第３章

通常の数学授業における数学的活動とその実践

３．１　単元の導入時における数学的活動
－極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動－

１．はじめに

２．２節において，テクノロジー活用の利点の一つとして，数値的表現，グラフ的表現，代数的表現の多表現を関連づけによる理解の深化について記述した[1]．さらに，NCTM（1989）の第９学年から第 12 学年のスタンダード 13（微分積分学の概念的理解）では，テクノロジーを活用した数値的，グラフ的なインフォーマルな探究が微積分学を学習する確かな基礎づくりとなることを強調していることも示した．これに対して，我が国のグラフ電卓を活用した実践研究では，多表現を関連づけたインフォーマルな数学的活動の実践があまり行われていないことが先行研究から明らかになった．

本研究では，単元の導入時における数学的活動として，極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動を行った．授業では，分数関数の不連続点についてグラフ電卓を活用してグラフ的・数値的に探究する数学的活動を通して，グラフの不連続点が生じる原因を生徒自身の考え方で考察し，その結論を記述させた．さらに，生徒が実験・観察等の外的な活動を通してインフォーマルに理解した考え方をクラス全体に提示して，それらを教科書に記述された数学的な概念や記号に置き換えながら授業を展開した．ここでは，本授業の目的・方法，授業設計の視点，授業の展開，さらに，生徒が行った探究結果について報告する．

なお，本稿では，グラフ電卓を活用した主体的な数学的活動を通して，生徒が未学習の内容を具体的な事例から帰納的に理解することを「インフォーマルに理解する」と定義する．これに対して，「フォーマルに理解する」とは，数学用語，記号，数式，グラフ等で記述された数学の内容を演繹的に理解することを指す．

２．これまでの指導の問題点

現行の学習指導要領解説での極限の取り扱いは，「数学Ⅱ」では，速さや接線の考えから極限を直感的に扱い微分係数や導関数の計算が理解できる程度にとどめている（文部省，1999）．さらに，「数学Ⅲ」では，関数の導関数を求める計算に必要となる内容にとどめている．しかし，教科書の極限の単元では，分母または分子が二次以上である分数関数の計算問題が多く取り扱われている．これは，分数関数は極限の単元

---

[1] ２．２節（pp.61-64）を参照．

以前に学習する関数と比べ，グラフの振る舞いが複雑なことから，local behavior（$x \to a$ でのグラフの振る舞い）と end behavior（$x \to \pm\infty$ でのグラフの振る舞い）に関する計算問題が取り扱いやすいためだと考える．

ここで日米の分数関数の取扱いを比較してみる．米国の教科書では，極限を学習する準備として分数関数のグラフの振る舞いを local behavior と end behavior に分類して体系的かつ代数的・数値的・グラフ的に説明している（Demana, et. al,1993; Finney, et. al,1994; Murdock, et. al,1998; UCSMP,1998; Hornsby, et. al,1999）．これは，Demana ら（1993）が分数関数の学習目的で「生徒は，分数関数の end behavior モデルと漸近線を記述することで極限の概念を調べる．」と述べるように，分数関数の学習と極限の学習との関連づけを意識していることが分かる．

一方，我が国における分数関数の取扱いは，分母・分子が一次のみで，代数計算によるグラフの平行移動に焦点が置かれている．これに対して，極限の学習では分母・分子が二次の分数関数が扱われることが多い．例えば，教科書の例題にある $\lim_{x \to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ の解法は，図 3-1-1 に示すように代数計算による式展開とグラフで説明されているが，分数が 2 次以上のグラフを正確に描ける生徒は多くはないと思われる．

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to 2}\frac{x^2-4}{x-2}\\
&=\lim_{x \to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}\\
&=\lim_{x \to 2}(x+2)\\
&=4
\end{aligned}
$$

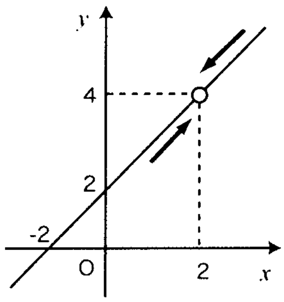


図 3-1-1．教科書の解答例

実際に筆者のクラスで，極限の学習前に $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ のグラフを描かせたところ，図 3-1-2 に示す誤りパターンが見られた．これらの誤りは，(1) x が整数である座標のみでグラフを描いている，(2) $\frac{0}{0}=0$ と考えている，が原因である．

このような誤り原因を取り除かない限り，生徒達は極限の問題を代数計算のみで解を算出することが出来ても，分母・分子が二次の分数関数のグラフは未学習であるため，得られた解をグラフ的に数値的に吟味することは出来ないと思われる．

このため，本数学的活動では，極限の単元の導入時に，分数関数 $f(x)$ の不連続点に

関して，x が限りなく a に近づくときの $f(x)$ の振る舞いをグラフ的かつ数値的に観察し，生徒自身が極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動の教材を開発した．

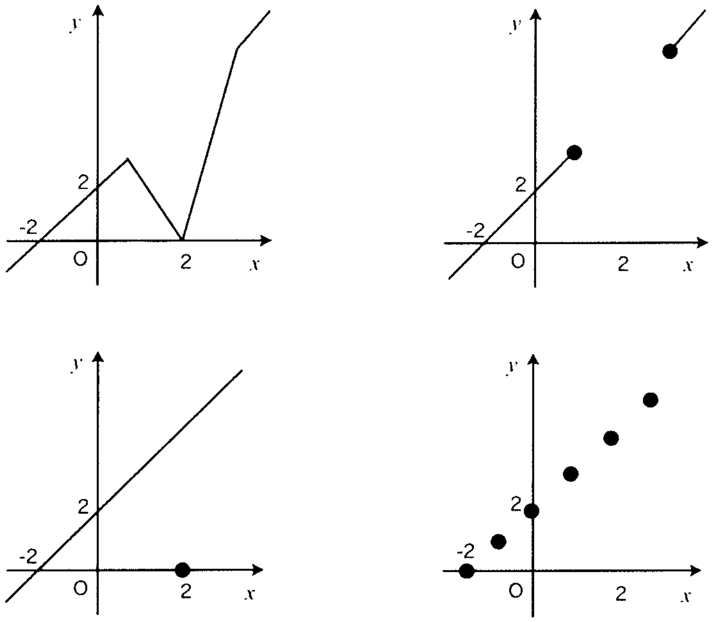


図 3-1-2．分数関数の誤答例

３．授業の目的

分数関数のグラフの振る舞いをグラフ的かつ数値的に観察する数学的活動を通して，生徒自身が極限の概念をインフォーマルに理解することを授業の目的とする．

４．授業の方法

1) 授業形態：プリントを使った個人による数学的活動
2) 対象学年と人数：金沢高専，２年生 80 名
3) 授業者：佐伯昭彦
4) 実施期日：2002 年９月
5) 使用機器：グラフ電卓(TI-83 Plus)

５．授業設計の視点

(1) 前提とする数学的能力

分母と分子が一次である分数関数のグラフは 1 年次で学習済みである．

(2) 未学習の分数関数を題材として選んだ理由

授業で取り扱った数学的活動の題材は，$y=\dfrac{1}{x+1}$（既習）と $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$（未学習）である．

前者は$x=-1$における漸近線，後者は$x=2$における取り除き得る不連続点（removable discontinuity：授業では簡単に「穴」と表現したので，以下「穴」と記す[2].）を探究する数学的活動であり，最初にグラフ電卓を使わないでこれらのグラフを生徒に描かせた．未学習の分数関数を選んだ理由は，図 3-1-2 に示したように，生徒が描いた $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ のグラフが，分母が０になるxの近辺でそれぞれ異なっている原因を生徒に考えさせる動機を与えるため，さらに，分母が０となるxの近辺のグラフの振る舞いをグラフ的かつ数値的に調べる必要性を生徒に持たせるためである．また，分数関数のグラフが予想に反して直線になることに対する驚きと知的好奇心を持たせるために，未学習の $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ を選んだ．

(3) グラフ電卓活用の留意点

グラフ電卓を使った数学的活動では，分母が０となるxの近辺をグラフ的アプローチと数値的アプローチの２つの方法で探究した．グラフ的アプローチは，分母が０となるxの近辺のグラフを拡大して漸近線や「穴」の振る舞いを視覚的に観察する方法で，例えば図 3-1-3 に示すように $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ のグラフは $x=2$ で「穴」が空いているように見える[3]．また，数値的アプローチは，グラフ電卓の TABLE 機能を使って，分母が０となるxの近辺におけるyの値を数値的に観察する方法である．例えば，図 3-1-4 に示すように，$y=\frac{x^2-4}{x-2}$ の $x=2$ 前後の数表を見ることができる．この他，数値的アプローチでは，グラフ電卓の TRACE 機能や ZOOM 機能を活用することも考えられるが，本教材では以下の３つの理由から TABLE 機能のみを扱った．

1) 生徒の能力を考慮して，多くの操作・探究による生徒の混乱を避けるため
2) TABLE 機能は，関数の極限値が両側（$x\to a-0$と$x\to a+0$）から近づくことを連続的に観察できるため（図 3-1-4）
3) TABLE 機能は，xの増分（図 3-1-4 は$\Delta Tbl=0.001$）が自由に設定できるので，関数が不連続になる前後の数値を生徒の考えで細かく調べることが可能なため

---

2 Murdock, J. 他（1998）と Hornsby, J.他（1999）の教科書では，removable discontinuity のことを hole「穴」と記述している．

3 グラフ電卓でグラフの「穴」を視覚的に表示するには，グラフの表示範囲設定に注意しなければならない．これは液晶画面のピクセル数に影響するもので，ピクセル数は各機種によって異なる．詳しくは２．２節（pp.74-77）と Vonder, C.他（1996）の論文を参照．

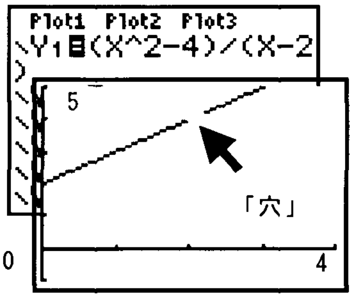


図 3-1-3．グラフ電卓に表示された「穴」

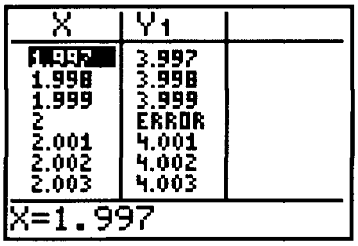


図 3-1-4．TABLE 機能による数表

６．授業の展開

(1) **第１時間目（20 分）**

◆事前調査：ウォームアップとして二次関数 $y=3-x^2$ ，さらに，本題として二つの分数関数 $y=\dfrac{1}{x+1}$（既習）と $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$（未学習）について，生徒が自分で数表を作成し，それを基にグラフを描かせた．この課題を早く終えた生徒に対しては，自分で描いたグラフをグラフ電卓で確認させた．このとき，自分で描いたグラフがグラフ電卓の結果と異なっている場合は，その原因を記述させた[4]．

(2) **第２時間目（45 分）**

◆導入：生徒が描いた分数関数のグラフの誤りパターン（図 3-1-2）を OHP シートで示し，分母が０になる x の近辺でグラフがそれぞれ異なっていることに気づかせた．さらにその原因を考えさせ，分母が０となる x の近辺のグラフの振る舞いをグラフ的かつ数値的に調べる必要性を生徒に持たせた．

◆グラフ電卓を活用した数学的活動[5]：分数関数の振る舞いを探究するために，グラフ的アプローチと数値的アプローチの二つの方法で数学的活動を行った．特に，数値的アプローチで使う TABLE 機能の操作方法は，ワークシートに記述した二次関数 $y=3-x^2$ の事例を参考に，教師が ViewScreen[6]を使ってクラス全体に指導した．

・観察１［グラフ的アプローチ］

図 3-1-5 は，$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$のグラフの振る舞いについて，$x=2$ におけるグラフの変化を描写するワークシートの一部である．図 3-1-5 (1)の Window 設定 $x\in[-5,5], y\in[-5,5]$ では１次関数 $y=x+2$ と同じグラフが描かれる．さらに，(2)の Window 設定 $x\in[0,4], y\in[-1,5]$ では図 3-1-3 で示したように $x=2$ に「穴」が表示される．この

4　巻末の教材ワークシート（p.255）を参照．
5　巻末の教材ワークシート（p.255）を参照．
6　グラフ電卓の画面を OHP スクリーンに投影する装置である．

ように，分数関数のグラフが直線になること，または，(2)では(1)と同じ直線でかつ「穴」が存在することに生徒は驚きを感じ，これらのグラフに対する知的好奇心を持つと考えた．これらのグラフを描写した後に，観察する数学的活動によって得られたグラフの様子を生徒自身の言葉で記述させた．

