構成を問い直す」. 産業図書. pp.315-330.

70) 鹿野敏一（1994). 高等学校数学におけるテクノロジーを用いた数学的モデル化の教材開発に関する研究. 筑波大学大学院修士論文.

71) 清水克彦（1997).「数学教育におけるテクノロジー活用の歴史的変遷」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」. 明治図書. pp.5-21.

72) Simonsen L.M. and Dick T.P. (1997). ”Teachers’ Perceptions of the Impact of Graphing Calculators in the Mathematics Classroom”. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching. Vol.16. pp.239-268.

73) Skemp R.R. (1986). The Psychology of Learning Mathematics (Second Edition). Penguin Books.

74) 鈴木純子（1998).「グラフ電卓を活用した数学科の指導に関する研究 −問題づくりを取り入れた「三角関数」の指導−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第80巻. 第９号. pp.25-29.

75) 寺田文行，巻久，吉村啓編著（1995）．グラフ電卓で数学する．共立出版．

76) 坪川武弘，井之上和代，長水壽寛，宮田一郎，柳原祐治（2002）．「グラフ電卓（TI-89）を活用した新しい数学教育の試み」．高専教育，第25号．pp.251-256．

77) 筒井康行，瀬沼花子（1994）．「グラフ電卓を使った新しい指導（その６）　高校／方程式の実数解の個数」．教育科学・数学教育．明治図書．No.440．pp.98-105．

78) 氏家亮子，佐伯昭彦，槻橋正見（1996）．「テクノロジーを活用した数学と科学との統合教育の授業設計(2) ー統合教育の教材開発についてー」．日本科学教育学会第20回年会論文集．Vol.20．pp.275-276．

79) 梅野善雄（2001）．「数式処理電卓を用いた微積分教育の改善」．日本数学教育学会高専・大学部会論文誌．Vol.8．No.1．pp.13-30．

80) 梅野善雄（2002）．「数式処理電卓の利用による数学に対する学生の意識変化」．高専教育．Vol.25．pp.175-180．

81) 梅野善雄（2003）．「関数教育における数式処理電卓の短期利用とその効果」．日本数学教育学会高専・大学部会論文誌．Vol.10．No.1．pp.27-36．

82) 梅野善雄（2004a）．「グラフ電卓を利用したグラフ・アートと関数理解」．高専教育．Vol.27．pp.191-196．

83) 梅野善雄（2004b）．「３次・４次関数に関する高専１年生の発見」．Teachers Teaching with Technology Japan．Vol.8．pp.160-165．

84) Waits B.K. and Demana F.（1998）．"The Role of Hand-Held Computer Symbolic algebra in Mathematics Education in the Twenty-first Century: A Call for action!"．Paper presented at the Technology and NCTM Standards 2000 Conference．http://mathforum.org/technology/papers/papers/waits/waits.html．

85) Waits B.K. and Demana F.（2000）．"Calculators in Mathematics Teaching and Learning Past, Present, and Future"．In Burke M.J.（Ed.）．2000 Yearbook: Learning Mathematics for a New Century．NCTM．pp.51-66．

86) Ward（1998）．"Graphing Calculator-Associates Strategies Used by and Misconceptions of High School Students"．Paper presented at the Technology and NCTM Standards 2000 Conference．
http://mathforum/technology/papers/papers/ward.html．

87) Williams C.G.（1993）．"Looking Over Their Shoulders: Some Difficulties Students Have with Graphing Calculators"．Mathematics and Computer education．27(3)．pp.198-202．

2．3　ハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学と実現象とのつながり

1．はじめに

2．1節では，高等学校学習指導要領解説-数学編 理数編-が推奨する数学的活動の模式図（図2-1-1）に示された「身近な事象」の解釈を，日常的な事象や自然現象だけでなく，数表，グラフ，幾何図形などの数学的な事象をも含むと捉え，両者の事象におけるテクノロジー活用の意義について考察した．さらに，2．2節では，本研究におけるタイプ1の数学的活動，つまり，数表，グラフ，幾何図形などの数学的な事象を取り扱った数学活動でのグラフ電卓活用について考察した．

本節では，本研究におけるタイプ2の数学的活動，つまり，日常的な事象，自然現象，社会現象等の実現象と数学とをつなげる数学的活動に焦点を絞り，ハンドヘルド・テクノロジーの活用がこの数学的活動にどのように影響を与えるかについて考察する．ここで考察する実現象と数学とをつなげる数学的活動は，1960年代後半から議論されている「応用（Application)」，「モデリング（Modelling)」の研究を参考に，①数学的モデリングの捉え方，②数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義と課題，③数学的モデリング研究におけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法，④我が国のハンドヘルド・テクノロジーを活用したモデリングの実践研究，について考察する．

2．数学的モデリングの捉え方

(1) 数学的モデリングの研究動向

Kaiser-Messmer（1991）は，数学教育現代化の構造指向によって完全に排除されていた「応用」「モデリング」が1960年代後半からリバイバルしたことを述べている．この発端となったのは，*Educational Studies in Mathematics* の創設編集者であるFreudenthalが司会をしたコロキューム「Why to Teach Mathematics so as to be Useful?」が1968年の創刊号に記載されたことが要因としてあげられる（三輪，1983；三輪，2004）．このコロキュームでFreudenthal（1968）は，それまでの数学教育の問題点を次のように述べている．

「多くの生徒は学校数学での経験を適用することができない．物理または化学の実験のみならず日常生活のもっとも些細な情況（場面）でさえ適用できない．」(p.5)

この問題点に対して，Freudenthal（1968）は，数学を閉じたシステムではなく，「現実世界の現象を数学化する活動」と「数学を数学化する活動」として捉えることを次のように強調した．

「問題は，どんな種類の数学を教えるかではなく，どのように数学を教えるべきかである．第一において，数学とは現実を数学化（mathematizing）することを意味し，数学を使うものにとって，数学化とは数学の最終的な解釈（final aspect）である．
（中略）
人間が学ぶべきことは，閉じたシステムとしての数学ではない．むしろ活動としての数学，現実を数学化する過程としての数学，そして可能であれば数学を数学化する過程としての数学を学ぶべきである．」（p.7）

また，1969 年に開催された数学教育世界会議（ICME：International Congress on Mathematical Education）の第 1 回大会では，Pollak の全体講演「我々は，どのように数学の応用を教えるか？」が行われ，それ以降 2004 年の ICME-10 に至るまで，応用，数学的モデリング，問題解決，他教科との関連が 4 年ごとに議論されている．さらに，1983 年 7 月に ICTMA（International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling）の第 1 回大会がイギリスで行われ，この会議は 2 年ごとに開催されている．2004 年 2 月には，ドイツのドルトムントにおいて ICMI Study 14「数学教育における応用とモデリング（Applications and Modelling in Mathematics Education）」が開催され，23 カ国から 75 名の参加者により，モデリングと応用に関する研究動向について議論が交わされた（Blum et al，2002；松嵜，2003；Hans-Wolfgang and Blum(eds.)，2004；池田，2004b；松嵜，2004）．このように過去 35 年間において，数学的モデリングに関する多くの議論が国際会議で行われている．

一方，米国においては，NCTM（1979）が 1976 年から研究調査した結果をまとめた Yearbook「Applications in School Mathematics」を発行し，1980 年には学校数学の応用に関するソースブック「A Sourcebook of Application of School Mathematics」を MAA との共同によって出版するなど，学校現場での数学的モデリングの実用化が図られてきた．さらに，NCTM（1989）の第 9 学年から第 12 学年のスタンダードでは，スタンダード 1［問題解決としての数学］，スタンダード 4［数学的つながり］，スタンダード 5［代数］，スタンダード 6［関数］，スタンダード 7［総合的な視点からの幾何学］，スタンダード 9［三角関数］において，実世界の問題場面に応じて数学的モデリング

の過程を適用することを推奨している．また，NCTM（2000）の第９学年から第 12 学年のスタンダード 2000 では，代数スタンダード，幾何学スタンダード，データ解析と確率スタンダード，表現スタンダードで数学的モデリングの活用を取り上げ，数学的モデリングの重要性を次のように記述している．

「数学のもっとも効果的な利用の一つは，現象の数学的モデリングである．全てのレベルの生徒は，彼らのレベルに適切な方法で多様な現象を数学的にモデル化する機会を持つべきである．」(p.39)

以上のように，米国では学校数学における数学的モデリングの推奨を組織的レベルで行われていることが特徴である．

一方，我が国では，島田（1977，1995）のオープンエンドアプローチ研究や，三輪（1983）の先駆的な研究を背景に，学習者が数学を活用して自然・社会現象の問題を解決する数学的モデリングの理論研究と実践研究が，1990 年代より徐々に行われ，その成果が関連学会の学術雑誌，著書，文部科学省・科学研究費補助金の報告書，修士論文等で報告されている（例えば，Matsumiya 他，1989；池田他，1992；池田他，1993；鹿野，1994；松宮他，1995；小寺，1996；大澤，1996；柳本，1996a；太田，1997；佐伯他，1997；Ikeda 他，1998；池田，1998；宮川，1998；西村，1998；布川，1998；大澤，1998a；大澤，1998b；佐伯他，1998；深澤，1999；池田，1999；小寺，1999a；小寺，1999b；枌元，1999；松嵜他，1999；大澤，1999；太田，1999；佐伯他，1999；杉山，1999；植野，1999a；植野，1999b；加藤，2000；枌元，2000；佐伯，2000；池田，2001；小寺，2001；長崎編，2001；西村，2001a；西村，2001b；Stephens M.他，2001；柳本，2001；池田，2002；加藤他，2002；熊谷，2002；太田，2002；佐伯，2002；Isoda 他，2003；小寺，2003；中村，2003；西村，2003a；西村，2003b；佐伯，2003；佐伯他，2003a；佐伯他，2003b；佐伯他，2003c；池田，2004a；池田，2004b；清野，2004；長崎他，2004；熊谷，2004)．

(2) 数学的モデルと数学的モデリングの定義

ここでは，本論文における「数学的モデル」，「数学的モデリング」の定義について述べる．

a．数学的モデル

三輪（1983）は，数学的モデルを「モデルは，対象とする事象，それを取り扱う目的と手法によって，それを表わすのに，ことば，図などの視覚的手段，数や式などの数学的手段など，いろいろのしかたがある」と定義づけており，数学以外のことばと図などの視覚的手段を含めているのが特徴的である．