(1)下の WINDOW でグラフを描こう！　　(2)下の WINDOW でグラフを描こう！

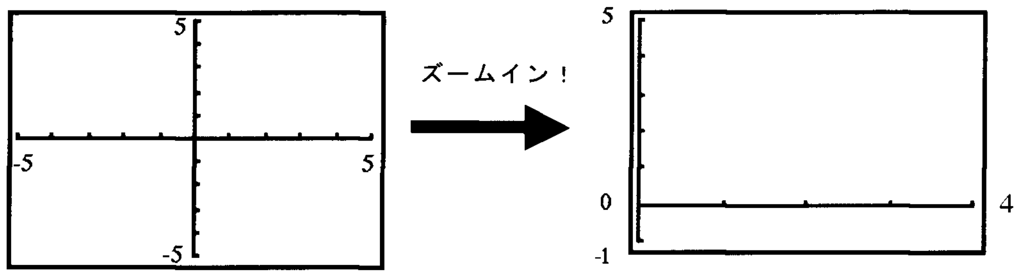


図 3-1-5．**グラフ的アプローチ**

・観察２［数値的アプローチ］

グラフ電卓の TABLE 機能（図 3-1-4）を使って，分母が０となる x の近辺における y の値を調べ，分かったことと気づいたことを記述させた．

・仮説の設定［考察］

上記のグラフ的アプローチと数値的アプローチの観察から，それぞれの分数関数が漸近線または「穴」を持つ理由を記述させた．

・仮説の検証［実験・検証］

上記で設定した仮説をグラフ電卓で検証するために以下の挑戦課題を設定した[7]．

挑戦１．不思議なグラフになる関数［(1) 漸近線が１本，(2)「穴」が１つ，(3)「穴」と漸近線が１つずつ，(4)「穴」が２つ，(5) 漸近線が２本，(6) その他］を作ってみよう．そして，それをグラフ的に数値的に調べ，その結果を考察してみよう．

挑戦２．「穴」を作る方法と漸近線を作る方法を記述してください．

7．実践結果

ここでは，生徒がインフォーマルに理解した極限の考え方の一部を生徒のレポートをもとに示す．実際の授業では，生徒達の考え方をクラス全体に提示し，それらを数学的な定義と記号で置き換えながら授業を展開した．

[7] 授業では漸近線は縦方向（vertical asymptote）のみを扱った．しかし，数学的活動中に横方向の漸近線（horizontal asymptote）に興味・関心を持った生徒がいたが，授業では取り扱わなかった．

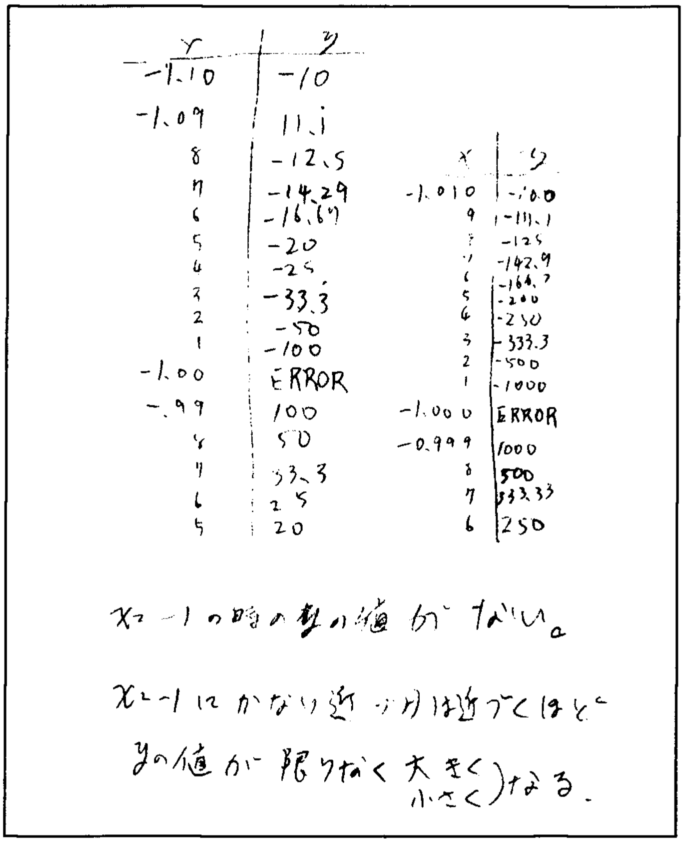
(1) 極限に関する生徒の捉え方

a．生徒独自のインフォーマルな極限の理解

図 3-1-6 は $y=\dfrac{1}{x+1}$ の数値的アプローチにおける生徒の記述例である．この生徒は，２つの数表（xの増分が 0.01 と 0.001）を観察した結果，「$x=-1$ の時の yの値がない．$x=-1$ にかなり近づけば近づくほど yの値が限りなく大きく（小さく）なる.」と生徒なりの言葉で極限を表現している．

この生徒以外のレポートには，「どれだけ細かく数表を見ても -1以外では値がある」といった表現，さらに $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ に関しては「増分を限りなくこまかくしても $x=2$ のときには値はなかった.」や「$x=2$ だけの値はなくグラフは途ぎれていた．1.999999999 に値はあるが 2.0 にはない.」といった表現もあった．

このように，極限の表現をインフォーマルに記述した生徒は 16 名であり，生徒達は TABLE 機能で数値的に探究することにより，極限の定義の両側極限である「xがある値 aに a以外の値をとりながら限りなく近づくとき」といった考え方をインフォーマルに理解したと思われる．



x	y
-1.10	-10
-1.09	11.1
8	-12.5
7	-14.29
6	-16.67
5	-20
4	-25
3	-33.3
2	-50
1	-100
-1.00	ERROR
-.99	100
8	50
7	33.3
6	25
5	20

x	y
-1.010	-100
9	-111.1
8	-125
7	-142.9
6	-166.7
5	-200
4	-250
3	-333.3
2	-500
1	-1000
-1.000	ERROR
-0.999	1000
8	500
7	333.33
6	250

x=-1の時のyの値がない。

x=-1にかなり近づけば近づくほど

yの値が限りなく大きく(小さく)なる。

図 3-1-6．インフォーマルな極限の理解

b．多表現による関連づけ

図 3-1-7 は，$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ における生徒のレポート例である．この生徒は，最初のグラフ的アプローチでは「見た目には $y=x+2$ のグラフである．x が２のときはグラフがない.」，また，数値的アプローチでは「数表から見ても $y=x+2$ のグラフだが x が２のときは値がない.」と代数的表現を使って記述している．また，考察では「$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$ となり，$y=x+2$のグラフと同じになるはずだが，$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$の場合は，分母の$(x-2)$の値が０になると計算ができないためxの値が２になることはない．したがって，$x=2$の部分だけがグラフに表示されない.」と記述している．この考察では，前述の図 3-1-6 に見られるような極限の概念的表現が見られないが，$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ が $x=2$ 以外で $y=x+2$ と一致することをグラフ的・数値的・代数的に関連づけながら $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$ の計算をインフォーマルに理解していると考えられる．このように代数的表現を記述した生徒は 15 名であった．

【グラフ的アプローチ】

見た目には $y=x+2$ のグラフである
xが2のときはグラフがない

【数値的アプローチ】

数表から見ても $y=x+2$ のグラフだが
xが2のときは値がない

【考察】

$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$ となり、$y=x+2$のグラフと同じになるはずだが、
$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$の場合、分母の$(x-2)$の値が0になると計算が出来ないためxの値が
2になることはない。したがって、$x=2$の部分だけがグラフに表示されない

図 3-1-7．多表現による関連づけ

(2) 不連続な分数関数の作成方法

a．生徒が作成した分数関数の例

表 3-1-1 は，生徒が作成した分数関数のグラフ例である．生徒達はこの課題に興味を持ったようで，自分の意図するグラフが作成できた時は歓声があがっていた．この課題で分数関数を作成した生徒は 29 名で，一人で 5 個以上のグラフを作成した生徒もいた．

表 3-1-1．生徒が作成した分数関数例

（１）穴が１つ ・$y=\frac{x^2-9}{x-3}$　・$y=\frac{x^2-9}{x+3}$　・$y=\frac{x^2-1}{x-1}$　・$y=\frac{x^2-16}{x-4}$ ・$y=\frac{x^2-121}{x-11}$　・$y=\frac{2x^2-2}{x-1}$　・$y=\frac{x^2+2x+1}{x+1}$　など
（２）漸近線が１本 ・$y=\frac{1}{x-1}$　・$y=\frac{1}{x-2}$　・$y=\frac{x^2-8}{x-4}$　・$y=\frac{x^3}{x-1}$ ・$y=\frac{x^2}{x-1}$　・$y=\frac{x^2-4}{x+3}$　・$y=\frac{4x^x}{x-3}$　・$y=\frac{x-100}{100x+100}$　など
（３）穴が１つ，漸近線が１本 ・$y=\frac{x^2-1}{x^2+x}$　・$y=\frac{x-2}{x^2-4}$　・$y=\frac{x-1}{x^2-1}$ ・$y=\frac{x+1}{x^2-1}$　・$y=\frac{x^2-4}{x^2-16}$　・$y=\frac{2}{x}+\frac{x^2-9}{x-3}$　など
（４）穴が２つ ・$y=\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}$　・$y=\frac{x^2-4}{x-2}+\frac{x^2-1}{x-1}$　$y=\frac{\frac{x^2-16}{x-4}}{x}$　など
（５）漸近線が２本 ・$y=\frac{1}{x^2+6x+8}$　・$y=\frac{x}{x^2-1}$　・$y=\frac{x+1}{x^2-4}$ ・$y=\frac{x+6}{x^2-8}$　・$y=\frac{3}{x^2-5}$　・$y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$　など

b．生徒が作成した分数関数の例

生徒が発見した漸近線や「穴」の作成方法を以下に示す．

［類推による一般化］

図 3-1-8 は，課題の $y=\dfrac{1}{x+1}$ から類推して「$x=a$ を漸近線にしたい時は $y=\dfrac{1}{x-a}$ 」，さらに，$y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ から類推して「$x=a$の所に穴をあけたい時は $\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ で直線」と自分なりの公式を作成している．このように，$y=\dfrac{1}{x-a}$を記述した生徒は 4 名で，$y=\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$を記述した生徒は 8 名であった．

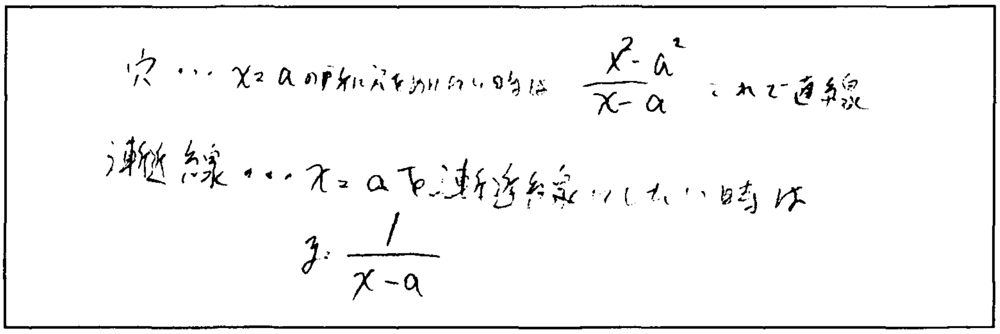


図 3-1-8．類推による一般化

図 3-1-9 は，分子の次数をｎ次（x^n-a^n）に拡張した一般化である．分子が２次，３次，４次の場合のグラフが記述されていることから，この生徒は自分が一般化した仮説をグラフ電卓で検証していると考えられる．この一般化は１名のみであった．

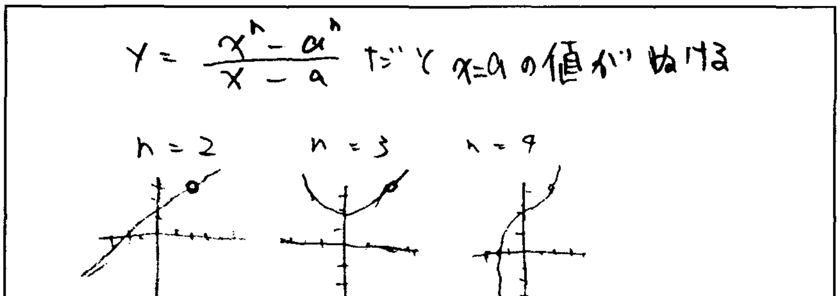


図 3-1-9．より高次な一般化

［言葉を使った一般化］

図 3-1-10 は「たぶん０／０で穴ができる．分母が０で分子が０以外の数の場合漸近線ができると思う」と言葉で記述している．上記（図 3-1-8，図 3-1-9）の一般化は類

推によって特殊な場合を数式化しているのに対して，この生徒はどんな場合でも対応できる高次の一般化を行っている．このような一般化を行った生徒は，漸近線の場合は５名，「穴」の場合は９名であった．

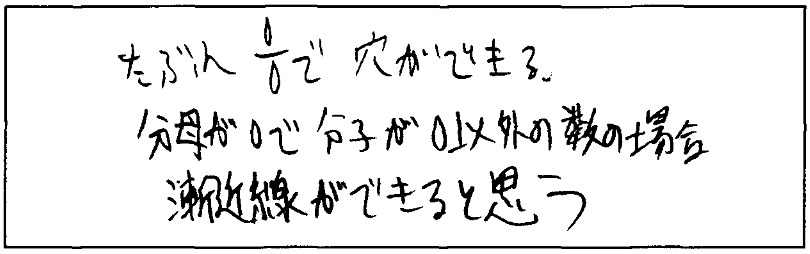


図 3-1-10．言葉を使った一般化

［二つの関数の加法］

図 3-1-11 は，分数関数（$y=\frac{x^2-1}{x-1}$と $y=\frac{x}{x+5}$）を加法で結合することによって，漸近線１本と「穴」１個のグラフを作成した例である．紙面の関係上図 3-1-11 に示さなかったが，この生徒は，それぞれの分数関数において漸近線と「穴」の出来る理由をグラフ的・数値的に考察しており，その考察結果から二つの分数関数を加法で結合したと考えられる．このように，加法を行った生徒は２名であった．