池田（1998b）は，数学的モデルを「モデルとは，ある目的から，実際場面での中で特に重要だと思われる側面をそのまま保ちながら，それ以外の関係の薄い側面を捨象することによってつくられるものだといえます．特に，数式，量，図形等に関するモデルを数学的モデルと呼ぶことにします．」と定義し，さらに，数学的モデルの類型を詳細に行っている．

西村（2001a）は，「数学的モデルとは，事象を，ある目的に従って，数学的な処理が可能な，数値的表現，グラフ表現，代数的表現，幾何的表現によって表したモデル」と定義づけている．

この他，研究者によって若干異なるが，本論文の４章に示す実践研究では，生徒達自身が行った数学的な処理は，数値的表現，グラフ表現，代数的表現に分類できるため，本論文における「数学的モデル」は西村の定義に従うことにする．

b．数学的モデリング

「数学的モデリング」，「数学的モデル化」，「モデリング」など，研究者によって異なるが，本論文ではそれらを同義として，ここでは，Pollak（1980），三輪（1983），池田（1999）の研究を参考に「数学的モデリング」を考察する．

池田（1999）は，数学的モデリングを「実際の問題の解決を目標に，実際の問題を数学化して数学的モデルをつくり，解釈・検討して不都合が生じれば数学的モデルの修正を適宜繰り返し，より適した数学的モデルをつくっていく活動を意味するものとする．」と定義している．

Pollak（1980）は，「数学と他の学科との相互作用」において，応用数学についての４つの定義を示している．その中で，数学以外の分野および日常生活への数学の真の応用は，以下に示す定義(3)，(4)の性格を持つべきだと述べている．

定義(3)：応用数学は数学以外の分野あるいは実生活の場面に始まり，数学的解釈つまりモデルを作成し，そのモデル内で数学的作業を行い，そして得た結果をもとの場面に適用することを意味する．

定義(4)：応用数学は人々がその暮しの中で数学を応用するときに実際にしていることを意味する．これは(3)と似ているが，通常，数学以外の世界と数学の間の輪を何回も回ることを含んでいる．

三輪（1983）は，Pollak の定義を参考に数学的モデリングの過程を以下の４段階で表している（図 2-3-1）．

(1)　その事象に光を当てるように，数学的問題に定式化する（定式化）．

(2)　定式化した問題を解く（数学的作業）．

(3)　得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて，その有効さを検討し，評価

する（解釈・評価）．

(4)　問題のより進んだ定式化をはかる（より良いモデル化）．

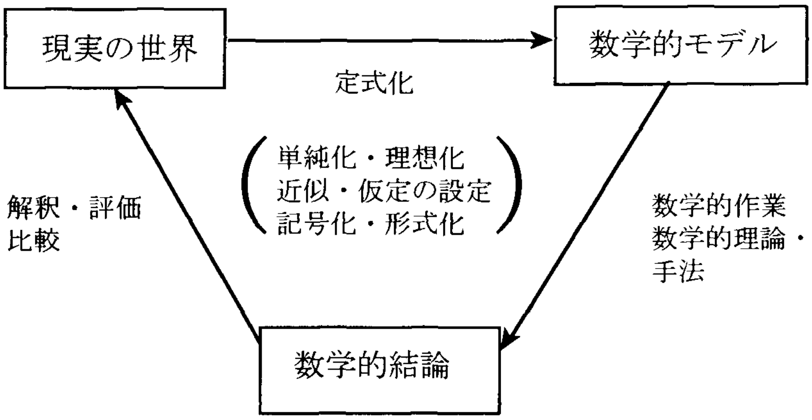


図 2-3-1．数学的モデリングの過程（三輪 1983）[1]

三輪の数学的モデリングの「定式化」－「解釈・評価」は，Pollak の定義(3)に相当し，「より良いモデル化」は Pollak の定義(4)に相当する．さらに，三輪の数学的モデリングの４段階と池田の定義を比較すると，使用している用語が若干異なるが，内容的には同じ定義であると考えられる．さらに，図 2-3-1 に示した数学的モデリングの過程の模式図は，文部省（1999）が高等学校学習指導要領解説−数学編 理数編−で示した数学的活動の模式図（図 2-1-1）とほぼ同義であると解釈できる．

これまでの研究では，数学的モデリングの過程の図式化が様々に記述されている（例えば，Kerr et al.，1979；Cobitt et al.，1979；Burghes，1980；Fey ，1987；Clatworthy et al.，1987；Galbraith et al.，1990；池田他，1992；池田他，1993；Blum，1998；小寺，1999b；西村，2001a；西村，2001b）．しかし，それぞれの模式図は，研究の目的や方法によって若干異なるだけで，それぞれの活動内容の解釈はほぼ同じであると考えられる．従って，本論文では，三輪（1983）の定義と模式図を参考にする．

(3) 数学的モデリングの重要性と課題

ここでは，数学教育における数学的モデリングの重要性と課題について三輪（1983）の研究をもとに考察する．

a．数学的モデリングの重要性

三輪（1983）は，数学的モデリングの教育的重要性について次の三つの理由をあげている．

---

[1] 三輪（1983）の論文では，図中の定式化が「定型化」となっている．これは誤植であると考えられるため，図 2-3-1 では「定式化」とした．

「①数学の応用が著しく広くなった情況にかんがみ，応用が教育の不可欠な要素であるという認識が高まって，学校数学をもっと応用可能なものにしようとする．

②数学的モデル化過程に数学的な考え方のさまざまの側面が含まれているので，その育成をモデル化過程を通してはかろうとすることがあげられる．

③数学的モデル化過程は，現実の問題の取り組みであることから，単なる知的好奇心以上に，数学教育に対する動機づけを与えるとともに，事象との対決を通して知識の開発される過程に積極的に参加させようとすることがあげられる．特に，モデル化において開発される探求的創造的な面は，数学だけでなくすべての面で必要とされるものである．こういった知識開発の活動としての面は，数学的活動と広く呼ばれるものの一側面ということができるが，きわめて知的であること，また，探求的であることの特徴から，いっそうの重要性を増すことが考えられる．[2]」(p.122)

上記の理由は，数学的モデリングを単なる現実場面の応用として捉えるだけではなく，数学的モデリングの活動を通して，数学的な考え方の育成，さらには，数学的活動以上に探究的創造的な知識開発活動といった高次元目標の育成を指摘しており，数学的モデリングを研究・実践する上で示唆に富む．特に，第三の理由は，小倉（1972）が主張する科学的精神の育成にも繋がると考えられる．

b．数学的モデリングの課題

三輪（1983）は，数学的モデル化の第1の教育的問題点として，定式化，解釈・評価，より良いモデル化は，これまでの学校教育で教えることのなかった高度な技能が必要であることを指摘している．これに関して，池田（1999）は，数学的モデル化過程を経験していない大学生を対象とした調査において，数学的モデル化過程を促進する考え方は，中・高等学校での純粋数学の指導によって自動的に育成されない結果を明らかにしている．このように現在の研究では，三輪の指摘する問題点を解決するには至っていないのが現状である．ここでは，この問題点について①カリキュラムに関する課題，②教師に関する課題，③生徒に関する課題，の三つの面から考察する．

①カリキュラムに関する課題

カリキュラムに含まれる必修数学の内容に加えて，問題解決，モデリングと応用を取り扱うために十分な時間が持てないことが課題として指摘されている（三輪，1983；

2　筆者が三輪（1983）の文献をもとに編集した．

Blum and Niss, 1989 ; Blum, 1991).

この課題を克服しない限り，学習時間と学習内容の量的な削減が行われた現行の学習指導要領では，カリキュラムに位置づけられた数学的モデリングを導入することは困難であるように思われる．しかし，これまでの実践研究をレビューすると，「総合的な学習の時間」や中学校での「選択学習」などの纏まった時間を活用して，数学的モデリングの実践が行われている実践が増えてきた．特に，Stephens・柳本（2001）は，必修科目以外の授業で数学的モデリングを行う意義について，数学的モデリングの過程の育成の視点から次のように述べている．

「この数学的モデリングの過程は，一般的に数学を現実問題に応用する場合のプロセスを述べているが，学校数学の中ではすべてのプロセスを生徒に考えさせるのは無理があり，学習効果などを考えても実際的ではない．中学生に始めの条件整理をさせようとしても知識経験不足もある．そのような部分は教師が補い，可能な部分はなるべく生徒に考えさせ，数学を応用することについての学習体験を積ませることがより重要である．

筆者は，このような数学の応用の学習を，「課題学習」を含む必修の数学の時間，「総合的な学習」の時間，「選択教科」の数学の時間の中で可能な限り多く取り扱うのがよいと考える．」（p.28）

佐伯・氏家（1998, 1999, 2003a, 2003b, 2003c）が実践する「数物ハンズオン」は，「総合的な学習の時間」で行う数学的モデリングと「必修科目」で学習する数学内容との関連づけが行われているのが特徴である．これに関しては，本論文の４．１節で詳しく紹介する．

一方，西村（2001b）は，「数列」の単元で数学的モデルの作成や数学的作業の過程を取り入れながら，生徒の未習（等差数列と等比数列）の数学的な概念や手法を学習する方法を取り入れている．西村は，この学習方法を「概念学習型」と呼び，数学的モデリング教材を通して多くの数学的な概念や手法の学習を構成するのが特徴的であり，数学的モデリングを取り入れた新しいカリキュラムを開発する上で示唆に富むと考える．

②教師に関する課題

Blum and Niss（1989）は，数学的モデリングを授業で行う際の教師の資質の問題を以下のように述べている．

「問題解決と数学外の世界との関連づけは，指導をオープンにするため，教師にとって大変な労力を要し，かつ，生徒の達成度の評価を困難にする．さらに，多

くの教師は，彼らが自分で勉強した科目以外の応用事例を取り扱うことが出来ないと感じているようである．多くの教師は，十分な事例を知らないし，実際の授業で事例を適用するために十分な時間を持たない．」(p.12)

実際に，国立教育政策研究所（2004）の調査結果では，実際の授業で実生活の事象との関連を図った授業を行っている教師が少ないことが明らかになった[3]．この対策として，教員養成及び現職教員を対象とした教師教育の必要性が考えられるが，実際にはあまり行われていないのが我が国の現状である．しかし，佐伯（2003）によるハンドヘルド・テクノロジーを活用した教材開発研究の報告，西村（2004）による米国の教科書の分析をもとにした教材開発と授業実践の報告，さらに，太田（2004）による数学科教員養成課程における数学科教育法の受講生や現職の現職教員の研究会での教材開発研究の報告など，今後の研究成果が期待される．

③生徒に関する課題

Blum and Niss（1989）は，生徒が数学的モデリングを実行するときに，生徒が感じる障害を通常の数学学習と比較して次のように述べている．

「他教科における問題解決，モデリングと応用は，疑いもなく生徒にとって大変な労力を要し，かつ，予測がつかない数学学習に変えてしまう．計算のような機械的な数学的作業は，多くの生徒に人気がある．なぜならば，生徒たちは簡単に把握でき，さらに，あるレシピに従うだけで問題を解決することができるのである．」(p.12)

つまり，数学的モデリングの過程を実行する際に必要な知識・技能が通常の数学学習と異なること，さらに，数学以外の知識・技能が必要であることなど，前述したカリキュラムに関する課題と深く関係していることが三輪（1983），池田（1999），Stephens・柳本（2001）らによって指摘されている．この課題に対して，池田（2004）は，数学的モデリングを熟知していない中学校３年生を対象に，数学的モデリングを促進する考え方を指導する系列を考案した全10回の実践内容を評価し，その有効性を実証的に明らかにしている．また，佐伯・氏家（2003a）は，総合学習「数物ハンズオン」における２年間のカリキュラムを，定式化（数学的モデルの作成），解釈・評価，より良いモデル化の能力について段階を追って徐々に育成するようにテーマ及び教材を構成している．その結果，数学的モデルである数式（数学的モデル）を活用して実現象の問題を解決することの有用性に関する生徒個々の意識が向上したことを明らか

[3]　1．1節の図1-1-3（p.6）を参照．

にしている．これに関しては，本論文の４．２節で詳しく紹介する．

以上，三つの観点から数学的モデリングの課題を考察したが，三輪（1983）は，これらの課題を克服するためにはコンピュータ等のテクノロジーが重大な武器になることを指摘している．次に，数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義と課題について考察する．

３．数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義と課題

NCTM（1989）の第９学年から第12学年のスタンダードでは，数学的モデリングにおけるテクノロジーの適切な活用を次のように推奨している．

「この（数学的モデリングの）過程が正規で基本的に支持されるカリキュラムを通して繰り返されることと，電卓とコンピュータテクノロジーの適切な生徒の使用を必要としていることは，このスタンダードの意図することである．[4]」(p.138)

スタンダードが適切なテクノロジー活用を強調しているのは，教材開発及び実践において，我々教師はテクノロジー活用の“光”と“影”を意識する必要があるからである．ここでは，数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義と課題について考察する．

(1) 数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義

これまでの先行研究を参照すると，数学的モデリングに関する教授・学習を改善するためのテクノロジー活用の意義は，①データ収集の補助，②実データ解析の補助，③シミュレーションによる実験・探究の補助，の三つに集約されると考える．以下にそれらについて簡単に考察する．

ａ．データ収集の補助

1980年代後半に米国のTERC（Technical Education Research Centers）は，NSFの基金援助（MDR-8550373）とアップルコンピュータ社の支援を受けて，MBL（Microcomputer Based Lab:マイクロコンピュータ支援の実験）活動の教材開発を行った（Barclay，1989）．このTERCモデリングプロジェクトでは，MBLシステムの温度センサー，音センサー，距離センサー等のセンサーで収集した実データをコンピュータに転送し，そのデータを表計算ソフトEXCELとモデリング図式化プログラムSTELLAで分析する教材の試作が行われた．これにより，物理現象や化学現象の実データが正確にかつ簡単に収集することが可能になった．1994年には，このシステムが

[4] カッコ内は筆者が加筆した．

CBLとしてグラフ電卓で活用できるようになり，誰もがいつでも何処でも必要な時に生徒主体によるデータ収集が行えるようになった（Waits and Demana，2000）．

また，インターネットの発達により，いろんな情報資源が公開されている既存データを簡単に入手することが可能になった．

以上のことにより，次の利点が得られるようになった．

利点１：MBLやCBLは，簡単にかつ正確に実データを収集できるため，数学的モデリング過程の数学化，数学的処理，解釈・検証等に時間をかけることができる．

利点２：CBLは，手のひらサイズで持ち運びが出来るため，実験室以外の一般教室や野外で実験を行うことができる．また，安価なので数人で1台の実験環境を整えることができる．

利点３：インターネットは，目的に応じて多角的に容易にデータを収集できるため，数学的モデリング過程の数学化，数学的処理，解釈・検証等に時間をかけることができる．

b．実データ解析の補助

1982年10月に米国メリーランド州カレッジパークで開催された米国科学財団（National Science Foundation：NSF）の作業会議の報告書（Fey，1987）や，1984年にオーストラリアで開催されたICME-5のテーマグループ６（応用とモデリング）の報告書（Lesh et al，1986），さらに，1985年３月に数学教育国際委員会（ICMI）が開催したストラスブール会議の報告書（Howson and Kahane，1986）など，1980年代に開催された会議では，探究的データ解析（Exploratory Data Analysis）の重要性を強調した．探究的データ解析とは，コンピュータの機能を活用して実データを多角的・機能的に観察・実験，及び，解析することである．例えば，実データの小数計算や近似値計算を電卓で実行する計算の簡略化，コンピュータの数値的，グラフ的，代数的機能や数式処理機能を活用した数学的処理，統計パッケージや表計算ソフトを活用したデータ処理やグラフ化，さらに，統計パッケージの統計処理や回帰モデル機能を活用した数学的モデルの算出，などが考えられる．

以上のことにより，次の利点が得られるようになった．

利点１：機械的な計算やグラフ化の労力を軽減することにより，数学的モデリング過程の解釈・検証等に時間をかけることができる．

利点２：コンピュータで数値的，代数的，グラフ的に実行した結果を探究することにより，問題場面が多角的に分析でき，現象をより良く理解することができる．

利点３：テクノロジーが持つ機能（例えば，回帰モデル機能や最大値・最小値を求める機能など）を活用することにより，中学校段階でも未学習や高度な内容の現

象を取り扱うことが可能である．さらに，数学が不得手な生徒にとっても同様に数学的モデリングの活動に取り組むことができる．

c．シミュレーションによる実験・探究の補助

シミュレーション学習とは，自然・社会現象をコンピュータ等のテクノロジーで模擬実験しながら，その現象の背後に存在するモデルを発見することである．シミュレーションを活用した実践研究は，コンピュータの教育活用の創世記である1960年代当初から行われており，実際に実験できない危険な現象の実験や，装置が大掛かりでコストがかかる実験等に有効であることが研究で明らかにされている（Holtzman, 1977a ; Holtzman, 1977b）．1980年代に開催された会議においても，数学的モデリングの過程でのシミュレーション活用の重要性が議論されている．例えば，Fey（1987）は，シミュレーションの利点を次のように述べている．

「モデリングの概念の学習においても，コンピュータの補助は，そのシミュレーションを支援できる点で，印象的である．（略）このようなシミュレーションの繰り返しによって，仮説の変更とその結果の観察といったモデリングの基礎作業を実際に示すことができる．（略）これらのコンピュータによる実験は，数学とそれが表現する情況との間の関係を洞察するためにはかけがえのないものである．」（p.138）

以上のことにより，次の利点が得られるようになった．

利点１：数値的，グラフ的にシミュレートすることにより，現象をより良く理解することができる．

利点２：実際に体験できない現象をバーチャルに体験・実験することが可能である．

(2) 数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の課題

上記のように，電卓やコンピュータ等のテクノロジーを適切に活用することにより，数学的モデリングに関する教授・学習が改善できることが明らかになった．しかし，その反面，Blum and Niss（1989）と Blum（1991）は，問題解決，モデリングと応用におけるテクノロジー活用の課題とリスクについて以下のように警告している．

①テクノロジーの多用により，基本的な計算やグラフの技能・能力の低下が予想されるため，これらの技能・能力の価値の引き下げが，逆に，全ての生徒に対して，数学指導を大変な労力を要することになる．

②シミュレーションやコンピュータ・グラフィックスが，実際の実験や実物の代用として提供された場合，逆に，現実性が失われる可能性がある．

③機械的かつレシピ調のモデリングを強要する教材ソフトウェアは，生徒の知的な

数学的モデリングの活動を単なるボタンプレッシングに置き換えてしまう可能性がある．

④教師や生徒がテクノロジーの技術的な面や活動に興味を持つことにより，数学的モデリングの過程で現象を熟考する本来の活動が阻止される可能性がある．

Blum and Niss（1989）と Blum（1991）は，これらの課題とリスクを克服する唯一の方法は，生徒と教師が課題とリスクに気づくことだと述べている．しかし，2004 年 2 月にドイツのドルトムントで開催された ICMI Study 14「数学教育における応用とモデリング（Applications and Modelling in Mathematics Education)」のディスカッション・ドキュメント（Blum et al，2002）には，上記の課題の一部が記述されており，現状ではテクノロジー活用の課題とリスクが克服されたとは言えないようである．

本研究で実践した「数物ハンズオン」は，通常の数学授業と分離した総合学習で実施しているため課題①の問題はない．また，2 年間の総合学習で取り扱った 6 つのテーマは，全て CBL を活用して実データを収集しているため課題②の問題もない．次に，課題③と課題④に関しては，グラフ電卓と CBL の操作を極力簡単化した．さらに，生徒の知的好奇心を引き出すように教材を設計し，かつ，生徒が数学的モデリングの活動を行っている際に気づいたことや疑問に思ったことなどをワークブックに記述させるようにした．その結果，生徒達は，ハンドヘルド・テクノロジーに自ら主体的・積極的に働きかけ，パートナーシップを築きながら数学的活動を行っていた．詳しくは第 4 章で紹介する．

4．数学的モデリングにおけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法

数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の対象を，本研究で活用するハンドヘルド・テクノロジー［グラフ電卓，データ収集機（CBL / CDA)，各種センサー］に焦点を絞って，数学的モデリングにおけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法について考察する．

(1) 数学的モデリングにおけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法

ここでは，数学的モデリングにおけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法について，①データ収集の補助，②実データ解析の補助，③シミュレーションによる実験・探究の補助，の三つ観点について紹介する．

a．データ収集の補助

テクノロジーを活用しない実験では，膨大な量のデータや厳密なデータ，例えば，1／50 秒単位で自由落下運動のデータを収集することは困難であった．しかし，1990

年中旬に開発されたデータ収集機［テキサス・インスツルメンツ社の CBL（図 2-3-2）とカシオ社の CDA（図 2-3-3)］と各種センサーを活用すると，手軽に簡単に物理現象や化学現象のデータが収集できるようになった．しかも，手のひらサイズで持ち運びが容易であるため，実験室以外の教室や野外においても実現象データが収集でき，安価であるため，少人数のグループで１台ずつ使用する実験環境が実現できるため，生徒自らが目的をもって実験データを収集し解析するといった生徒主体による実験と数学的モデリングの活動が可能である．データ収集機には，光，温度，電流・電圧，距離，音，圧力，力，ＰＨ，加速度センサーなどのセンサーが使用可能である．