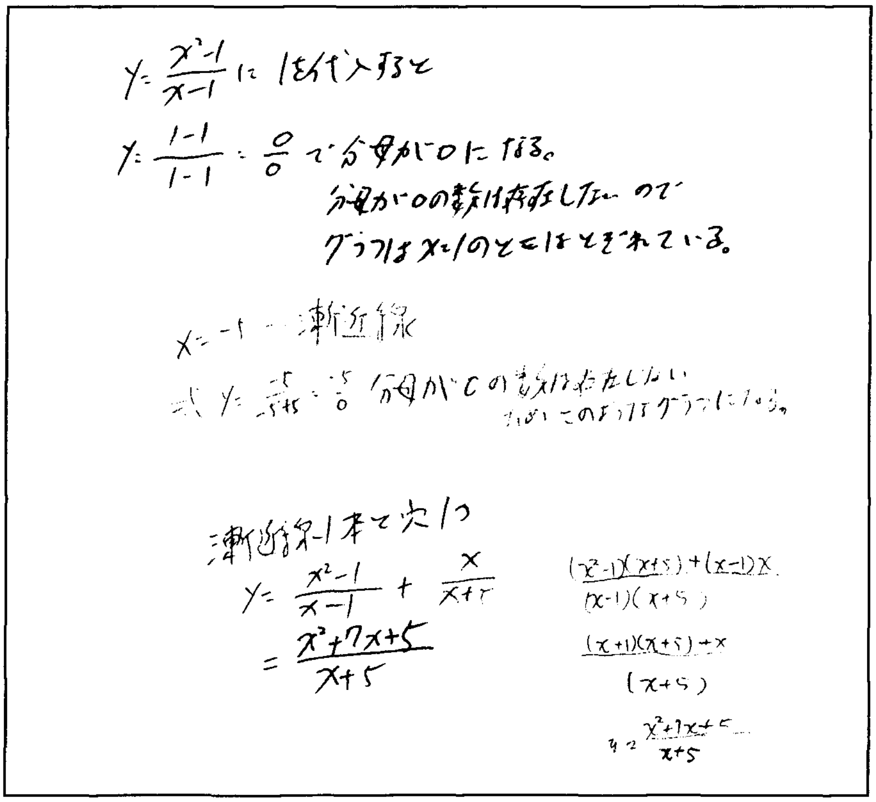


図 3-1-11．二つの関数の加法

８．考察

(1)インフォーマルな極限概念の理解

前述の実践結果で示したように，グラフ電卓を活用した数学的活動において，極限の表現をインフォーマルに記述した生徒は16名であった．授業では，生徒が記述した極限の表現をOHPで紹介しながら，教科書に記載されている下記の定義と記号の解説を行った（田代・難波，2000）．

> 一般に関数 $y=f(x)$について，xがある値aにa以外の値をとりながら限りなく近づくとき，どんな近づき方をしても$f(x)$の値が一定の値Aに限りなく近づくならば，xがaに近づくとき関数$f(x)$はAに収束するといい，記号で$\lim_{x\to a} f(x)=A$または$f(x)\to A\ (x\to a)$と表す．Aを$x\to a$のときの$f(x)$の極限値という．

この解説の，特に定義の両側極限である「xがある値aにa以外の値をとりながら限りなく近づくとき，どんな近づき方をしても」は，生徒にとって分かりづらい表現である．しかし，本授業では，生徒達がTABLE機能で不連続になる前後の数値をかなり細かく調べた事をOHPやグラフ電卓の画面で示しながら説明した事により，両側極限の理解が通常の授業より良かったようである．

このように，生徒が数学的活動でインフォーマルに理解した考え方を活用して，それを数学的な概念や記号に置き換えていく事で，生徒とともに数学を創りあげていく授業が出来たと考える．

(2) 創造的かつ発展的な数学的活動

不連続な関数を作成する数学的活動では，生徒達は多くの関数を作成した．特に２つの課題（ $y=\dfrac{1}{x+1}$ と $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ）を類推して作成したものが多かったが，その他にも分母・分子が２次以上，繁分数，二つの関数の加法，など，教科書等に掲載されている演習問題以外の関数が作成され，生徒の創造的な活動を窺うことができた．

また，生徒が発見した作成方法に関しては，類推による一般化（図3-1-8），分子のn次への拡張（図3-1-9），より高次な一般化（図3-1-10），２つの関数の加法（図3-1-11）など発展的な考察を行ったことが分かった．

さらに，発展的な事例として，生徒が授業終了の２～３日後に自主的に提出したレポートを図3-1-12に示す．この生徒は，グラフ電卓は操作性が容易であることから筆者が考えもつかないような「穴」が二つできる繁分数関数を作成したが，その理由が理解できなかった．しかし，この生徒は自分が作成した繁分数関数の「穴」に興味・

関心を示したため，授業中に少しずつアドバイスをした結果，極限の計算とグラフ表現を使った自分なりの結論をレポートに記述した．レポート内容を分析すると，最初に $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2-16}{\frac{x-4}{x}}$ を計算してグラフが２次関数 $y=x^2+4x$ となることを代数的に確認している．次に，この計算過程に出てくる $\lim_{x\to0}\dfrac{x+4}{\frac{1}{x}}$ の分母 $\dfrac{1}{x}$ に着目して，分母 $\dfrac{1}{x}$ が $\lim_{x\to-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$ かつ $\lim_{x\to+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ であることから $x=0$ で「穴」があくとグラフ的に解釈している．さらに，$\lim_{x\to4}\dfrac{(x+4)(x-4)}{\frac{x-4}{x}}=x^2+4x=16+16=32$ を計算し，$x=4$ で「穴」があくと結論づけている．$x=4$ における「穴」の解釈は，授業中に学習した演習課題の適用であるのに対して，$x=0$ における「穴」の解釈は，$x=0$ 近辺を分数関数 $\dfrac{1}{x}$ のグラフの特徴を使ってグラフ的に解釈している．ことから，この生徒は授業で学習した内容以上のことを発展的に考察したと考えられる．

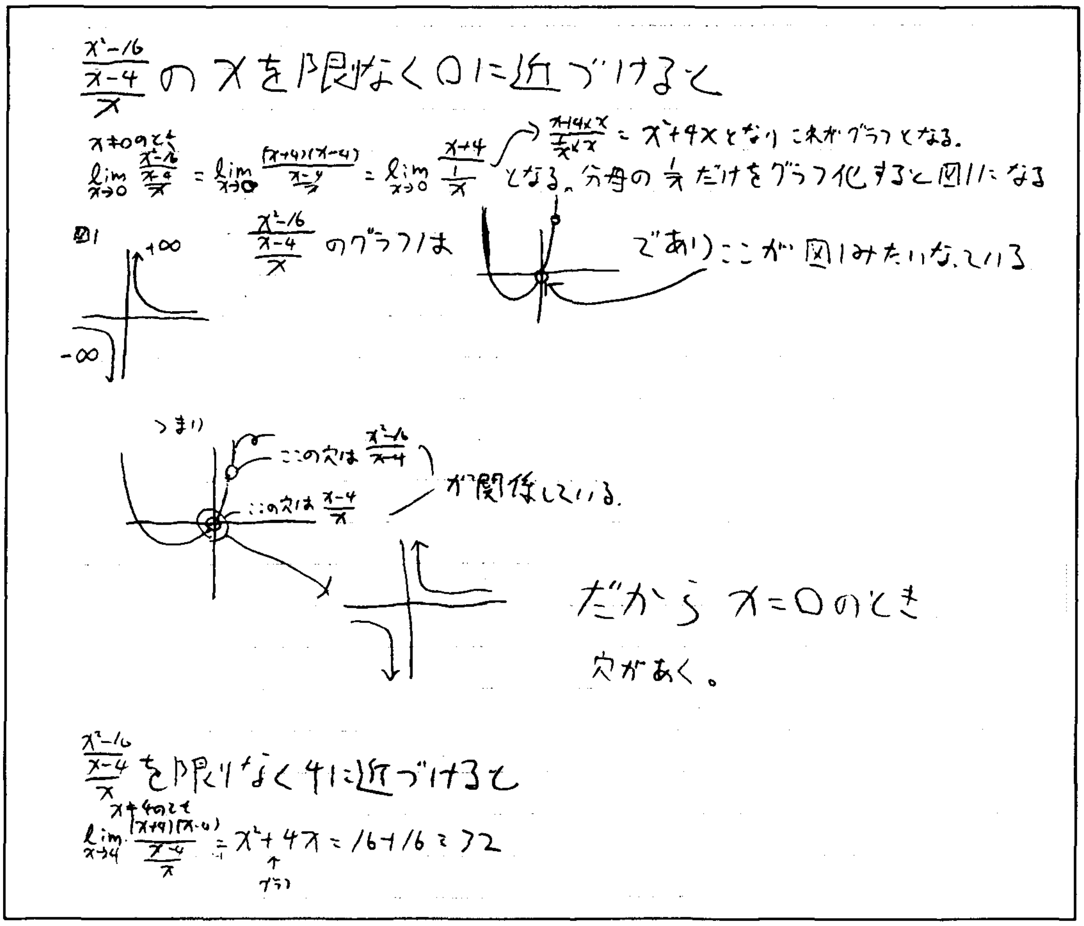


図 3-1-12. 二つの「穴」があく繁分数関数の考察

(3) グラフ電卓の誤表示の克服

Dick T. P.（1992）は，Windowの設定によって分数関数の「穴」や漸近線が正しく表示されない障害を指摘している[8]．実際に，本稿の数学的活動では，生徒たちは連続に見える「穴」のグラフや双曲線が直線で結ばれる誤表示を沢山観察していた．しかし，生徒達はグラフ的な観察だけではなく，TABLE機能を使って数値的に「穴」や漸近線が生じることを確認したり，また，分数関数の方程式を変形して代数的に確認している生徒もいた．このように，グラフ電卓を使った数学的活動では，グラフ的表現の観察だけではなく，3つの表現を総合的に観察・検証する必要性が明らかになった．

(4) グラフ電卓の有効的な活用

グラフ電卓の簡易性・利便性により，生徒達は不連続な分数関数をグラフ的・数値的に実験・観察し，直感及び帰納的に類推した自らの考えを具体的に検証し，最終的には，代数的に一般化することができた．この結果，グラフ電卓は外的な活動と内的な活動を相互につなげる教具として有効であることが分かった．特に，分子のn次への拡張（図3-1-9）や2つの関数の加法（図3-1-11）は，類推等によって生徒が考えたとしても，グラフ電卓等のテクノロジーを活用しない数学的活動では検証することは困難であったと思われる．このように生徒が発展的に数学的活動を行ったのは，生徒とグラフ電卓とのより良いパートナーシップによって，生徒がグラフ電卓と何度も対話を行いながら自らの課題を解決したものと考える．

9．まとめと課題

本研究の目的は，数学的活動を通して生徒自身が極限の概念をインフォーマルに理解する教材を開発し，その有効性を実証的に検証することである．そのために，授業では分数関数のグラフの振る舞いをグラフ的・数値的に探究することを目的にグラフ電卓を活用した．

その結果，以下のことが明らかになった．

(1)分数関数のグラフの振る舞いをグラフ的・数値的に探究する数学的活動を通して，生徒は極限の概念をインフォーマルに理解することができた．

(2)不連続な関数を作成する課題では，生徒は多くの関数を作成した．さらに，作成方法の考察では，創造的かつ発展的な考え方が見られるなど，生徒達は興味・関心を持って数学的活動を行っていた．

(3)グラフ電卓の誤表示に対して，生徒達はグラフ的な表現だけでなく，TABLE機能を調べたり，分数関数の方程式を変形して代数的に確認するなど，3つの表現を総

[8] 2．2節（pp.75-77）参照．

合的に観察・検証することで，グラフ電卓の誤表示を克服したことが分かった．
4)グラフ電卓は，観察・実験・検証が簡単にできるため，生徒の外的な活動と内的な活動をつなげる教具として有効であることが分かった．

具体的な操作を伴う数学的活動は,通常の授業より多くの時間を要する欠点がある．実際に，本研究で行った授業は，導入時において通常よりも2時間多い．しかし，数学的活動後の授業では，生徒達がインフォーマルに理解した極限の概念を数学的な定義と記号に置き換えながら授業を行ったため，通常の授業より理解が良かったようである．これにより知識注入型の授業ではなく，生徒達の考えを参考にしながら生徒とともに数学を創っていく授業が展開できたと考える．

引用文献・参考文献

1) Demana F., Waits B.K. and Clemens S.R.(1993). Precalculus Mathematics – A Graphing Approach - (Teacher's Edition / Third Edition). Addison-Wesley Publishing Company.

2) Dick T. P.（1992）. "Super Calculators: Implications for the Calculus Curriculum, Instruction, and Assessment", In Fey J.T. (Ed.), 1992 Yearbook: Calculators in mathematics education, NCTM, pp. 145-157.

3) Finney R.L., Thomas G.B., Demana F. and Waits B.K.（1994）. Calculus – Graphical, Numerical, Algebraic -. Addison-Wesley Publishing Company.

4) Hornsb J. and Lial M.L.(1999). A Graphical Approach to Precalculus – (Second Edition). Addison-Wesley Publishing Company.

5) 文部省（1999）. 高等学校学習指導要領解説-数学編-. 実教出版.

6) Murdock J., Kamischke Ellen and Kamischke Eric(1998). Advanced Algebra Through Data Exploration – A Graphing Calculator Approach -. Key Curriculum Press.

7) NCTM（1989）. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston. VA.

8) 佐伯昭彦，黒木伸明（2004）.「極限の概念をインフォーマルに理解する数学的活動ーグラフ電卓を活用した数学的活動ー」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 86 巻. 第 9 号. pp.13-20.

9) 田代嘉宏，難波完爾編（2000）. 新編 高専の数学 2（第 2 版）. 森北出版. pp.29-30.