図 2-3-2．CBL と音センサー

図 2-3-3．CDA と温度センサー

図 2-3-4 にグラフ電卓，データ収集機，距離センサー間におけるデータの流れを示す．最初に①では，グラフ電卓上がデータ収集機とセンサーを動作させる初期設定値（データ採取間隔，測定単位等）を転送する．②では，データ収集機がセンサーからアナログデータを採取し，デジタルデータに変換する．最後に③では，グラフ電卓はデジタルデータを受け取り，リストにデータを格納し，グラフ画面上にデータの散布図を表示する．この散布図を観察することで，実データをモデル化する関数を算出・検証することが可能である．

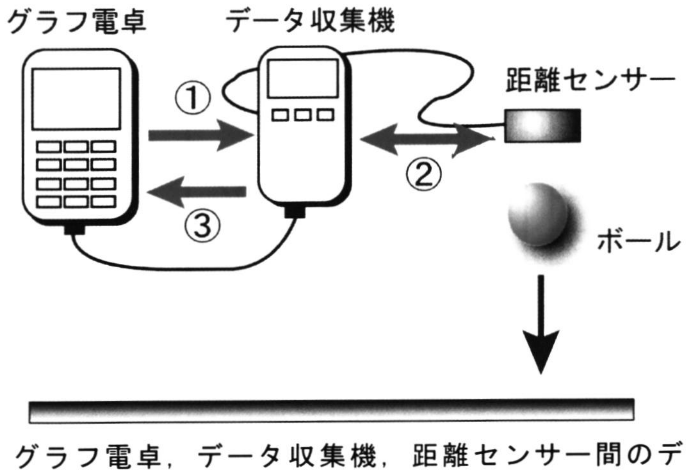


図 2-3-4．グラフ電卓，データ収集機，距離センサー間のデータ移動

b．実データ解析の補助

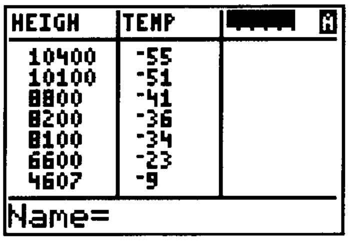
テクノロジーの特徴である数値的，グラフ的，代数的表現の多表現を関連づけながら実データを多角的に解析する，あるいは，統計パッケージに含まれる機能を使って簡易的に解析することによって，実現象をより深く数学的に解析することが可能になることは既に述べた．ここでは，グラフ電卓の①統計パッケージの回帰モデル機能，②CALC 機能，の活用方法について紹介する．

①統計パッケージの回帰モデル機能

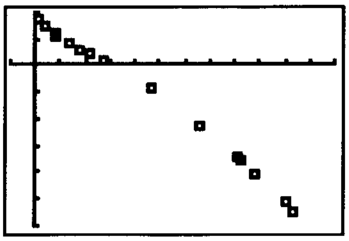
グラフ電卓には，リスト機能で入力されたデータをもとに，メジアン・メジアン線，線形回帰，指数回帰，成長曲線回帰などの数学的モデルを簡単に算出する回帰モデル機能がある．この機能により，未学習の関数を取り扱うことが可能となり，その結果，グラフ電卓が算出した複数の数学的モデルの候補の中から，一番適切なモデルを選択するといった数学的モデルを評価・検証する活動に焦点をあてることができる．

図 2-3-5 に回帰モデル機能を用いた数学的モデルの算出方法の例を示す．表に示した高度と外気温は，2002 年 3 月 21 日，成田上空のエア・カナダ AC03 便が着陸態勢に入ってから成田空港に着陸するまでの間，機内のモニタに表示されたデータを筆者が記録したデータである．このデータをグラフ電卓のリストに入力し，STAT PLOT 機能で散布図を表示し，線形回帰機能で算出すると $y=-0.0067x+18.678$ が得られ，グラフもほぼデータと一致する結果が得られた．x の係数 -0.0067 は高度 1 m の温度変化であり，これはほぼ理論値に一致する．さらに，定数項の 18.678 は高度 0 m の気温であり，これもほぼ妥当な値と考えられる．

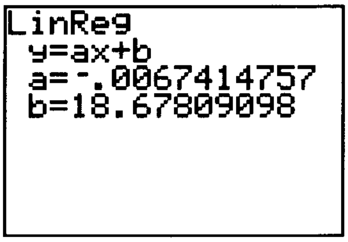
高度［m］	外気温［℃］
10400	−55
10100	−51
8800	−41
8200	−36
8100	−34
6600	−23
4607	−9
2742	2
2163	5
2132	4
1825	6
1306	9
853	12
850	11
380	15
44	18



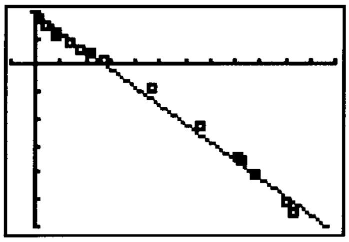
データ入力



散布図（STAT PLOT）



線形回帰の結果



結果のグラフ化

図 2-3-5．線形回帰機能による数学的モデルの算出とグラフ化

回帰モデル機能は，簡単に数学的モデルが算出できるため，関数を学習したばかりの中学生や数学が不得手な生徒にとってモデル化が困難であった現象を取り扱うことができる利点がある．特に，大澤（1996，1998a）のバトンパスの実践研究では，中学生が回帰モデル機能を活用して，算出した複数の数学的モデルの中から一番適切な数学的モデルを選択し，かつ，生徒が平行移動の考え方を活用して数学的モデルを目的に適するように修正した活動が特徴的である．

しかし，こういった利点がある反面，仕組みがブラックボックスであるため，回帰分析の理論を学習していない生徒が道具の使い方を誤ると，数学的モデリング過程における数学的作業は，グラフ電卓のボタンを押す操作だけに終わり「より良いモデル化」が行われない危険性があることが先行研究で指摘されている（Blum and Niss, 1989；Blum，1991）．

この課題に対して，本研究では，グラフ電卓の回帰モデル機能で算出した複数の数学的モデルの妥当性と，最適な数学的モデルを選択する数学的活動を実践した．その結果，生徒たちは自らの考えで 1)妥当性の検討基準の設定，2)現実場面との対比による検討，3)二つの数学的モデルの併用，など多様な検討を行ったことが明らかになった．詳しくは，４．３節で紹介する．

②CALC 機能

数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の利点で，数値的，代数的，グラフ的に実行した結果を探究することにより，問題場面が多角的に分析でき，現象をより良く理解できることは既に述べた．グラフ電卓には，TABLE 機能，TRACE 機能，CALC 機能といった機能を有するが，ここでは CALC 機能を活用した事例を紹介する．

図 2-3-6 は，グラフ電卓（TI-83）の CALC 機能の画面である．それぞれの機能を簡単に紹介する．

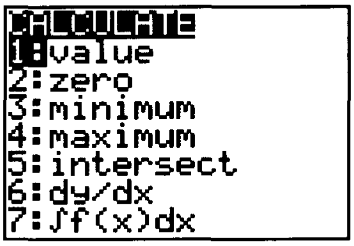


図 2-3-6．CALC 機能の一覧

1:value：指定した x の値に対する座標をグラフ上に示す．

2:zero：指定した範囲内での x 切片の座標をグラフ上に示す．

3:minimum：指定した範囲内での最小の座標をグラフ上に示す．

4:maximum：指定した範囲内での最大の座標をグラフ上に示す．

5:intersect：二つの関数の交点の座標をグラフ上に示す．

6:dy／dx：指定したグラフの座標における接線の傾き（微分係数）を算出する．

7:∫f(x)dx：指定したグラフの範囲における定積分を算出する．

CALC 機能を使った数学的モデリングの活用方法として，西村（2003a）の紙パック

ジュースを題材に簡単に紹介する．西村の取り上げた課題は，「横 18.8cm，縦 18.4cm の長方形の紙を使って，ジュースを入れる紙パックを作ろうと思います．この紙から 250ml 用の紙パックは作ることができるでしょうか．ただし，のりしろは，すべて8 mm とします.」である．まず最初に，生徒は実際の紙で直方体のパックを作成し，容積を表す方程式を求めた．この式が未学習である３次関数であるため，問題を解決する方法を生徒と議論したところ，「$y=250$ のグラフを出して，それとの交点を求めればよい」という考えが出た．このため，CALC 機能の 5:intersect を使って交点を求めた（図 2-3-7）．さらに，生徒から容積の最大に関する意見が出たために CALC 機能の 4:maximum を使って最大値を求めた（図 2-3-8）．

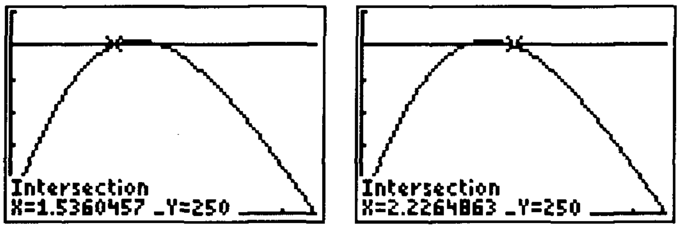


図 2-3-7．交点を求める機能

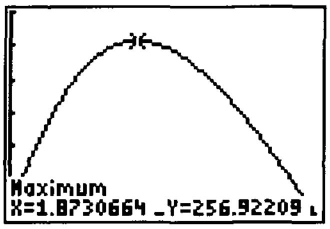


図 2-3-8．最大値を求める機能

この題材は，高等学校の微分法の応用として取り扱う題材であるが，西村は中学生を対象に CALC 機能を適材適所で活用しながら，しかも，単なるボタンプレッシングではなく，生徒の意見を適切に取り入れながら数学的モデリングの活動を行ったのが特徴的である．西村（2003a）は，題材の発展的な学習としての位置づけを次のように述べている．

> 「本課題では，３次関数や多変数関数が登場するので中学生にとっては高度な内容である．そこで，それらの関数のグラフ化や代数的処理の困難性を軽減するために，グラフ電卓や表計算ソフトを利用することを前提とする．
>
> そして，本課題を中学校における関数の学習全体に関わる発展として位置づけ，具体的な事象から，関数関係を見出し，事象・表・式・グラフを相互に関連づけながら考察する能力を一層伸ばすことをめざす.」（p.33）

池田（2004a）の数学的モデリングを促進させる実践においても，西村と同様な考え方でグラフ電卓を積極的に活用している．

本研究の実践では，特に CALC 機能の使用を行っていないが，生徒が自ら積極的に TABLE 機能，TRACE 機能を使って，現象を数値的，グラフ的に考察している様子が観察されている．

c．シミュレーションによる実験・探究の補助

自然・社会現象をコンピュータ等のテクノロジーでシミュレーションすることの有効性については既に述べた．グラフ電卓が持つ簡易プログラムを使用すると，簡単なシミュレーションが生徒の手元で，しかも，何時でも何処でも実行することが可能になった（Embse and Engebretsen，1996）．一方，プログラミングの知識がない人でも，自然・社会現象を表す数学的モデルを媒介変数方程式や数列の漸化式を入力するだけで，現象を視覚的・動的に観察することができる．ここでは，Demana and Waits（1993）の論文を参考に，媒介変数方程式を使った粒子運動のシミュレーションを紹介する．

数学 III の微分法の応用問題として，「y 軸と平行な直線上を運動する粒子の位置が $y=s(t)=2t^3-13t^2+22t-5$ で表される時，(a)粒子の運動が方向を変えるのは何秒後か？ (b)方向を変える位置を求めよ．(c) $1\leq t\leq 3$ のとき速度が最小となるのは何秒後か？」といった問題が取り扱われている．これを図 2-3-9 で示すように媒介変数方程式を使うと，粒子運動の位置と速度の関係が視覚的かつ動的に観察することができる．さらに，座標を調べる TRACE 機能やグラフを拡大する ZOOM 機能を用いると速度が最小となる位置をグラフ的・数値的に観察することができる．これにより，この問題を代数的に解く動機づけや意義を生徒に持たせることができる．また，粒子運動の位置を表す数学的モデル $y=s(t)$ を自由に変更することにより，粒子運動の位置と速度の関係，さらに，第二次導関数を入力することで加速度との関係も視覚的・動的に探究することができる．

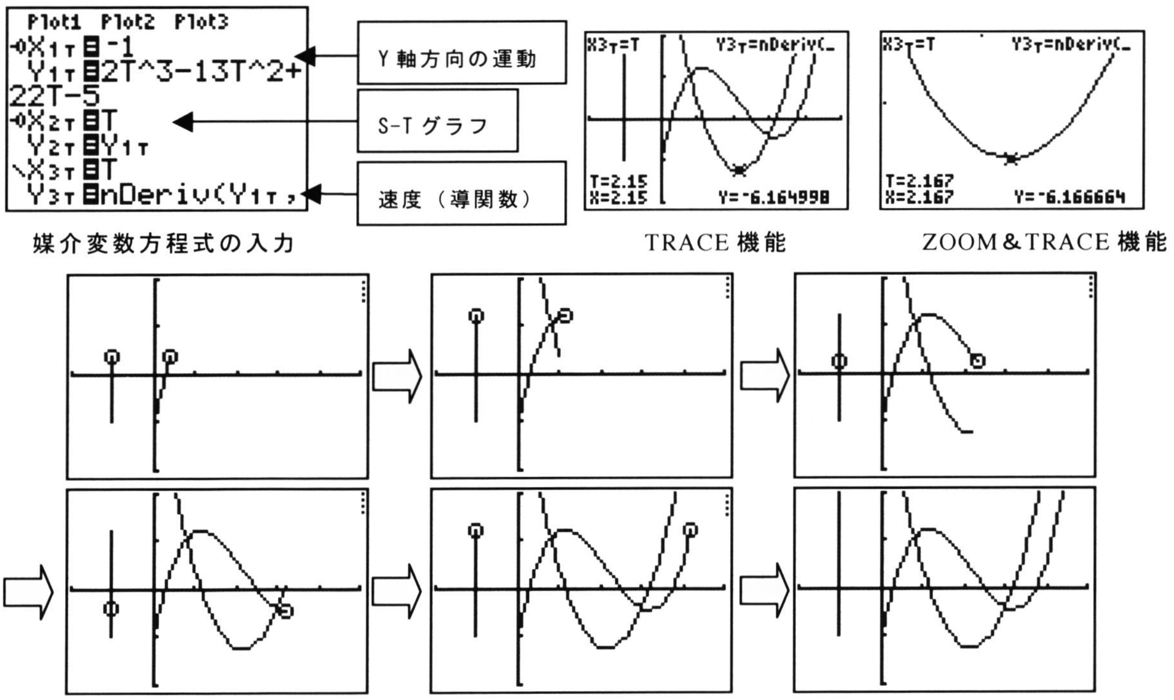


図 2-3-9．媒介変数方程式を用いた粒子運動のシミュレーション

5．我が国のハンドヘルド・テクノロジーを活用したモデリングの実践研究

我が国の数学的モデリングに関する実践研究は 1990 年代より徐々に行われたことは既に述べた．さらに，2．1節では，テクノロジーを活用した数学的モデリングの実践研究が 1996 年から行われたことを明らかにした[5]．ここでは，我が国の数学的モデリングに関する実践研究の中から，ハンドヘルド・テクノロジーを活用した実践研究に焦点を絞って，その活用方法について考察する．

表 2-3-1 は，我が国のハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学的モデリングの実践研究について，教材内容とハンドヘルド・テクノロジーの活用方法についてまとめたものである．ここで取り扱った文献は，数学教育関連学会の学術雑誌，著書，文部科学省科学研究費補助金，さらに，教育研究機関の研究紀要を参考とした．なお，同じ実践内容が記述してある文献に関しては，実践内容が詳しく記述されている文献を採用した．表には，発表年，著者，使用された機材，教材内容，数学的モデリングの各過程におけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法，さらに，使用されたテクノロジーの機能についてまとめた．数学的モデリングの各過程におけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法については，各過程で使用されたテクノロジーの表現の記号を数値的表現（N），グラフ的表現（G），代数的表現（S）とした．さらに，サブ記号として，生徒自身が実行した結果をハンドヘルド・テクノロジーに入力した場合の記号を 1，ボタン押下やコマンド等の命令によってハンドヘルド・テクノロジーが実行した場合の記号を 2 とした．以下に簡単な例で記号を説明する．

N1：定式化の過程では，収集したデータを生徒がグラフ電卓に入力してグラフ化する場合．さらに，その他の過程では，四則演算や三角関数の計算などの単純な計算をする場合．

N2：定式化では，CBL/CDA 等のデータ収集機がデータを収集し，自動的にグラフ化する場合．さらに，その他の過程では，TABLE 機能，TRACE 機能，CALC 機能等で数値を算出する場合．

G1：なし（グラフ電卓上で手書きのグラフ作成はできないため）．

G2：グラフ機能でグラフを表示する場合．

S1：生徒が自らの力で数学的モデルの方程式を導き出してテクノロジーに入力する場合．

S2：回帰モデル機能で数学的モデルの方程式を自動的に算出する場合．

---

[5] 表 2-1-4（p.40），表 2-1-5（p.41），表 2-1-8（p.43）を参照．

表 2-3-1．数学的モデリングにおけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法

年	著者	対象	機材	教材内容	定式化	数学的作業	解釈評価	より良いモデル化	使用機能
1996	大澤	中３	GC	バトンパス	N1	G2, S2	G2, S2	N2, G2, S1	回帰+グラフ化+TRACE＋TABLE
	柳本	中３	GC+CBL	ボールの落下など	N2	G2, S2	?	?	データ収集+回帰+グラフ化+TRACE
1997	西村，船元，植野	定高４	GC	テープカウンタ	N1	G2, S2	G2, S1	−	回帰+グラフ化
		高２	GC	レコードプレーヤ	−	N2, G2, S1	N2, G2, S1	−	グラフ化+TABLE
	小林	中３	GC+CBL	魔法の壺など	N2	G2	G2	−	データ収集+グラフ化
	氏家，佐伯	高専１	GC+CBL	歩いてグラフ	N2	G2, S1	G2, S1	G2, S1	データ収集+グラフ化+TRACE
	室岡	高２	GC	音階と振動数	−	N2, G2, S1	N2, S1	N2, S1	グラフ化+TRACE+TABLE
	氏家，佐伯	高専１	GC+CBL	音	N2	G2, S1	G2, S1	G2, S1	データ収集+グラフ化+TRACE
	鹿野	高１	GC+CBL	温度	N2	G2, S1	G2, S1	G2, S1	データ収集+グラフ化+TRACE
1998	宮川	高1･2	GC+CBL	歩いてグラフ	N2	G2	G2	−	データ収集+グラフ化
	西村	高３	GC+CBL	音	N2	N2, G2, S1	N2, G2, S1	N2, G2, S1	データ収集＋グラフ化+TRACE
	佐伯，氏家	高専１	GC+CBL	温度	N2	N2, G2	N2, G2, S1	−	データ収集＋グラフ化＋TABLE
	大澤	中３	GC	テープレコーダ	N1	N1, S1	N2	N2, G2, S2	回帰＋グラフ化＋TABLE
	柳本	中３	GC	地球平均気温など	N1	N12, G2, S2	?	?	回帰＋グラフ化＋TABLE
1999	松嵜，磯田	高２	GC	クランク機構	N1	G2, S1	G2, S1	G2, S1	グラフ化
	大澤	中２	GC	肥満とやせ	N1	N2, G2	N2	−	回帰+相関係数＋相関図
	深澤	高２	GC+CBL	角度の理解	N2	G2	−	−	データ収集＋グラフ化
	船元	中２	GC	イチローの打率	−	−	N2, G2, S1	−	グラフ化+TABLE
	植野	高２	GC	ハングライダー	N1	G2, S2	G2, S2	G2, S2	回帰＋グラフ化＋残差
	植野	高２	GC	オウム貝	−	N2, G2, S1	−	−	グラフ化+TABLE
	村上	中１	GC	タクシー料金	−	G2, S1	N2, G2	N2, G2	グラフ化＋TRACE（Windowの設定変更）
	佐伯，氏家	高専２	GC+CBL	振り子	N2	G2, S1	G2, S1	G2, S1	データ収集＋グラフ化+TRACE
			GC	振り子（周期）	N1	G2, S1	G2, S1	G2, S1	グラフ化
2001	西村	高１	GC	飲料水	N1	N1, G2, S1	N1, G2, S1	G2, S1	数値計算＋グラフ化
	西村	高１	GC+CBL	東京ドーム（落下）	N2	N2, G2, S1	N1, G2, S1	G2, S1	データ収集＋グラフ化+TRACE
	西村	高２	GC	ロックンローラ	−	G2, S1	G2, S1	G2, S1	グラフ化
	柳本	中３	GC	クジラ，スギ木材	−	N2, G2, S1	N2, G2, S1	N2, G2, S1	グラフ化+TABLE
	Stephens	中学	GC	放射能の半減期	−	N2, G2, S1	N2, G2, S1	N2, G2, S1	グラフ化+TABLE
2003	佐伯，氏家	高専２	GC+CBL	温度	N2	N2, G2, S12	N2, G2, S12	N2, G2, S12	データ収集＋グラフ化＋回帰+代入+TRACE
	佐伯，氏家	高専２	GC	コンピュータ台数	N1	N2, G2, S2	N2, G2, S2	N2, G2, S2	グラフ化＋回帰+代入+TRACE
	中村	高２･聾	GC+CBL	音	N2	N2, G2, S1	G2	N2, G2, S1	データ収集＋グラフ化+TRACE
	小寺	中３	GC	ウサギの生態	−	N1, G2, S1	G2	N2, G1	数値計算＋グラフ化
	西村	中３	GC	紙パック	−	N2, G2, S1	N2, G2, S1	N2, G2, S1	グラフ化+交点+最大値+TABLE
	佐伯	高１	GC+CBL	１秒振り子	N2	N2, G2, S1	N2, G2, S1	N2, G2, S1	データ収集＋グラフ化+TRACE
2004	池田	中３	GC	単利・複利など	−	?	?	?	グラフ化+最大値+最小値+TABLE