10) UCSMP（1998）. Precalculus and Discrete Mathematics – (Second Edition). Scott Foresman Addison Wesley.

11) Vonder C. and Engebretsen A.（1996）. "Friendly Windows for Graphing Calculators". *Mathematics Teacher*. Vol.89. No.6. pp.508-511.

巻末資料 1 ：教材のワークシート（p.255）参照

３．２　単元の展開中における数学的活動
－極座標における正葉曲線の数学的活動－

１．はじめに

２．２節において，テクノロジー活用の利点の一つとして，帰納的な数学的活動による規則・性質の発見について記述した[1]．この数学的活動には，①関数族の探究と②代数族の探究があり，我が国のグラフ電卓を活用した実践研究では，①関数族の探究の実践が多く，生徒が発見した規則・性質が多様で，かつ，オープンエンドアプローチ的な数学的活動が行われていることが分かった．しかし，生徒が発見した規則について，生徒自らの力で既習事項を使って規則が成り立つ理由を報告している実践研究が少ないことが明らかになった．

本研究では，単元の展開中における数学的活動の実践として，正葉曲線 $r = a\sin n\theta$ の規則を発見し，その規則が成り立つ理由を考察する数学的活動を実施した．授業では，グラフ電卓を活用した数学的活動を通して，極座標の概念を理解し極方程式のグラフが描けることと，極座標と直交座標との関連づけで極方程式の理解をより深めることを目的とした．ここでは，本授業の目的・方法，授業設計の視点，授業の展開，さらに，生徒が行った探究結果について報告する．

２．極座標学習の問題点

(1) 学習指導要領の問題点

まず最初に，学習指導要領の「数学Ｃ」の「いろいろな曲線」に記述された内容の取り扱いを参考に，学習指導要領が取り扱う極座標におけるテクノロジー活用についての問題点を考察する．高等学校で学習する極座標は，平成元年の指導要領の「数学Ｃ」の「いろいろな曲線」で初めて導入された．その指導要領における「媒介変数と極座標」の内容の取扱いでは,「コンピュータを活用するなどによっていろいろな曲線を観察，考察し，簡単な図形については実際に描けるようにする.」と記述されているように，コンピュータに表示されたグラフを観察する数学的活動を通して曲線を理解することが求められた（文部省，1989)．次に，平成 11 年度に改訂された指導要領においても従前と同様に「媒介変数と極座標」が取り扱われたが，その内容の取扱いでは「コンピュータ等の活用などによりいろいろな曲線をかき，観察する程度とする.」

[1] ２．２節（pp.58-60）を参照．

と記述され，従前の取扱いでの「考察する」と「簡単な図形が描ける」といった活動が削除された（文部省，1999）．このように，今回記述された「観察する程度とする」では，観察という外的な数学的活動は行われるが，直観，類推，帰納，演繹などの内的な数学的活動が軽視される危惧がある．

(2) 指導方法の問題点

極座標の定義は，生徒たちが中学校以来扱ってきた直交座標の考え方と異なるため，極座標は生徒にとって理解の困難な内容の 1 つである．例えば，極座標と直交座標との関連づけは重要であり，教科書では，極方程式 $r = 2a\cos\theta \quad (a > 0)$ を直交座標の円の方程式 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ へと式変形するといった代数的表現による関連づけが行われているが，この関連づけは高度な数学的知識と技能が必要となる．これに対して，米国の教科書では，上記の代数的表現による関連づけに加えて，グラフ的表現による視覚的な関連づけが行われている (Germain-McCarthy Y., 1994; Anthony,1998; Sharon, 1998; Stewart, 2003)．つまり，直交座標 (x, y) の x 座標を極座標 (r, θ) の偏角 θ に対応させ，さらに，直交座標 (x, y) の y 座標の垂直ベクトルを極座標 (r, θ) の r の動径ベクトルとして幾何的に対応させることにより，極座標のグラフを直交座標のグラフに関連づける指導が行われている．例えば，極座標上に $r = a\cos\theta$ のグラフをかく場合，図 3-2-1 に示すように，直交座標 $y = a\cos x$ のグラフの特徴を視覚的に活用することによって円の概形を描くことができる．このように直交座標と極座標をグラフ的に関連づけることにより，生徒は直交座標で学習した関数グラフの既習事項を活用しながら極座標を視覚的に理解することが可能となる．

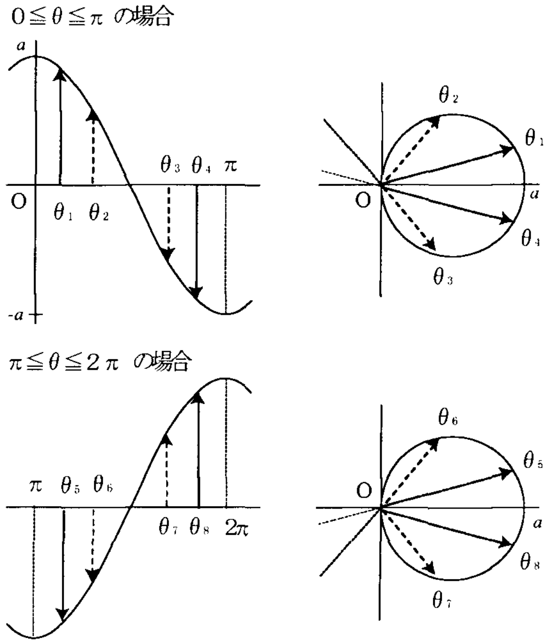


図 3-2-1．直交座標と極座標の視覚的な関連づけ

我が国においてもグラフ的表現による関連づけの実践研究が行われている．例えば，菊池（1987）による極方程式のグラフ説明器と，石崎（1995）による円柱アナモルフォーシス及びコンピュータグラフィックスで表示する円柱アナモルフォーシス変換教材ソフトが開発され実際に授業で活用された．これらの教具は，代数計算を使わずに極座標と直交座標を視覚的・直感的に関連づけることで極方程式の理解を深めるように考案されている．教具に必要な材料は，極方程式のグラフ説明器はラシャ紙と釣り糸，円柱アナモルフォーシスはジュースの缶とセロファンミラーであり，日常生活にある安価な材料で簡単に作成できる利点がある．さらに，円柱アナモルフォーシスは，歴史や美術との関連づけによる総合的学習への発展性がある．しかし，これらの先行研究では，極座標と直交座標との関連を視覚的に提示する手法について報告されているが，これらの教具を活用した数学的活動において，生徒が数学的内容（極座標と直交座標との関連）の理解をどのように深めていったかについては報告されていない．

３．授業の目的

極座標の概念を理解し極方程式のグラフが描けるようにする．さらに，グラフ電卓を活用した数学的活動を通して，極座標と直交座標との関連づけを気付かせることにより，極方程式の理解を深めることを目的とする．

４．授業の方法

1) 授業形態：プリントを使った個人による数学的活動
2) 対象学年と人数：金沢高専，３年生 57 名
3) 授業者：佐伯昭彦
4) 実施期日：2002 年 2 月
5) 使用機器：グラフ電卓(TI-83 Plus)

５．授業設計の視点

(1) 前提とする数学的能力

三角関数は１年次で履修済みである．さらに，媒介変数は３年次で履修済みである．

(2) 正葉曲線を題材として選んだ理由

正葉曲線 $r = a\sin n\theta$ の規則は，n が偶数と奇数によって規則が異なるため，生徒に「驚き」と知的好奇心を引き起こし，生徒の数学的活動を促進すると考えた．さらに，正葉曲線は三角関数の既習事項との関連性が高く，特に三角関数の周期と正葉曲線の葉の数との関係を考察する課題が，生徒の実態からみて適切な難易度であると推測さ

れたので題材として選んだ．

(3) **教師の役割**

教師はファシリテータとして，生徒の主体的で活発な数学的活動を保証しつつ，数学的活動が放縦に流れないよう支援・介入した．さらに，生徒が発見した規則の中から，既習事項と関連が高いものを選択し授業を発展的に展開した．

6．授業の展開

(1) **第１時間目〜第２時間目（45分×２：連続授業）**

・極座標の定義と用語について解説した．

・極座標をグラフ上にプロットする方法を練習し，さらに，直交座標を極座標で表わす計算方法と，その逆の計算方法について練習をした[2]．

・アルキメデスの螺線 $r=\dfrac{3}{\pi}\theta$，正葉曲線 $r=10sin2\theta$，カージオイド $r=5(1+\cos\theta)$ についての数表を生徒が作成し，求めた数表をもとにグラフを描いた．次に自分で描いたグラフをグラフ電卓で確認した．

・グラフの作成を早く終えた生徒に対する発展教材として，以下に示す正葉曲線の探究を行った．

> **探求**：正葉曲線 $r=10sin\ n\theta$ のｎにいろんな値をいれてグラフ電卓でグラフを描いてみよう．どんな規則があるだろうか．発見した規則とその理由をまとめなさい．

生徒が発見した規則で特に多かったのは「ｎが偶数の場合は葉が２ｎ枚で，奇数の場合はｎ枚」であり，授業では規則の理由を生徒なりの考えで考察させた．しかし，生徒にとってこの規則の理由を見つけることが困難であることがわかったので「直交座標における $y=10sin\ nx$ のグラフと，極座標における $r=10sin\ n\theta$ とのグラフを関連づけて考えてみよう．」というヒントを与えて宿題とした．

(2) **第３時間目（約25分）**

生徒が発見した規則をクラス全体に紹介し，さらに，既習事項と関連づけながら規則が成り立つ理由を教師が解説した．

7．実践結果

(1) **多様な規則の発見**

---

[2] 極座標の動径ｒが負の値の場合，原点に関して対称な方向に $|r|$ の動径をとるように指導した．

正葉曲線の宿題を提出したのは 15 名であったが，生徒が発見した規則は，あわせて 12 種類もあった．特に，一人で５種類の規則を発見した生徒がいるなど，１つの題材から多くの規則が発見されたことが分かった．また，15 名の中に成績下位者も含まれており，普段の授業では見られない一面が見られた．

表 3-2-1 に，生徒が発見した規則を以下の４つのカテゴリーに従って示す．

・発見１：偶数と奇数の場合分けによる規則

・発見２：ｎが１以下の場合に着目して得られた規則

・発見３：グラフを描く順序の規則

・発見４：カージオイドとの関連に関する規則

表 3-2-1．生徒が発見した規則の内容 [3]

分類	発見した規則の内容	人数
発見 1-1	ｎが奇数の場合は葉がｎ枚，偶数の場合は葉が２ｎ枚である．	13
発見 1-2	ｎ＝０の場合はグラフが無くなり，ｎが負の整数の場合は発見 1-1 と同じ規則が成り立つ．	1
発見 1-3	ｎが奇数の場合は $0 \leq \theta \leq \pi$ と $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ のグラフが重なる．ｎが偶数の場合は重ならない．	8
発見 1-4	ｎが奇数の場合はｙ軸に関する線対称であり，偶数の場合はｘ軸とｙ軸の両方に関する線対称，及び，原点に関する点対称である．	4
発見 1-5	ｎが奇数の場合はグラフとｙ軸との交点があり，偶数の場合はｙ軸との交点がない．	4
	ｙ軸との交点は，負→正→負→正→…と繰り返す．	2
発見 1-6	ｎが奇数の場合は，ｘ軸でしきると，葉の枚数は上が $n/2+1$ を小数表記したときの小数部分を取り去ったを枚数で，下が $n/2$ 枚の小数点を切り捨てた枚数である．	1
発見 1-7	ｎが奇数の場合は，楕円（葉）ができる間隔は $2\pi/n$ である．	1
発見 1-8	最初に出てくる葉の頂点と始線の角度を θ とすると，次の頂点が出てくるのは，ｎが奇数の場合は 4θ で，偶数の場合は 2θ である．	1
発見 2-1	ｎが１よりも小さいとグラフはアルキメデスの螺線になる．	1
発見 2-2	$n=0.1,0.2,0.3,\cdots,0.6$ とすると，$n=0.3$ を境にしてｘ軸で終着するグラフの値が小さくなっていく．	1
発見 3-1	グラフを描く順序が直交座標における角の回転と逆である．	1
発見 4-1	$r=5(1+\cos n\theta)$ の場合は，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ でｎ枚の円（葉）ができる．	1

発見 1-1 ー発見 1-8 は，ｎが偶数と奇数の場合による規則であり，特に，発見 1-1「ｎが奇数の場合は葉がｎ枚，偶数の場合は葉が２ｎ枚である」を発見した学生は 13 名で最も多かった．発見 1-2 のようにｎ＝０と負の整数の場合を調べる生徒もいたが，探究課題では $r=10\sin n\theta$ のｎを正の整数と明記しなかったためである．発見 1-3 ー発見

[3] 表１に記述してある規則の内容は，生徒が記述した規則をもとに筆者が要約したものである．

1-5 は，グラフの現象（葉の重なり方，対称性，軸との交点）に着目した規則である．これに対して，発見 1-1ー発見 1-2 と発見 1-6ー発見 1-8 は，グラフの現象から発見した規則（葉の枚数，葉の間隔の角度，葉の頂点の角度）を定式化して数学的に記述したものである．例えば，図 3-2-2 に示す発見 1-8 の規則は，「最初に出てくる葉の頂点と始線の角度を θ とすると，次の頂点が出てくる角度は，n が奇数の場合は 4θ で，偶数の場合は 2θ」といった発見である．この生徒のレポートには，n＝１ー６の６つの正葉曲線のグラフが描かれており，複数のグラフを観察することにより発見 1-8 の規則を帰納的に発見し定式化したと思われる．

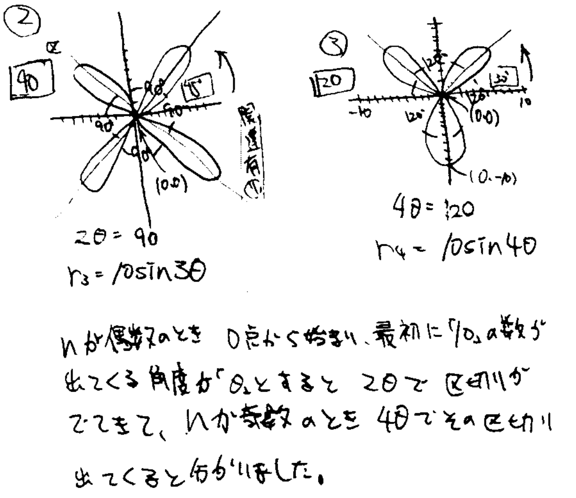


図 3-2-2．角度の定式化におけるレポート例（一部）[4]

発見 2-1 と発見 2-2 は，n に小数を代入した場合，グラフは正葉曲線ではなくアルキメデスの螺線に似たグラフが描かれたことを発見している（図 3-2-3）．

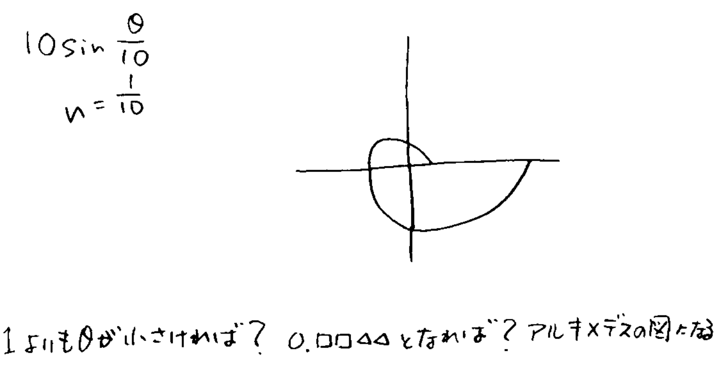


図 3-2-3．正葉曲線がアルキメデスの螺旋になる発見[5]

[4] 生徒のレポートのうち不必要な部分の削除や，記述の移動など，若干の変更を行った．
[5] 生徒の記述に用いた陰影が薄かったため筆者が模写した．

発見 3-1 は，正葉曲線が描かれる順序を観察しており，この順序が直交座標における角の回転と逆であることを発見している．

発見 4-1 は，探究課題以外のカージオイドについての数学的活動であり，$r=5(1+\cos n\theta)$ が正葉曲線になることを発見している（図 3-2-4）．

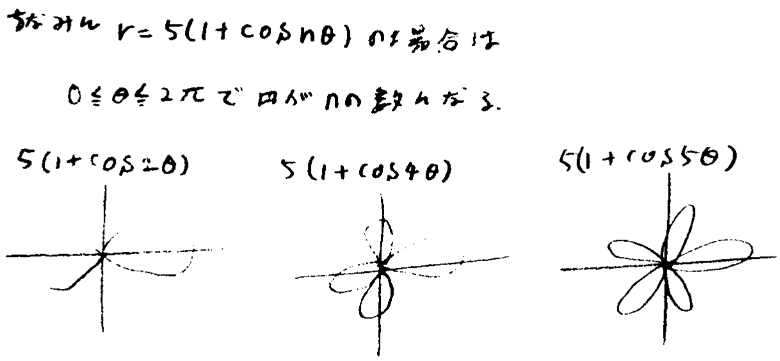


図 3-2-4. **カージオイドが正葉曲線になる発見**

(2) 数学的関連づけによる規則に関する理由の説明

生徒のレポートには，自ら発見した規則の理由について既習の数学を関連づけながら生徒なりの考え方で説明したものがあった．授業では，生徒が考えた説明方法をクラス全体で共有するために教師が OHP シートを使って解説した．さらに，生徒が説明できなかった規則の中から既習の数学的内容との関連性がある規則について，教師が解説を行った．ここでは，これらの数学的関連づけについて紹介する．

ａ．生徒自身による数学的関連づけ

［発見 1-1 を発見した生徒の説明方法］

図 3-2-5 は，発見 1-1「ｎが奇数の場合は葉がｎ枚，偶数の場合は葉が２ｎ枚である」の理由を説明した生徒のレポート内容である．このレポート内容から，この生徒は以下のことを関係づけながら規則が成り立つ理由を説明していると考えられる．

・<u>直交座標と極座標の関連づけ</u>

図 3-2-5 の左上に直交座標 $y=10sin4x$ のグラフ，同様に，中央に $y=10sin3x$ のグラフが描かれていることから，この生徒は極座標のグラフと直交座標のグラフを関連づけて正葉曲線の規則の理由を説明していると考えられる．つまり，直交座標 (x,y) の x 座標を極座標 (r,θ) の偏角 θ，さらに，直交座標 (x,y) の y 座標の垂直ベクトルを極座標 (r,θ) の r の動径ベクトルとして幾何的に対応させて考察していると考えられる．

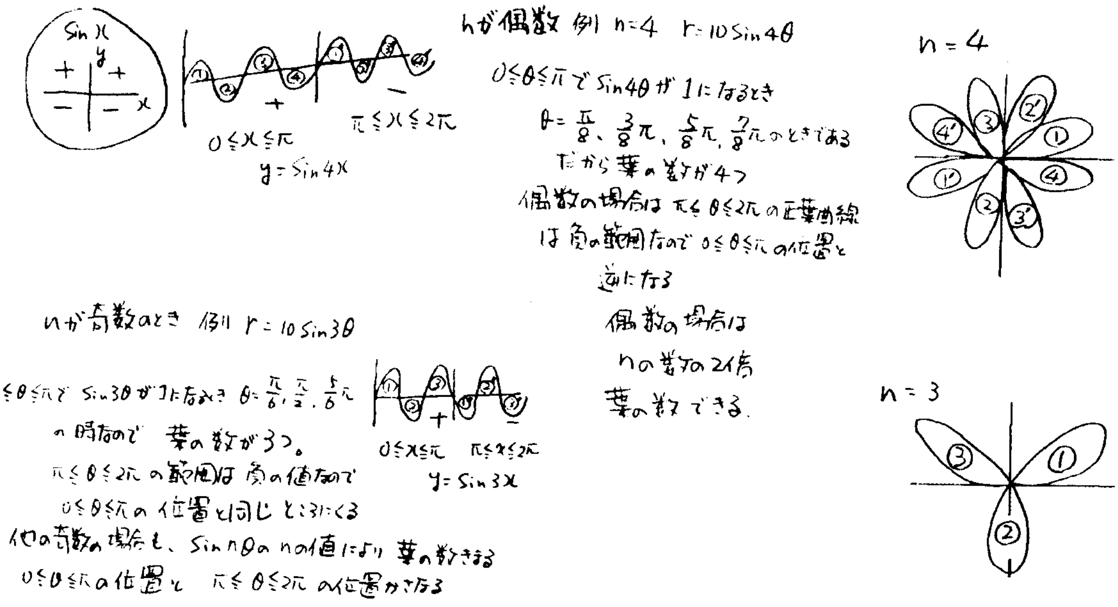


図 3-2-5．生徒の考えによる規則に関する理由の説明[6]

・直交座標のグラフ　$y = 10sin\ nx$ の特徴と分類

図 3-2-5 の中央上に記述されている「$0 \leq \theta \leq \pi$ で $sin 4\theta$ が 1 になるとき $\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi$ のときである．だから葉の数が 4 つ」，さらに，図 3-2-5 の中央左に記述されている「$0 \leq \theta \leq \pi$ で $sin 3\theta$ が 1 になるとき $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi$ の時なので葉の数は 3 つ」は，直交座標 $y = 10sin\ nx$ のグラフの特徴から，$0 \leq \theta \leq \pi$ での $sin\ nx = \pm 1$ の解が n 個あることを求めている．これにより，$0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で，正葉曲線の葉は，偶数・奇数ともに n 枚であることを結論づけていると考えられる．

・ $0 \leq \theta \leq \pi$ と $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ におけるグラフの関係

図 3-2-5 の左上の図から，この生徒は，直交座標の第 1 象限と第 2 象限を極座標の「正の範囲」，さらに，直交座標の第 3 象限と第 4 象限を極座標の「負の範囲」として定義して，極座標の $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ に関するグラフを $0 \leq \theta \leq \pi$ のグラフと関係づけて考察したと考えられる．

例えば，図 3-2-5 の中央に記述された「偶数の場合は，$\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の正葉曲線は負の範囲なので $0 \leq \theta \leq \pi$ の位置と逆になる」では，直交座標 $y = 10sin 4x$ の $\pi \leq x \leq 2\pi$ における y 座標の値は $0 \leq x \leq \pi$ と同じ値であることから，極座標 $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ のグラ

[6] 生徒の記述に用いた陰影が薄かったため筆者が模写した．

フは負の範囲（ x 軸より下）に描かれるため，$\pi \leq \theta \leq 2\pi$ における正葉曲線のグラフは，$0 \leq \theta \leq \pi$ のグラフと位置が逆（原点に関して点対称）になると結論づけている．

一方，nが奇数の場合は，図 3-2-5 の左下に記述された「$\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲は負の値なので $0 \leq \theta \leq \pi$ の位置と同じところにくる」では，直交座標 $y = 10sin3x$ の $\pi \leq x \leq 2\pi$ における y 座標の値は $0 \leq x \leq \pi$ と符号が異なることと，極座標 $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ における正葉曲線のグラフは正の範囲（ x 軸より上）に描かれることから，$0 \leq \theta \leq \pi$ のグラフと重なると結論づけている．

・類推による一般化

図 3-2-5 の左下に記述された「他の奇数の場合も，$sin\, n\theta$ のｎの値により，葉の数きまる．$0 \leq \theta \leq \pi$ の位置と $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の位置かさなる．」では，ｎ＝３以外の奇数の場合もｎ＝３と同様なことが成り立つと類推して一般化を行っている．また，ｎが偶数においても，奇数の場合と同様な一般化を行っている．

［発見 3-1 を発見した生徒の説明方法］

図 3-2-6 はグラフを描く順序についてのレポートであり，極座標 $r = 10sin2\theta$ と直交座標 $y = 10sin2x$ の両方のグラフが描かれており，生徒は正葉曲線が描かれる順序を直交座標のグラフと関連づけて考察していることが分かる．

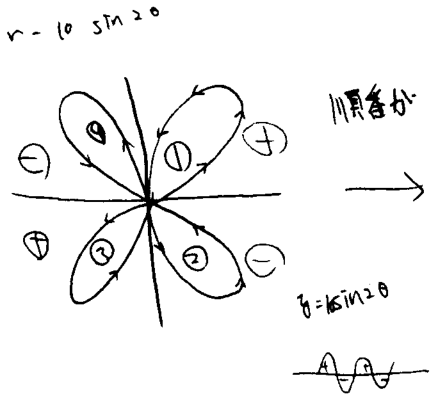


図 3-2-6．極座標と直交座標との関連づけ（一部）

ｂ．教師の補助による数学的関連づけ

［発見 2-1 に対する教師の解説］

発見 2-1「ｎが１よりも小さいとグラフはアルキメデスの螺線になる．」の発見では，$r = 10sin0.1\theta$ について三角関数の極限の公式 $\lim_{\theta \to 0} \frac{sin\theta}{\theta} = 1$ を適用して，図 3-2-7 に示

すように式変形できることを教師が黒板で代数的に説明した．

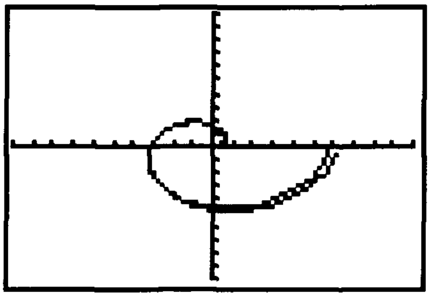
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 0.1\theta}{0.1\theta} = 1 \text{ であるから，}$$

$$\theta \to 0 \text{ において } \sin 0.1\theta \cong 0.1\theta$$

$$\therefore\ r = 10\sin 0.1\theta = 10 \times \sin 0.1\theta \cong 10 \times 0.1\theta = \theta$$

図 3-2-7. **極限の考えを活用した式変形**

また，グラフ電卓を使って，正葉曲線 $r_1 = 10sin0.1\theta$ とアルキメデスの螺線 $r_2 = \theta$ のグラフを同時に表示し，両方のグラフがほぼ一致することを視覚的に確認した（図 3-2-8 左）．さらに，グラフ電卓の TABLE 機能を使って $r_1 = 10sin0.1\theta$ と $r_2 = \theta$ の値がほぼ一致することを数値的に確認した（図 3-2-8 右）．



θ	r1	r2
0	0	0
.1	.1	.1
.2	.19999	.2
.3	.29996	.3
.4	.39989	.4
.5	.49979	.5
.6	.59964	.6

θ=0

図 3-2-8. **グラフと数表による確認**

［発見 4-1 に対する教師の解説］

発見 4-1 「$r = 5(1+\cos n\theta)$ の場合は，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ で n 枚の円（葉）ができる．」については，図 3-2-9 に示すように半角の公式で式変形して得られた $r = 10\cos^2\theta$ のグラフを直交座標 $y = 10\cos^2 x$ のグラフと関連づけて解説した．