注）記号の見方：

	数値的表現	グラフ的表現	代数的表現
生徒が実行	N1	G1	S1
テクノロジーが実行	N2	G2	S2
両者が実行	N12	G12	S12

例外として，「−」はテクノロジーを活用しなかった場合であるが，活動を行わなかったことではない．また，「？」は論文から読み取れなかった場合に使用した．

表 2-3-1 の分析結果を参照すると，数学的モデリングにおけるハンドヘルド・テクノロジーの活用は，1996 年から徐々に行われていることが分かる[6]．これは，ハンドヘルド・テクノロジーが安価で，かつ，操作性が容易であることが大きな要因であると考える．さらに，何れの実践もハンドヘルド・テクノロジーを効果的に活用することにより，数値的，グラフ的，代数的に数学的モデリングの過程を実行していることが分かる．以下にハンドヘルド・テクノロジー活用の特徴について簡単に紹介する．

①データ収集機の活用

データ収集機の活用で物理と関連づけた実践が容易になり，ボールの落下運動，温度変化，音，音階，速度と加速度，振り子など，数学的モデリングの教材が豊富になった実践（柳本，1996b；小林，1997；鹿野，1997；氏家・佐伯，1997a；氏家・佐伯，1997b；宮川，1998；西村，1998；佐伯・氏家，1998；深澤，1999；佐伯・氏家，1999；西村，2001c；中村，2003；佐伯，2003；佐伯・氏家，2003a；佐伯・氏家，2003b）．

②回帰モデル機能の活用

回帰モデル機能の活用により，未学習内容の関数が数学的モデルとして取り扱われた実践（大澤，1996；柳本，1996b；大澤，1998a；大澤，1998b；柳本，1998；大澤，1999）．

数学的モデルを算出する労力を軽減し，数学的モデリングの他の活動に労力をかけるために回帰モデル機能が活用された実践（西村他，1997；植野，1999a；佐伯・氏家，2003b；佐伯・氏家 2003c）．

③未学習の内容の取り扱い

上記の回帰モデル機能を使用しなくても，生徒が発展的に未学習内容の関数を数学的モデルとして取り扱うことができた実践（[２次関数：西村，2001c][３次関数：西村，2003a][指数関数：Stephens M. and　柳本，2001；小寺，2003；池田，2004a][三角関数：西村，1998][数列：西村，2001b][漸化式：柳本，2001]）．特に，西村（1998，2001b，2001c）の実践は，数学的モデリング教材を通して多くの数学的な概念や手法の学習を構成する「概念学習型」の学習方法が特徴的である．また，小寺（2003）の実践では，事象の変化を差分でとらえる力の育成を目的として中学校の関数指導を位置づけており，高等学校で学習する微分や漸化式につながる点で特徴的である．

---

[6] コンピュータを活用した数学的モデリングの実践研究は，松宮・柳本（1995），柳本（1996），Stephens M. and 柳本（2001）のみである．

④数値的・グラフ的に解決する手法

代数的な解法で問題解決ができない場合，数値的・グラフ的に問題解決を行うために，グラフ電卓の TABLE 機能，TRACE 機能，CALC 機能等の機能が活用された実践．

◆TABLE 機能：大澤（1998b），佐伯・氏家（1998），粭元（1999），柳本（2001），西村（2003）

◆TRACE 機能：粭元（1999），村上（1999）

◆ZOOM 機能：粭元（1999）

◆CALC 機能［交点，最大値］：西村（2003a）[7]

⑤数学的モデルの解釈・評価，及び，より良いモデル化の手法

三輪（1983）は，数学的モデリングの教育的意義と問題点の中で，「定式化」，あるいは，「解釈・評価」は，これまでの学校教育で教えることのなかった高度な技能を要することを指摘している．これに対して，ハンドヘルド・テクノロジーの活用が，データ収集や代数計算における労力を軽減するため，数学的モデルの解釈・評価，及び，より良いモデル化の過程に時間をかけることができるようになった．表 2-3-1 に示した実践研究では，以下の手法で数学的モデルの解釈・評価，及び，より良いモデル化が行われている．

◆プロットしたデータと算出した数学的モデルのグラフとを一致させた手法：氏家・佐伯（1997a），氏家・佐伯（1997b），西村（1998），佐伯・氏家（1999），西村（2001b），中村（2003），佐伯（2003），佐伯・氏家（2003b），佐伯・氏家（2003c）

◆上記の手法で，特にグラフの平行移動を活用した手法：大澤（1996），大澤（1998a），佐伯・氏家（2003b）

◆複数の数学的モデルのグラフを同一画面に表示し比較検討した手法：鹿野（1997），大澤（1998b）

◆プロットしたデータと算出した数学的モデルとの残差を比較した手法：植野（1999a）

◆数学的モデルから算出した値と実現象データとを比較した手法：室岡（1997）

◆生徒が算出した数学的モデルをグラフ電卓に入力し，TABLE 機能で求めた数値データをもとに OHP にグラフを描き実物大の写真と重ねて検証した手法：植野（1999b）

---

[7] p.106 を参照．

以上，数学的モデリングの実践研究に関する先行研究をもとに，ハンドヘルド・テクノロジー活用の特徴について考察した．表 2-3-1 に示した全ての実践が関数の分野で行われおり，幾何の分野に関する実践が行われていない．このため，グラフ電卓の計算機能（四則演算や三角比など）や作図ツールを活用した数学的モデリングの教材開発，さらに，関数と幾何とを融合した教材開発が今後期待される．

Blum and Niss（1989）は，数学的モデリングにおける生徒に関する課題として，数学的モデリングは大変な労力を要し，かつ，予測がつかない数学学習であるとして生徒が捉えていることを指摘した．さらに，Blum and Niss（1989）と Blum（1991）は，数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の課題とリスクとして，単なるボタンプレッシングに置き換えてしまう可能性と，現象を熟考する本来の活動がテクノロジーに集中することで阻止される可能性を指摘している．しかし，我が国で行われた何れの実践研究においても，数学的モデリング過程の適材適所でハンドヘルド・テクノロジーを適切に活用し，個々の生徒及びクラス全体が積極的に数学的活動を行っていることが報告されている．この結果，我が国における実践研究は，数学的モデリングにおける生徒に関する課題とテクノロジー活用の課題は，ある程度克服されていると考える．

しかし，表 2-3-1 に示した実践研究は，一部の教育研究者及び実践研究者によるもので，我が国における通常の学校数学で実践されるまでには浸透していない．つまり，数学的モデリングにおけるカリキュラムに関する課題と教師に関する課題は，克服すべき課題として依然として残っている．これらの課題は，個々の教育研究者及び実践研究者レベルの問題ではなく，組織的に取り組む必要があると筆者は考えるが，これまでの実践研究で得られた成果をもとにした教材研究及び実践・評価を継続的に行っていくことが，我々実践研究者に課せられた課題であるとも筆者は考える．

6．まとめ

本節では，本研究におけるタイプ２の数学的活動，つまり，日常的な事象，自然現象，社会現象等の実現象と数学とをつなげる数学的活動に焦点を絞り，①数学的モデリングの捉え方と課題，②数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義と課題，③数学的モデリング研究におけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法，④我が国のハンドヘルド・テクノロジーを活用したモデリングの実践研究，について考察した．

まず，①数学的モデリングの捉え方では，数学的モデリングの研究動向，「数学的モデル」と「数学的モデリング」の定義，数学的モデリングの重要性と課題について，先行研究をもとに考察した．特に，数学的モデリングの課題は，カリキュラム，教師，

生徒の三つの面から考察したが，何れの面も十分に解決されていないことが明らかになった．

次に，②数学的モデリングにおけるテクノロジー活用の意義と課題を考察した．テクノロジー活用の意義は，1)データ収集の補助，2)実データ解析の補助，3)シミュレーションによる実験・探究の補助，の三つに集約されることが分かった．一方，テクノロジー活用の課題として，1)基本的な計算やグラフの技能・能力の低下，2)実際の実験や実物の代用として提供された場合の現実性の喪失，3)単なるボタンプレッシングに置き換えてしまう可能性，4)現象を熟考する本来の活動がテクノロジーに集中することで阻止される可能性，が指摘されているが，現状ではこれらの課題が十分に克服されたとは言えないことが明らかになった．

また，③数学的モデリング研究におけるハンドヘルド・テクノロジーの活用方法では，1)データ収集の補助，2)実データ解析の補助，3)シミュレーションによる実験・探究の補助，として有効に活用できることを明らかにした．

最後に，④我が国のハンドヘルド・テクノロジーを活用したモデリングの実践研究では，我が国で公表された先行研究をもとに分析した．その結果，何れの実践研究においても，数学的モデリング過程の適材適所でハンドヘルド・テクノロジーを適切に活用し，個々の生徒及びクラス全体が積極的に数学的活動を行っていることが明らかになった．このことから，我が国での実践研究は，数学的モデリングにおける生徒に関する課題とテクノロジー活用の課題がある程度克服されていることが分かった．しかし，数学的モデリングにおけるカリキュラムに関する課題と教師に関する課題は，これから克服すべき課題として依然として残っていることも明らかになった．

引用文献・参考文献

1) Barclay T. (1989). "MBL to Model: Combining Real World Data with Theoretical Models". In Blum W. et al (eds.). Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics. Ellis Horwood. pp.357-360.