☆ カージオイドが正葉曲線になる？

式変形： $r = 5(1+\cos 4\theta) = 5 \times 2\cos^2 2\theta = 10\cos^2 2\theta$

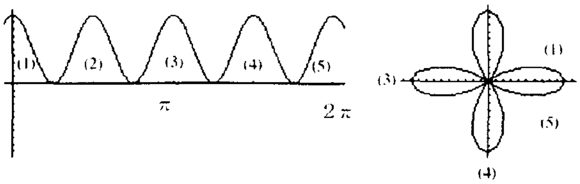


図 3-2-9. **カージオイドが正葉曲線になる理由**

8．考察

(1) 主体的な数学的活動による多様な規則の発見

グラフ電卓を活用した数学的活動によって多くの規則が発見されたことから，生徒達が主体的で創造的な活動を行ったことが確認できた．さらに，発見 1-5ー発見 1-8，発見 2-1ー発見 2-2，発見 4-1 は，授業前に教師が予想していなかった発見であり，生徒達の正葉曲線の数学的活動に対する興味・関心が高かったことが分かった．

特に，図 3-2-10 の発見 2-2「$n=0.1, 0.2, 0.3, \cdots, 0.6$ とすると，$n=0.3$ を境にして x 軸で終着するグラフの値が小さくなっていった．」は，偏角 $\theta=2\pi$ における動径 r の値が $n=0.3$ の場合で最大となり，それ以降の場合は動径 r の値が小さくなることを，グラフ電卓の結果から視覚的に発見した規則である．この規則は，学力の低い生徒が発見した独創的な規則であり，普段の授業では見られない生徒の一面が見られた．さらに，この規則は 6 つのグラフを同時に表示して観察した結果によって発見されており，グラフ電卓の活用がなければ，発見されなかった規則であったと言える．しかし，動径 r の値が最大となる正しい解は $n=0.25$ であり，生徒が帰納的に発見した規則が正しいかどうかを数学的に検証する必要があるが，本授業では時間の関係上取り扱わなかった．

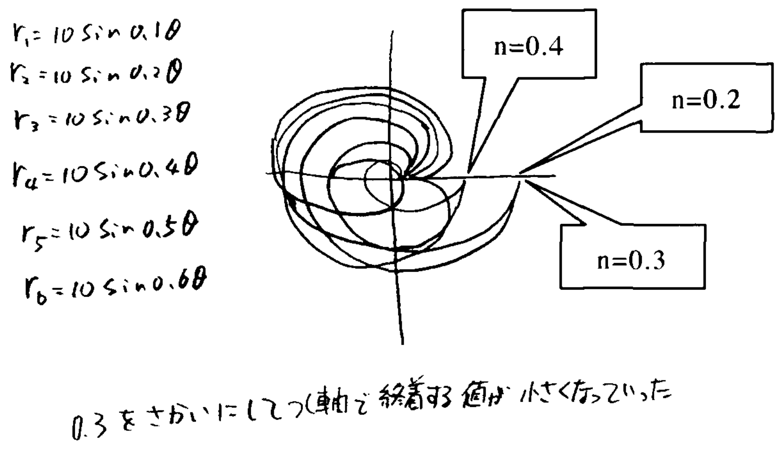


図 3-2-10．学力の低い生徒の独創的な発見[7]

(2) 外的活動と内的活動の相互作用

生徒達は，グラフ電卓に表示された $r=10sin\,n\theta$ のグラフを観察する外的活動を通して，n が奇数と偶数によりグラフの概形が異なることを発見した．さらに，内的活動としての類推を行うことで，規則が奇数と偶数によって異なる仮説をたて，最終的にグラフ電卓を使って仮説を検証しながら帰納的に規則を一般化したと考える．グラ

[7] 生徒の記述に用いた陰影が薄かったため筆者が模写した．

フ電卓が外的な活動の観察だけではなく仮説の検証等にも活用されたのは，グラフ電卓の即時性・簡易性によるものであり，グラフ電卓は生徒達の外的活動と内的活動の相互作用を促進させたと考える．

しかし，自ら発見した規則が真であることを考察した生徒が少なかったことから，生徒達に規則の真偽を考察し説明する必要性を感じさせる指導が今後の課題となったこの問題に関しては，オープンエンドアプローチの実践である島田（1995）の水槽問題でも同様な課題が報告されている．

(3) 既習事項との関連づけ

教師のアドバイスにより，僅か2名ではあるが，生徒は自らの力で極座標を直交座標の既習事項と関連づけることができた．これらの生徒の説明方法を教師が OHP シートでクラス全体に解説したところ，生徒達は興味・関心を持って解説を聞き，規則が成り立つ理由が極座標と直交座標との関連づけによって簡単に説明できることを納得していたようである．さらに補足説明として，図 3-2-1 のようにグラフ的に極座標と直交座標との関連づけを説明した．その結果，この数学的活動後に行った「極方程式による図形の面積や曲線の長さ」の授業では，直交座標のグラフをもとに極方程式のグラフをイメージしながら積分計算で得られた結果を視覚的に確認するなど，正葉曲線の数学的活動で得た知識を活用する態度が見られた．

さらに，正葉曲線の探究課題は，直交座標と極座標との関連づけ以外にも，三角関数の周期性，半角の公式，三角関数の極限などの既習事項との関連性が高く，授業が発展的に展開することが分かった．これらの結果より，本教材における数学的活動は，既習の知識・技能を総合的に活用する機会を生徒に与えたと考える．

(4) グラフ電卓の有効性と課題

本数学的活動で発見された規則が多様であったこと，及び，外的な数学的活動と内的な数学的活動を相互に関連づける役割を果たしたことにより，グラフ電卓は本課題の数学的活動に有効な教具であったことが分かった．これは，生徒の興味・関心を容易にかつ瞬時に実験・観察・検証できるグラフ電卓の即時性・簡易性に大きな要因があると考える．このように生徒が外的な数学的活動と内的な数学的活動を相互に関連づけた数学的活動を行ったのは，生徒とグラフ電卓とのより良いパートナーシップによって，生徒がグラフ電卓と何度も対話を繰り返しながら自らの課題を解決した結果であると考える．

一方，生徒のレポートの中に「$r=10\,sin100\theta$ を入力すると $r=10\,sin4\theta$ と同じ図が出てきたので不思議だと思いました．」があったが，これはグラフ電卓の性能による誤っ

たグラフ表示で，数学的活動を行う際に注意すべき課題であることが分かった[8].

9．まとめと課題

本研究の目的は，グラフ電卓を活用した極座標の正葉曲線に関する数学的活動において，生徒が発見した多様な規則を積極的に活用し，かつ，既習の数学的知識に関連づける授業を行い，生徒の数学的活動の過程から得られた知見を明らかにすることであった．そのために，正葉曲線の数学的活動で生徒が実際に記述したレポート内容を分析することで教材の有効性を考察した．その結果，以下のことが観察された．

・主体的な数学的活動によって生徒は多様な規則を発見した．
・数学的活動において外的活動と内的活動を相互に関連づける活動が見られた．
・発見した規則が成り立つ理由を考察し説明することにより，既習の知識・技能を総合的に活用する機会を生徒に与える事ができた．
・グラフ電卓は本課題の数学的活動に有効なパートナーとなることが分かった．

今後の課題として，(1)生徒達が発見した規則が真であることを考察し説明する必要性を生徒に感じさせる指導方法の開発と，(2)グラフ電卓の性能によって誤ったグラフが表示された場合の対応，の二点が明らかになった．

[8] Hansen（1994）の実践では，グラフ電卓に誤って表示されたグラフを逆利用して周期関数の性質とグラフ電卓の液晶画面の離散的性質を探究させている．また，佐伯・黒木（2004a）では，上記の誤表示の原因を生徒自身の力で解明した実践例を紹介している．詳しくは，2．2節（pp.81-83）参照．

引用文献・参考文献

1) Anthony L. P. *et al.*（1998）. Precalculus and Discrete Mathematics – Second Edition. UCSMP. Scott Foresman Addison Wesley. pp.493-506.

2) Germain-McCarthy Y.（1994）. "Demystifying Polar Graphing". *Mathematics Teacher*. Vol.87. No.9. pp.728-735.

3) Hansen W.（1994）. "Using Graphing Misrepresentation to Stimulate Student Interest". *Mathematics Teacher*. Vol.87. No.3. pp.202-205.

4) 石崎学（1995）.「数学科における生徒の探究心を養う指導法の研究–感動をよび起こす教材ソフトの開発と実践–」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第77巻. 第3号. pp.2-10.

5) 菊池宏（1987）.「極方程式のグラフ説明器」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第69巻. 第9号. pp.20-23.

6) 文部省（1989）. 高等学校学習指導要領解説–数学編・理数編–. ぎょうせい.

7) 文部省（1999）. 高等学校学習指導要領解説–数学編・理数編–. 実教出版.

8) 佐伯昭彦, 礒田正美, 清水克彦編著（1997）. テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー. 明治図書.

9) 佐伯昭彦, 黒木伸明（2004a）.「グラフ電卓のグラフ的誤表示の原因に関する生徒の分析方法」. 日本科学教育学会第28回年会論文集, Vol.28. pp.377-378.

10) 佐伯昭彦, 黒木伸明（2004b）.「グラフ電卓を活用した極座標における正葉曲線に関する数学的活動とその有効性」. 日本科学教育学会誌. 科学教育研究. Vol.28. No.5. pp.325-334.

11) Sharon L. S. *et al.*（1998）. Functions, Statistics, and Trigonometry – Second Edition. UCSMP. Scott Foresman Addison Wesley. pp.820-832.

12) 島田茂（1995）. 新訂 算数・数学科のオープンエンドアプローチ –授業改善への新しい提案–. 東洋館出版社. pp.9-10.

13) Stewart J.（2003）. Calculus -fifth edition-. Brooks/Cole. pp.705-715.

巻末資料２：教材のワークシート（pp.256-257）参照

３．３　単元のまとめにおける数学的活動
－３次関数のグラフの種類を探究する数学的活動－

１．はじめに

単元のまとめにおける数学的活動として，３次関数のグラフの種類を探究する数学的活動を行った．この数学的活動は，単元「関数の増減」で増減表を用いて整関数（主に３次関数)のグラフを描く学習を行った後に,学習した内容の定着を図るとともに,理解をさらに深めるための発展的な学習として取り扱った．課題は，３次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a>0)$ の各係数にいろんな数字を設定した関数をグラフ電卓に入力し，表示された複数のグラフを観察することでグラフの種類を分類する関数族[1]の数学的活動であり，冬休みの宿題として生徒に与えた．

ここでは，本課題における数学的活動の目的・方法，教材開発の視点と展開例，さらに生徒が行った探究結果について報告する．

２．３次関数のグラフの特徴を探究する数学的活動

３次関数のグラフの特徴を探究する数学的活動について，教科書で取り扱われている代表的な方法と,実践的な先行研究で報告されたオープンな方法についてまとめる．

(1) 教科書における数学的活動

金沢工業高等専門学校が使用している教科書[2]「新編　高専の数学２」の２章「微分法　§４．関数の増減」では，微分係数の符号と関数の増減の関係から増減表（関数の値の増減と極大・極小）を作成し，それを利用してグラフの概形を描く学習が中心となっている（田代・難波，2000)．教科書で取り扱われている関数は，２次関数，３次関数と４次関数であり，生徒は与えられた関数のグラフを上記の手続きに従って描くだけに終わっている．この単元を学習する前に学習する関数の授業[3]では，方程式の各係数とグラフの特徴（グラフの形状や平行移動など）との関係を学習する．しかし，この単元で初めて取り扱う３次関数や４次関数は，グラフを描く手続きを正確に実行するだけで，それぞれの関数の特徴を調べることはない[4]．

---

[1] ２．２節（pp.58-60）を参照．

[2] 高等専門学校用の教科書会社は少なく，金沢高専がこれまでに取り扱った教科書は，(1)森北出版株式会社と(2)大日本図書株式会社の２社である．

[3] １年次に，２次関数，分数関数，べき乗関数，指数関数，対数関数，三角関数を学習する．

[4] 大日本図書の教科書「新訂　微分積分Ｉ」においても，ほぼ同様な内容である（斎藤・高遠，2003)．

これに対して，高等学校の教科書では，３次関数のグラフの特徴を取り扱った解説及び問題は，増減表を使ってグラフの概形を描く学習後に取り扱われており，それらは以下の４つに分類することができる．

1) 極値をもつ条件の解説

図 3-3-1 は，桐原書店が出版する教科書「高等学校　数学Ⅱ」に記載された一部である．この教科書では，３次関数のグラフが極値をもつ条件について，導関数である２次関数の実数解の個数と増減表を関連づけて説明している（寺田，1998）．

●極値をもつ条件

$a > 0$ のとき，3 次関数

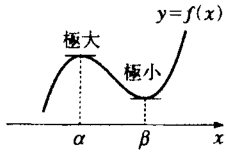
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

のグラフの形は次の 3 つに分類できる。

(1)　$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$

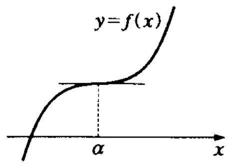
が 2 つの解 α，β $(\alpha < \beta)$ をもつとき，$f'(x)$ の符号変化は次のようになり；極大値と極小値をもつ。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



(2)　$f'(x) = 0$ が重解 α をもつとき，$f'(x)$ の符号は変化しないので，極値をもたない。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗



(3)　$f'(x) = 0$ が解をもたないとき，極値をもたない。

x	$\cdots$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	↗

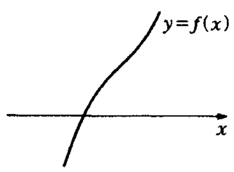


図 3-3-1．３次関数が極値をもつ条件についての教科書の解説例

2) 係数の値を求める問題

与えられた極値を満たすように３次関数の係数を求める問題として，「$f(x) = ax^3 + 3bx^2 - 9x + 4$ が $x = -1$ で極大値，$x = 3$ で極小値をもつとき，定数 a，b の値と極値を求めよ．」という問題がある．この問題を解くには，「関数 $f(x)$ が $x = a$

で極値をもつ⇒ $f'(a)=0$」といった知識と，それによって得られた連立方程式を解く技能が必要である．

3) 係数の範囲を求める問題

与えられた３次関数が極値をもつように係数の範囲を求める問題として，「$f(x)=x^3+3x^2+ax-1$が極値を持つように定数 a の値の範囲を求めよ．」という問題がある．この問題を解くには，導関数である２次関数の解が異なる２つの実数を持つという知識と，２次関数の判別式を計算する技能が必要である．

4) グラフの特徴を証明する問題

与えられた３次関数が特定の特徴をもつことを証明する問題として，「$f(x)=x^3-3x^2+4x$は常に増加することを示せ．」という問題がある．この問題を解くには，導関数である２次関数が実数解を持たないという知識と，２次関数の判別式を計算する技能が必要である．

上記にあげた４種類の解説および問題は，増減表を使ってグラフの概形を描く学習の応用として適切な問題である．しかし，これらの解説及び問題で行われる生徒の数学的活動を，島田（1995）が示す数学的活動の模式図を参考に考察すると，1)の解説は，「e. 数学の理論」で記述された内容を生徒が読んで理解する活動であり，さらに，2)ー4)の問題は，「e. 数学の理論」→「g. f（条件・仮説）の数学的ないいかえ（公理化）」→「j. 結論」の過程を通して問題解決するクローズドな学習であると言える．しかも，2)ー4)の問題は，それぞれの問題を総合的にまとめることはなく，個々の問題を解決することのみで終わってしまう場合が多い．

一方，加藤（1994）が，微分法「方程式・不等式の応用」[5]の単元を学習した生徒45名に行った調査「３次関数のグラフは，どのような形のものが思い浮かぶであろうか．以下に，何種類あるかあげて下さい．」では，図 3-3-2 に示すように，極値を持つグラフのパターン(a)の概形を描いた生徒が 98％であった結果が得られた[6]．さらに，２種類の概形を描いた生徒は，パターン(a)とパターン(b)が 12 名，パターン(a)とパターン(c)が１名で，３種類の概形を描いた生徒はいなかった．この調査結果から，教科書で取り扱っている問題では，個々の問題を解く技能を高めることは出来るが，それぞれの問題を総合的に考察することを行なわないため，生徒は３次関数の問題で良く出題される(a)の概形しか記憶に残らないのだと考えられる．

---

[5] 昭和 53 年改訂の指導要領に基づいた教科書「三訂版　高等学校　新編　基礎解析」（数研出版）を使用している．

[6] 本節では，３次関数の種類を図 3-3-2 に示すパターン(a)ー(c)として表わす．

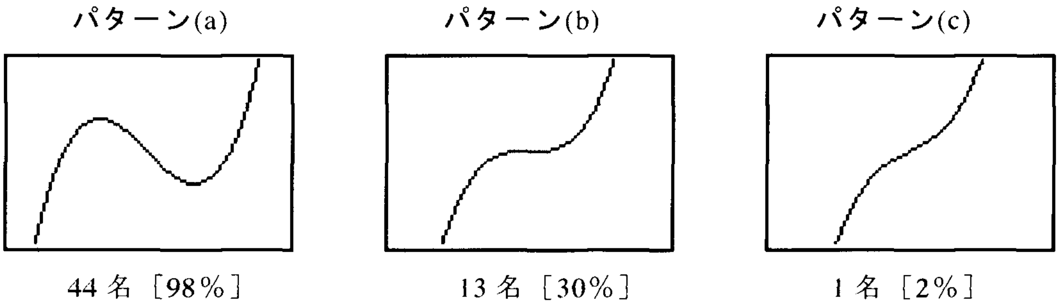


図 3-3-2. 3次関数のグラフの概形に関する予想結果

(2) 先行研究で実践された数学的活動

a．微分の単元以前に実践された数学的活動

①梅野（2004）の実践

- **課題**：$y=(x-a)(x-b)(x-c)$のグラフは，a,b,cがどのようなときに，どのようなグラフになるか．各自の考察結果をまとめて提出せよ．
- **学習形態**：生徒主体による数学的活動である．1ヶ月間の考察期間で，生徒は考察結果をレポートで提出した．
- **対象生徒**：高等専門学校1年生
- **使用教具**：グラフ電卓（TI-89）
- **実践結果**：教師の意図は，グラフ電卓に表示されたグラフを観察することで，a,b,cの値がx軸との共有点であることに気づかせ，a,b,cの値とグラフのタイプを分類することであったが，この意図に対して，2名の生徒が未学習である極値を求める式を発見した．例えば，「$\alpha<0$のとき$y=x^3+\alpha x$の極小値は$x=\sqrt{-\frac{\alpha}{3}}$である」を発見した生徒は，$\alpha=-1,-2,-3$の事例について，グラフ電卓の機能から得られた極小値の数値的結果とグラフとを関連づけて観察する活動から，生徒は自分なりの仮説（極小値が$x=\sqrt{-\frac{\alpha}{3}}$である）をたて，その仮説が正しいことを数値的に検証した．しかし，この結論を数学的に検証するには微分の知識が必要であるため，生徒は自分の仮説を数学的に検証できなかったが，この数学的活動で得られた発見は微分の学習につながる可能性を示している．

②公庄（1999）の実践

- **課題**：3次関数のグラフの形を分類せよ．
- **学習形態**：生徒主体による数学的活動である．生徒は考察結果をレポートで提出した．

・**対象生徒**：高等学校２年生

・**使用教具**：グラフ電卓（TI-92）

・**実践結果**：高次方程式の学習後に行われた数学的活動であり，　高次不等式の導入として，グラフ電卓に表示されたグラフを観察することで，３次関数のグラフの概形を考察することを目的としている．この実践では，生徒が発見した規則は多様で，その規則が成り立つ理由を記述したレポートも数学的に優れているものが多い．以下にそれらの例を簡単に示す．

1）実数解の個数とグラフの概形の関係

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ として，

［1］α,β,γ が実数のときはx軸と３回交わる．

［2］α,β,γ のうち１つだけが実数のときはx軸と１回交わる．

［3］α,β,γ が実数で重解のときはx軸と２回交わる．

［4］α,β,γ が実数で３重解のときはx軸と１回交わる．

以上の４つの場合分けと，aの正負の符号の組み合わせから，この生徒は８種類と結論づけている．

一方，同様な考察をした生徒のレポートの中には，不適切な Window 設定による不完全に表示されたグラフ（$y = x^3 + 80x^2 - 90x + 50$が２次関数のグラフに似ている）を正しく再表示した事例があった．その生徒は，方程式$x^3 + 80x^2 - 90x + 50 = 0$の解を計算した結果，実数解が１つであることからグラフはx軸と必ず１回交わると考え，Window の範囲を拡大することでグラフ全体を表示し，上記［2］の仮説を検証した（図 3-3-3）．

不適切な Window 設定による不完全に表示されたグラフの誤解は，テクノロジーを活用する際に十分に配慮すべき課題であるが，上記の生徒のレポートから，関数のグラフの概形パターンの理解は，このような誤解を回避する１つの解決方法を示唆していると考えられる．

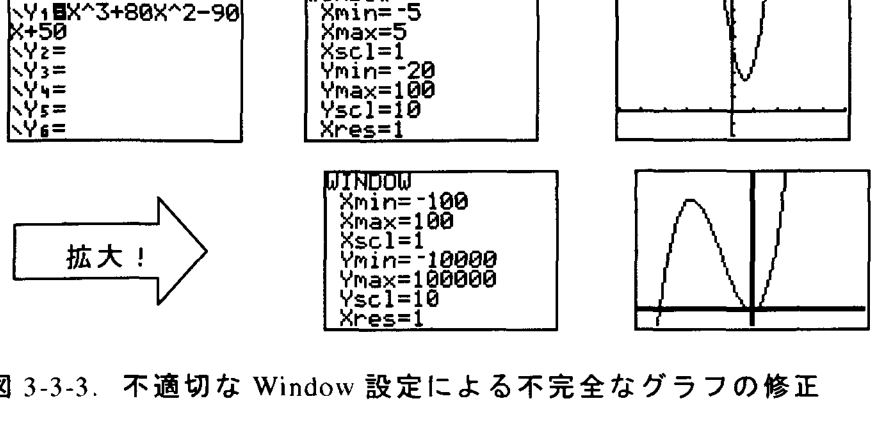


図 3-3-3．不適切な Window 設定による不完全なグラフの修正

2) 各因数の符号とグラフの概形の関係

$y=x^3$ を基準として「ゆがみのない形」(極値のないパターン(b)のグラフ：図 3-3-4 の左）と「ゆがんだ形」（極値のあるパターン(a)のグラフ：図 3-3-4 の右）の２種類に分類している．生徒の分類方法は，以下の通りである．

[1] $y=x^3+d$ はｙ軸方向の平行移動で「ゆがみのない形」となる．

[2] $y=ax^3 \ (a>0)$ はグラフの幅に関係するので「ゆがみのない形」となる．

[3] $y=x^3+bx^2=x^2(x+b)$ は，各因数の符号を調べた結果，bの符号に関わらず「ゆがんだ形」となる．

[4] $y=x^3+cx=x(x^2+c)$ は，$c>0$の場合x^2+cの符号は必ず正なのでグラフはxの符号に依存するため「ゆがみのない形」，$c<0$の場合x^2+cとxの符号の組み合わせによって正にも負にもなるので「ゆがんだ形」となる．

この生徒が行った分類方法は正しいが，[3] と [4] での因数の符号による分類は，数学的な厳密性に欠ける．しかし，二次不等式で学習した因数の符号を調べる方法を活用したことは評価できる．

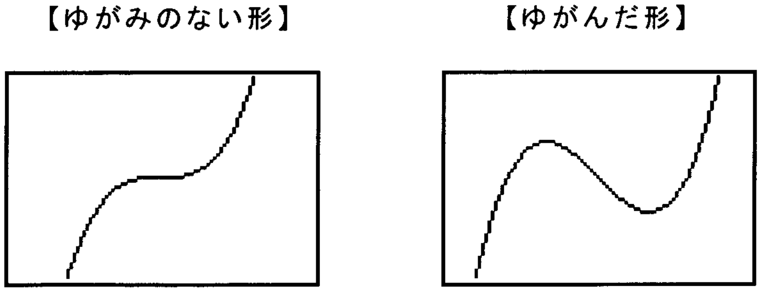


図 3-3-4. 極値に関するグラフの分類

3) ２次関数の実数解とx軸との共有点の利用

$y=ax^3+bx^2+cx=x(ax^2+bx+c)$ として，$y=ax^2+bx+c$の実数解とx軸との共有点が図 3-3-5 の様に分類できることから，それぞれの因数であるxと$y=ax^2+bx+c$の符号の組み合わせを考察して，実数解が２つある場合は極値があるグラフ，その他は極値がないグラフに分類できると結論づけた．

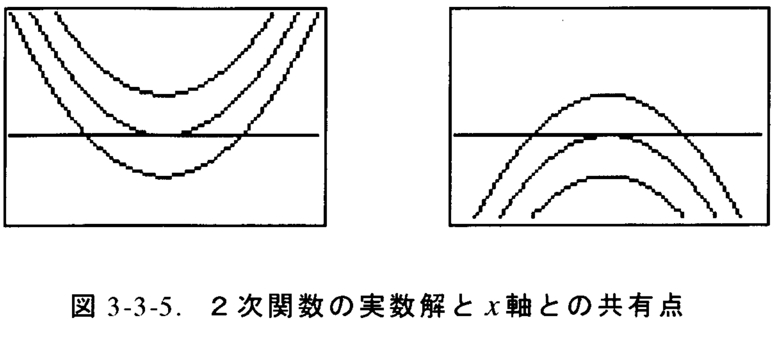


図 3-3-5. ２次関数の実数解とx軸との共有点

4) 2次関数の標準形の応用

$y=a(x-p)^3+q$ について，２次関数の移動の性質が成り立つことを，４つの事例をもとにグラフとTABLE機能でグラフ的に数値的に検証した．

以上のように，公庄の実践では，生徒が発見した規則は多様で，その規則が成り立つ理由を記述したレポート内容も数学的に優れている．

b．増減表の導入として実践された数学的活動

①吉田（1997）の実践

・**目標**：３次関数のグラフのイメージの習得と，１次関数，２次関数と対比することを通して，奇関数的イメージの形成を図る．

・**学習形態**：生徒の活動や意見を主体とした教師と生徒の対話形式による数学的活動である．

・**対象生徒**：高等学校２年生

・**使用教具**：グラフ電卓（fx-9700GE）．生徒が使用するグラフ電卓はコンピュータに接続されており，ネットワークの双方向通信により一人の生徒のグラフ画面がクラス全体で共有することができる．