2) Blum W. and Niss M. (1989) " Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction". In Blum W., Niss M. and Huntley I. (eds.) . Modelling, Applications and Applied Problem Solving. Ellis Horwood. pp.1-21.

3) Blum W. (1991). " Applications and Modelling in Mathematics Teaching – A Review of Arguments and Instructional Aspects". In Niss M., Blum W. and Huntley I. (eds.) . Teaching of Mathematical Modelling and Applications. Ellis Horwood. pp.10-29

4) Blum W. (1998). "On the Role of 'Grundvorstellungen' for Reality-Related Proofs – Examples and Reflections". In P. Galbraith, W. Blum, G. Booker & I. D. Huntley (eds.) . MATHEMATICAL MODELLING Teaching and Assessment in a Technology-Rich World. England. Horwood Publishing Limited. pp.63-74.

5) Blum W. et al. (2002). "ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education – Discussion Document". Educational Studies in Mathematics. Vol.51. pp.149-171.

6) Burghes D.N. (1980). "Mathematical Modelling: A positive Direction for the Teaching of Applications of Mathematics at School" . Educational Studies in Mathematics. Vol.11. pp.113-131.

7) Bushaw D., Bell M., Pollak H.O., Thompson M., and Usiskin Z. (1980). A Sourcebook of Applications of School Mathematics. MAA and NCTM.

8) Clatworthy N.J. and Galbraith P.L. (1987). "Mathematical Modelling: Innovation in senior mathematics". Australian Senior Mathematics Journal. Vol.1, No.2. pp.38-49.

9) Corbitt M.K. and Edwards C.H. (1979). "Mathematical Modeling and Cool Buttermilk in the Summer". In Reys R.E. (Ed.). 1979 Yearbook: Applications in school mathematics. NCTM. pp. 217-226.

10) Demana F. and Waits B.K. (1993). "The Particle-Motion Problem" . Mathematics Teacher. Vol.86. No.4. pp.288-292.

11) Embse C.V. and Engebretsen A. (1996). "A Mathematical Look at a Free Throw Using Technology". Mathematics Teacher. Vol.89. No.9. pp.774-779.

12) Fey J.T.（1987）. 数学教育とコンピュータ. 成嶋弘監訳. 東海大学出版会.

13) Freudenthal H.（1968）. "Why to Teach Mathematics so as to be Useful". Educational Studies in Mathematics. Vol.1. No.1/2. pp.3-8.

14) 深澤一幸（1999）.「テクノロジーを活用した教材開発に関する研究 −角度センサーの開発とその教材−」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第81巻. 第11号. pp.17-24.

15) Galbraith P.L. and Clatworthy N.J.（1990）. "Beyond Standard Models – Meeting the Challenge of Modelling". Educational Studies in Mathematics. Vol.21. pp.137-163.

16) Hans-Wolfgang H. and Blum W. (eds.)（2004）. ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education. Pre-Conference Volume. University of Dortmund, Department of Mathematics, IEEM.

17) Holtzman W.H.編（1977a）. CAIシステムⅠ：基礎編. 木村捨雄, 細井正訳. 共立出版.

18) Holtzman W.H.編（1977b）. CAIシステムⅡ：実践編. 木村捨雄, 細井正訳. 共立出版.

19) Howson A.G. and Kahane J.-P.（1986）. The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press. 植竹恒男監訳（1989）. 数学教育とコンピュータ. 日本数学教育学会編訳. 聖文社.

20) 池田敏和, 浜泰一（1992）.「高等学校数学科における数学的モデリングの事例的研究」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第74巻. 第7号. pp.42-50.

21) 池田敏和, 山崎浩二（1993）.「高数学的モデリングの導入段階における目標とその授業展開のあり方に関する事例的研究」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第75巻. 第1号. pp.26-32.

22) Ikeda T. and Stephens M.（1998）. "Some Characteristics of Students' Approaches to Mathematical Modelling in the Curriculum based on Pure Mathematics". 日本科学教育学会誌. 科学教育研究. Vol.22. No.3. pp.142-154.

23) 池田敏和（1998）.「実世界に役立つ数学」. 樋口禎一・細川尋史・池田敏和著「数学の才能を育てる」. 牧野書店. pp.87-109.

24) 池田敏和（1999）.「数学的モデリングを促進する考え方に関する研究」. 日本数学教育学会誌. 数学教育学論究. Vol.71・72. pp.3-18.

25) 池田敏和（2001）. 数学的モデリングを促進する考え方の指導・評価に関する研究 −指導・評価に向けての基礎的研究−. 平成11・12年度文部省科学研究費補助金（奨励研究（A）：課題番号11780111, 代表：池田敏和）研究成果報告書.

26) 池田敏和（2002）.「中等数学科における数学的モデリング・応用の指導目標に関

する一考察」．日本数学教育学会誌．数学教育．第84巻．第5号．pp.2-12.
27) 池田敏和（2004a）．「数学的モデリングを促進する考え方に焦点を当てた指導目標の系列と授業構成に関する研究」．日本数学教育学会誌．数学教育学論究．Vol.81・82．pp.3-32.
28) 池田敏和（2004b）．「中学校段階におけるモデリング・応用の指導の8カ国における動向-第14回ICMI研究のワーキンググループの活動を通して-」．日本科学教育学会第28回年会論文集．pp.225-228.
29) Isoda M. and Matsuzaki A.（2003）．"The Roles of Mediational Means for Mathematization: The Case of Mechanics and Graphing Tools"．日本科学教育学会誌．科学教育研究．Vol.27．No.4．pp.245-257.
30) Kaiser-Messmer G.(1991)．"Application-Orientated Mathematics Teaching : A survey of the Theoretical Debate". In Niss M. et al (eds)．Teaching of Mathematical Modelling and Applications．Ellis Horwood ．pp.83-92.
31) 加藤竜吾（2000）．理科教材を利用した中学校数学科教材開発に関する研究．上越教育大学大学院教育学研究科修士論文．
32) 加藤竜吾，黒木伸明（2002）．「目標に多重構造を持つ数学の授業構成について」．数学教育学会誌．Vol.43．No.1・2．pp.35-42.
33) Kerr D.R. and Maki D.（1979）．"Mathematical Models to Provide Applications in the Classroom"．In Reys R.E.（Ed.）．1979 Yearbook: Applications in school mathematics．NCTM．pp. 1-7.
34) 小林力（1997）．「日常的な事象の観察から関数の概念を知る -魔法の壺とバンジージャンプをデータ収集機で実験・観察する-」．佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験･観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」．明治図書．pp.49-57.
35) 小寺隆幸（1996）．地球を救え！数学探偵団［一次関数］．国土社．
36) 小寺隆幸(1999a)．「カリキュラム構成の視点-数学教育を現実世界に開くために」．汐見稔幸，井上正允，小寺隆幸編「時代は動く！どうする算数・数学教育」．国土社．pp.164-181.
37) 小寺隆幸（1999b）．「現実の事象のモデル化を重視する数学科カリキュラム」．日本数学教育学会編「算数・数学カリキュラムの改革へ」．産業図書．pp.221-239.
38) 小寺隆幸（2001）．「関数を使うと見えない未来が見えてくる」．岩川直樹・汐見稔幸編「「学力」を問う」．草土文化．pp.78-90.
39) 小寺隆幸（2003）．「事象の変化を差分でとらえる力を育てる中学校の関数指導 -

生物の個体数の変化を素材として-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第85巻. 第11号. pp.3-14.

40) 国立教育政策研究所 (2004). 平成14年度高等学校教育課程実施状況調査. http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h14/index.htm.

41) 熊谷治久 (2002).「数学的モデル化過程を取り入れた授業実践-航空写真の問題を利用して-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第84巻. 第9号. pp.21-28.

42) 熊谷治久 (2004).「確かな定式化を目指した数学的モデル化過程の授業-影の長さの問題を利用して-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第86巻. 第11号. pp.12-19.

43) Lesh R. , Niss M. and Lee D. (1986). "Theme Group 6: Applications and Modelling". In Carss M. (eds.). Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education. Birkhauser Boston, Inc.. pp.197-211.

44) Matsumiya T., Yanagimoto A. and Mori Y. (1989). "Mathematics of Lake – Problem Solving in the Real World". In Blum W. et al (eds). Modelling, Applications and Applied Problem Solving. Ellis Horwood . pp.87-97.

45) 松宮哲夫, 柳本哲編著 (1995). 総合学習の実践と展開-現実性をもつ課題から-. 明治図書.

46) 柗元新一郎 (1999).「中学校における数学的モデル化教材の開発と実践-「イチローのヒット数」をグラフ電卓で求める-」. 杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会「新しい算数・数学教育の実践をめざして」. 東洋館出版社. pp.183-192.

47) 柗元新一郎 (2000).「数学的モデルをつくることを通して数学の世界を広げていく活動-全身が映る鏡の大きさを考える-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第82巻. 第1号. pp.10-17.

48) 松嵜昭雄, 礒田正美 (1999).「数学的モデリングにおける理解深化に関する一考察 -クランク機構の関数関係の把握-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第81巻. 第3号. pp.20-25.

49) 松嵜昭雄 (2003).「モデリング研究におけるいくつかの課題-14th ICMI Study ディスカッション・ドキュメントを参照して-」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.548. pp.99-103.

50) 松嵜昭雄 (2004).「現実的数学教育 (REM) におけるモデリングの捉え方-14th ICMI Study における Gravemeijer の論文より-」. 教育科学・数学教育. 明治図書. No.558. pp.104-108.

51) 宮川健 (1998).「テクノロジーによる関数関係理解の改善に関する一考察 -事象のグラフ化におけるミスコンセプションに焦点をあてて-」. 日本数学教育学会誌.

数学教育．第 80 巻．第 1 号．pp.9-14.

52) 三輪辰郎（1983）.「数学教育におけるモデル化についての一考察」．筑波数学教育研究．第 2 巻．pp.117-125.

53) 三輪辰郎 (2004).「数学教育における数学的モデル化の教授－学習の意義と課題」．日本科学教育学会第 28 回年会，自主企画課題研究・講演資料．

54) 文部省（1999）．高等学校学習指導要領解説 -数学編理数編-．実教出版．

55) 村上豊（1999）.「グラフ電卓の利用を視野においたモデル単元の実践と検討-1次関数・1次方程式・1次不等式・連立方程式を事例に-」．杉山吉茂著「高度情報化社会に対応する数学教育カリキュラムの開発に関する総合的研究」．平成 8 －10 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究 A：課題番号 08308014，代表：杉山吉茂）研究成果報告書．　pp.97-118.

56) 室岡和彦（1997）.「音階による指数の探究 -LOGO とグラフ電卓を用いて指数のしくみを探る-」．佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」．明治図書．pp.80-88.

57) NCTM（1979）．Applications in School Mathematics．1979 Yearbook．Reston．VA.

58) NCTM (1989)．Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics．Reston．VA.

59) 長崎栄三編著 (2001)．算数・数学と社会・文化のつながりー小・中・高校の算数・数学教育の改善を目指してー．明治図書．

60) 長崎栄三，西村圭一，五十嵐一博，牛場正則，久保良宏，久永靖史，柗元新一郎（2004）.「数学と社会をつなげる力に関する研究-中学校・高等学校を中心に-」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 86 巻．第 11 号．pp.2-11.

61) 中村好則（2003）.「聾学校におけるテクノロジー活用による実験・観察を取り入れた指導の効果 -高等部における「音の探究」の指導事例を通して-」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 85 巻．第 9 号．pp.18-25.

62) 西村圭一，柗元新一郎，植野美穂（1997）.「数学的モデル化教材の評価に関する研究」．東京学芸大学数学教育研究．第 9 号．pp.41-54.

63) 西村圭一（1998）.「CBL／CDA を利用した三角関数の指導に関する研究 -「音」を題材として-」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 80 巻．第 7 号．pp.11-19.

64) 西村圭一（2001a）．数学的モデル化の教材開発とその授業実践に関する研究-高等学校数学科を中心に-．東京学芸大学大学院教育学研究科修士論文．

65) 西村圭一（2001b）.「数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 83 巻．第 11 号．pp.2-12.

66) 西村圭一 (2001c).「ボールを東京ドームの天井に当てるには」. 長崎栄三編著「算数・数学と社会・文化のつながり―小・中・高校の算数・数学教育の改善を目指して―」. 明治図書. pp.156-163.
67) 西村圭一 (2001d).「ロックンローラ（二重観覧車）の動き」. 長崎栄三編著「算数・数学と社会・文化のつながり―小・中・高校の算数・数学教育の改善を目指して―」. 明治図書. pp.164-171.
68) 西村圭一 (2003a).「数学的モデル化を取り入れた発展的な学習の授業実践 -紙パックジュースを題材に-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 85 巻. 第 11 号. pp.31-39.
69) 西村圭一 (2003b).「幾何学化をめざす授業の研究」. 日本科学教育学会誌. 科学教育研究. Vol.27. No.3. pp.223-231.
70) 西村圭一 (2004). 中等教育数学科カリキュラムの開発に関する基礎的研究 -米国の教科書の分析及び授業実践を通して-. 平成 15 年度 東京学芸大学附属学校研究会プロジェクト（研究代表：西村圭一）研究成果報告書.
71) 布川和彦 (1998).「教科の知識と問題場面のアプローチ」. 一般教科教育学研究会編「一般教科教育学序説」. 大学教育出版. pp.99-120.
72) 小倉金之助 (1972). 数学教育の根本問題. 玉川大学出版部.
73) 大澤弘典 (1996).「現実場面に基づく問題解決 -グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第 9 号. pp.16-20.
74) 大澤弘典 (1998a). 中学校における数学的モデリングの指導についての研究：生徒によるグラフ電卓の利用を視点として. 上越教育大学大学院修士論文.
75) 大澤弘典 (1998b).「数学的モデリングにグラフ電卓の利用を図った教材例 -テープレコーダのカウンター問題-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第 9 号. pp.30-33.
76) 大澤弘典 (1999).「肥満とやせの判定基準づくり -数学を核とした総合的な学習の時間の展開例-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 81 巻. 第 11 号. pp.5-9.
77) 太田伸也 (1997).「生徒に幾何の世界を構成させる図形指導（2）-「写真に写る大きさと距離との関係」を題材に-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 79 巻. 第 5 号. pp.24-32.
78) 太田伸也 (1999).「太陽の動きを円錐でとらえる-中学校図形指導改善のための教材開発とその実践の試み-」. 杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会「新しい算数・数学教育の実践をめざして」. 東洋館出版社. pp.173-182.
79) 太田伸也 (2002).「太陽の動きを捉えるための数学的モデルを作る活動を通して

空間図形の見方を広げる指導」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 84 巻．第 11 号．pp.10-20.

80) 太田伸也（2004）．数学科の授業改善のための教材開発．平成 13－15 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究（C）(2)：課題番号 13680185，代表：太田伸也）研究成果報告書．

81) Pollak, H.O.（1980）．「数学と他の学科との相互作用」．数学教育国際委員会（ICMI）編．数学教育新動向研究会訳「世界の数学教育その新しい動向」．共立出版．pp.299-320.

82) 佐伯昭彦，礒田正美，清水克彦編著（1997）．テクノロジーを活用した新しい数学教育－実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善－．明治図書．

83) 佐伯昭彦，氏家亮子（1998）．「数学的モデリングを重視した総合カリキュラム －身近な物理現象を数学的にモデル化する授業－」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 80 巻．第 9 号．pp.10-18.

84) 佐伯昭彦，氏家亮子(1999)．「数学と他教科とを関連づけたクロスカリキュラムの試み」．日本数学教育学会編「算数・数学カリキュラムの改革へ」．産業図書．pp.295-313.

85) 佐伯昭彦（2000）．数学と物理とを関連づけた総合カリキュラムに関する実証的研究－身近な自然現象を取り入れた実験・観察型授業－．平成 10－11 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究（C）：課題番号 10680298，代表：佐伯昭彦）研究成果報告書．

86) 佐伯昭彦（2002）．生徒個々の数学的モデリング能力に応じた総合学習の教材開発に関する研究－簡易テクノロジーを活用した数学と理科との総合学習－．平成 12－13 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究（C）：課題番号 12680291，代表：佐伯昭彦）研究成果報告書．

87) 佐伯昭彦（2003）．数学と物理とを関連させた総合的学習の有効性に関する実証的研究．平成 12－14 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究（B）：課題番号 12551004，代表：佐伯昭彦）研究成果報告書．

88) 佐伯昭彦，氏家亮子（2003a）．「数学と物理とを統合したクロスカリキュラム型授業の教育効果」．工学教育．51 巻 1 号．pp.109-114.

89) 佐伯昭彦，氏家亮子（2003b）．「数学的モデリング過程における学習者の実データ解析方法－「お湯の冷め方」実験での数学的モデルの解釈・評価・より良いモデル化－」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 85 巻．第 3 号．pp.12-21.

90) 佐伯昭彦，氏家亮子（2003c）．「数学的モデルの妥当性に関する学習者の検討方法

-回帰モデル機能を用いたより良いモデル化-」. 日本科学教育学会誌. 科学教育研究. Vol.27. No.5. pp.354-361.

91) 清野辰彦 (2004).「「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の授業-「一次関数とみる」見方に焦点をあてて-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第86巻. 第1号. pp.11-21.

92) 鹿野敏一 (1994). 高等学校数学におけるテクノロジーを用いた数学的モデル化の教材開発に関する研究. 筑波大学大学院修士論文.

93) 鹿野敏一 (1997).「コーヒーはどんなふうに冷めていくの？ -温度の下がり方を関数で探究／データ収集機と数学的モデル化-」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」. 明治図書. pp.100-107.

94) 島田茂編著 (1977). 算数数学科のオープンエンドアプローチ. みずうみ書房.

95) 島田茂編著 (1995). 新訂 算数数学科のオープンエンドアプローチ. 東洋館出版.

96) Stephens M., 柳本哲 (2001). 総合学習に生きる数学教育. 明治図書.

97) 杉山吉茂 (1999). 高度情報化社会に対応する数学教育カリキュラムの開発に関する総合的研究. 平成８ー10 年度文部省科学研究費補助金 (基盤研究 A：課題番号 08308014, 代表：杉山吉茂) 研究成果報告書.

98) 植野美穂 (1999a).「グラフ電卓を用いた高校数学教材の開発」. 杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会「新しい算数・数学教育の実践をめざして」. 東洋館出版社. pp.193-203.

99) 植野美穂 (1999b).「テクノロジー利用の教材開発」. 杉山吉茂著「高度情報化社会に対応する数学教育カリキュラムの開発に関する総合的研究」. 平成８ー10 年度文部省科学研究費補助金 (基盤研究 A：課題番号 08308014, 代表：杉山吉茂) 研究成果報告書. pp.81-88.

100) 氏家亮子, 佐伯昭彦 (1997a).「一定の速さで歩いた様子を１次関数でモデル化する -速さと速度をデータ収集機で実験・観察する-」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」. 明治図書. pp.58-66.

101) 氏家亮子, 佐伯昭彦 (1997b).「君は音を見たことがあるか？ -周期現象をデータ収集機で実験・観察する-」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」. 明治図書. pp.89-99.

102) 柳本哲 (1996a).「中学校における数学的モデリングについて-給水タンクを事例

として-」．日本数学教育学会誌．数学教育．第 78 巻．第 5 号．pp.2-9.

103) 柳本哲（1996b）．「グラフ電卓を活用した数理の総合学習-CBL システムを用いた実験から-」．大阪教育大学数学教育研究．第 26 号．pp.41-54.

104) 柳本哲（1998）．「グラフ電卓を用いた問題解決学習-中学 3 年の実践内容と生徒の反応-」．大阪教育大学数学教育研究．第 28 号．pp.45-57.

105) 柳本哲（2001）．「動植物を保存しよう-グラフ電卓を使って個体数を調べる」．高階玲治編「算数・数学科から発展する総合学習の学力調査」．明治図書．pp.84-94.

106) Waits B.K. and Demana F.（2000）．"Calculators in Mathematics Teaching and Learning Past, Present, and Future"．In Burke M.J.（Ed.）．2000 Yearbook: Learning Mathematics for a New Century．NCTM．pp.51-66.