・**実践結果**：生徒に３次関数のグラフを自由に作成させグラフの概形を観察した．教師は，生徒の作成したグラフの中から不適切なWindow設定でグラフ全体が見えない事例を取り上げ，３次関数のグラフとして正しいかどうかを議論し，さらに，Window設定を変更する活動を通して，３次関数のグラフのイメージを視覚的に把握した．また，微分係数を算出する機能を利用して，微分係数の値の変化とグラフの増減との関係を探究した．このように，グラフ電卓の機能を試行錯誤に操作しながら，生徒は３次関数のグラフのイメージを帰納的に掴んだ．この活動後に従来どおりの増減表を学習した結果，グラフ電卓で掴んだグラフのイメージが増減表の学習に効果的であったことが生徒のアンケートから明らかになった．

c．増減表の学習中に実践された数学的活動

①坂本（1997）の実践

・**課題**：$y=k(x-a)(x-b)(x-c)$のグラフ（$a<b<c$）を描画したとき，極値を与えるxは，グラフの中ではどのような値であろうか．

・**学習形態**：生徒の活動や意見を主体とした教師と生徒の対話形式による数学的活動である．

・**対象生徒**：高等学校２年生

・**使用教具**：コンピュータ（プログラムは生徒が作成）

・**実践結果**：コンピュータに描画された３次関数のグラフを観察する活動中に，生徒から「極値は x 軸との交点の中点である」との仮説が出てきた．生徒達はグラフ的に実験・検証し，この仮説が正しくないことを実証した．次に教師が微分係数を基に導関数のグラフを描画することを指示したところ，新たな仮説「導関数が x 軸と交わる点の x 座標の値が極値を与える x である」が得られ，生徒達全員がコンピュータ上でこの仮説の正当性を実験・検証した（図 3-3-6[7]）．証明については，教師が教科書にあるような説明を行ったところ，コンピュータを用いないで指導した時と比較して，コンピュータを用いた生徒の定着度が良かった結果が得られた．

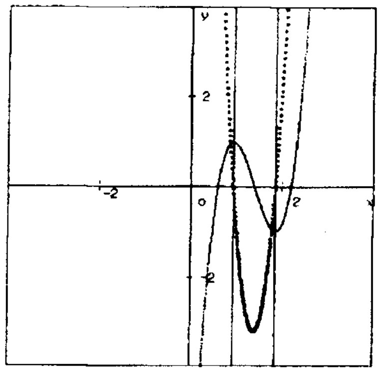


図 3-3-6．関数と導関数のグラフ

d．増減表の学習後のトピックとして実践された数学的活動

①加藤（1994）の実践

・**課題１**：３次関数のグラフはどんな形のものがあるだろうか．グラフ電卓を用いて観察しよう．比較しやすくするために３次の係数は１にしよう．

・**課題２**：課題１では，いろいろな３次関数のグラフを見ましたが，これらを何種類かにグループ分けすることが出来ますか．また，そのグループ分けの基準は何ですか．

・**学習形態**：ワークシートに従って生徒主体による数学的活動が行われ，授業の後半に，教師が生徒の観察や考察結果を取り上げ，クラス全体で議論しながら結論をまとめる学習形態である．

・**対象生徒**：高等学校２年生 45 名

・**使用教具**：グラフ電卓（TI-81）

・**実践結果**：図 3-3-2[8]に示したように，この課題を行う前に３次関数のグラフの概形を描かせた結果，極値をもつグラフの概形のみを知っていた生徒が 31 名であり，２つ以上の概形を知っていた生徒は 13 名のみであった．しかし，グラフ電卓を使って３次関数のグラフを観察した結果，新しいグラフの概形を発見した生徒は 38 名であり，この結果から，グラフ電卓を活用した数学的活動では，生徒の「観察（Observation）」活動に効果があったことが明らかになった．次に，課題２におい

[7] 図 3-3-6 は，坂本（1997）より引用した．
[8] P.156 を参照．

て，分類の基準を「同定（Identification)」した生徒は１名のみで，分類した結果を数学的に検証することは授業時間の関係で出来なかった[9]．この実践における「観察（Observation)」の活動は，生徒にとってオープンな活動であったために，限られた授業時間内で教師の意図する数学的活動が行えなかったことが課題として明らかになった．

以上，４つの実践例を示したが，どの実践も生徒の考え方が主体となった数学的活動で，生徒たちが発見した性質や仮説は多様であることが分かった．しかし，生徒が発見した性質や仮説の検証を生徒自身が数学的に検証した実践は，梅野（2004）と公庄（1999）のみである．

このため，本研究では，増減表を学習した生徒を対象に３次関数のグラフの種類を調べる課題を与え，生徒が提出したレポートをもとに，生徒が数学的活動で発見した性質及び仮説の分類を行った．さらに，生徒自身が行った仮説に対する数学的な検証方法についても分析した．

３．数学的活動の目的

微分の単元のまとめとして，３次関数のグラフの種類を調べる数学的活動を通して，増減表と極値の理解の定着を図るとともに，３次関数のグラフの種類や性質を生徒が主体的に発見し，数学的に検証することを数学的活動の目的とする．

４．数学的活動の方法

1) 授業形態：冬休みの宿題としての数学的活動
2) 対象学年と人数：金沢高専，２年生 80 名
3) 授業者：佐伯昭彦
4) 実施期間：2003 年 12 月ー2004 年 1 月の冬休み
5) 使用機器：グラフ電卓(TI-83 Plus)

５．教材設計の視点

(1) 前提とする数学的能力

整関数の導関数を求め，微分係数の符号をもとにグラフの増減と極値を表した増減表を作成し，グラフを概形を描くことができる．さらに，定義域が限定されている場合の最大値と最小値を求めることができる．

---

[9] ここで示されている「観察（Observation)」と「同定（Identification)」は，Leinbach L. C.（1991）が指摘する実験室アプローチの五つの活動の中の二つを意味している．

(2) 本教材のねらい

本教材のねらいは，３次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフに関して，生徒が係数を自由に定めてグラフ電卓に表示し，複数のグラフを観察・実験する数学的活動を通して３次関数のグラフの種類とその性質を考察することである．この関数族の探究[10]は，梅野（2004)，公庄（1999)，吉田（1997）の数学的活動と同じである．

Banchoff（1991）は，関数族の探究を「実例の族の探究（Investigating Families of Examples)」として，その有効性を次のように述べている．

> 「(テクノロジーを活用した）実験室的経験は，無関係な事例の集まりを取り扱うのではなく，むしろ実例の族を取り扱う方が特に効果的であることが分かった．[11]」（p.5）

また，Hector（1992）は，関数族の探究によって，生徒は代数的表現とグラフ的表現を関連づけながら初等関数の規則・性質を豊富に経験することができ，さらに，その規則を認識・理解することは，後に学習する微分積分の概念（極限，連続，微分，曲線の面積など)をグラフ的に導く基盤を生徒に形成することができると述べている．

(3) グラフ電卓活用の留意点

本教材では，グラフ電卓の活用について以下の２点に留意して教材開発を行った．

- 公庄（1999)，吉田（1997）の実践に見られるように，不適切な Window 設定による不完全なグラフの誤解[12]を回避する方法として，グラフ電卓に表示されたグラフの形が正しいかどうかを既習の増減表で確認することを生徒に求めた．
- 坂本（1997）の実践に見られるように，３次関数と導関数のグラフをグラフ電卓の同一座標平面上に同時に表示し観察することを生徒に求めた．これにより，関数の増減・極値と導関数の符号との関係を視覚的に発見する切掛けを生徒に与えることができる．なお，この手法は，Fey（1987）と一松（1995）の著書にも紹介されている．

---

[10] 関数族の探究の詳細に関しては，２．２節（pp.58-60）を参照．なお，「関数族の探究」の用語は，磯田（1997)，永井（1997）の文献から採用した．

[11] カッコ内の文章は筆者が加筆した．

[12] 不適切な Window 設定による不完全なグラフの誤解に関しては，２．２節（pp.72-83）を参照．

６．教材の内容（展開）

図 3-3-7 は，生徒に与えた本課題の縮小コピーである．課題１では，グラフ電卓に表示されたグラフが不完全でないことを確かめるために，増減表を書くように指示した．さらに，関数の増減・極値と導関数の符号との関係を視覚的に探究するために，３次関数と導関数をグラフ電卓の同一座標平面上に同時に表示したグラフを描くように指示した．また，課題２では，課題１で得られた結論とその理由，さらに，この課題から分かったこと気づいたことを記述するように求めた．この課題２は，課題１での結論以外に発見したことを記述するためのオープンな課題である．

【冬休みの課題】

クラス：　　　名前：

課題１．三次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a>0)$ は，何種類のグラフの形があるのだろうか？　グラフ電卓を使って沢山のグラフを描いて，三次関数のグラフは何種類あるかを調べてみよう．

課題２．課題１での結論（何種類）を書きなさい．さらに，結論の理由や，分かったこと気づいたことを書きなさい．

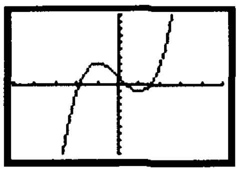
【レポート例】

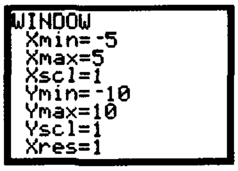
課題１．

＜１種類目＞

（１）関数式：　$y=x^3-3x+1$

（２）グラフとウインドウ：





（３）導関数：　$y'=3x^2-3$

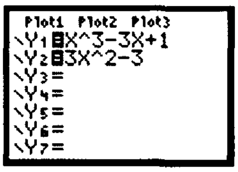
（４）増減表：

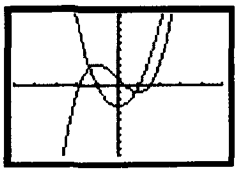
（省略）

（５）極値：

（省略）

（６）関数と導関数との関係をグラフで確認（増減表の確認）





課題２．結論は＊＊種類である．その理由は，・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・だからである．

図 3-3-7.　**３次関数の課題**

この課題では，Leinbach L.C.（1991）が示した実験室アプローチの五つの活動（観察，同定，探究，分析，説明）を参考に，以下に示す８つの数学的活動を期待した[13].

活動①：グラフ電卓の表示されたグラフを観察する（Observation）⇔外的活動

活動②：表示されたグラフを増減表で確認・検証する（Verification）⇔内的活動
（この活動では，グラフ電卓の誤表示や不適切な Window 設定による不完全なグラフ表示による誤解を回避することも意図している）

活動③：関数と導関数のグラフの関係を観察する（Observation）⇔外的活動

活動④：活動①ー活動③を繰り返し行う活動において，３次関数のグラフの特徴や形状の分類基準を同定する（Identification）ために探究・調査する（Exploration）⇔外的活動から内的活動

活動⑤：活動④で得られた仮説を数学的に公理化する（Formulation）⇔内的活動

活動⑥：仮説の真偽を数学的に分析（Analysis）・演繹する（Deduction）⇔内的活動

活動⑦：活動⑥で得られた結論を具体的事例で実験し検証・実証する（Verification）⇔外的活動

活動⑧：数学的活動で得られたことを記述・説明する（Explanation）⇔内的活動

高等学校の教科書での数学的活動は，与えられた問題を解決するために生徒は活動⑥から活動⑧の活動を行うのみである．これに対して，本課題では生徒が自分で発見した仮説について，外的活動と内的活動とが相互に作用しながら問題解決する数学的活動であると言える．

7．実践結果

ここでは，生徒が提出したレポート結果をもとに，生徒が行なった３次関数のグラフの分類の同定基準について分析した結果を紹介する．さらに，生徒自身が発見した仮説に対する数学的な検証方法についても紹介する．

(1) ３次関数のグラフの分類に関する同定基準について

表 3-3-1 は，３次関数のグラフの種類と，生徒が分類した同定基準を４つの観点にまとめたものである．本課題を提出した生徒 48 名の中で，３次関数のグラフが２種類と答えた生徒が 30 名（62.5%），３種類と答えた生徒が 14 名（29.1%）であった．また，表 3-3-2 は，３次関数の種類の観点ではなく，生徒が分類した同定基準の観点でまとめたものである．以下に，生徒が考えた４つの同定基準の詳細について，生徒の

[13] Leinbach L.C.（1991）が示す五つの活動に，確認・検証（Verification），公理化（Formulation），演繹（Deduction）を加えた．

レポートを参考に紹介する．

表 3-3-1．３次関数のグラフの種類と分類の同定基準[14]

種類	人数	分類No.	分類する同定基準	人数
2	30	2A	導関数である２次関数の性質との関係	2
		2B	関数の極値の観点による分類	4
		2C	関数の各係数とグラフとの関係	6
		2D	実験事例を視覚的に分類	13
		2Z	なし	6
3	14	3A	導関数である２次関数の性質との関係	5
		3B	関数の極値の観点による分類	2
		3C	関数の各係数とグラフとの関係	0
		3D	実験事例を視覚的に分類	3
		3Z	なし	4
4	1	4C	関数の各係数とグラフとの関係	1
11	1	11Z	なし	1
沢山	1	XC-1	関数の各係数とグラフとの関係	1
無限	1	XC-2	関数の各係数とグラフとの関係	1
合計	48		合計	49

表 3-3-2．３次関数のグラフの種類と分類の同定基準

分類No.	分類する同定基準	人数
A	導関数である２次関数の性質との関係	7
B	関数の極値の観点による分類	6
C	関数の各係数とグラフとの関係	9
D	実験事例を視覚的に分類	16
Z	なし	11
	合計	49

ａ．導関数である２次関数の性質との関係（７名）

表 3-3-2 に示すように，３次関数のグラフの分類を導関数である２次関数の性質と関係づけて考察した生徒は７名あった．この同定基準には，４つのパターンが見られたので，各パターンについて以下に簡単に紹介する．

1) 判別式による２次関数の解の種類（２名）

図 3-3-8 に示す記述には不備があるが，導関数である２次関数の解の判別式を使って３次関数のグラフの分類を同定した例である．

[14] 表 3-3-1 の左側の種類の合計人数（48 名）と右側の分類する同定基準の合計人数（49 名）が異なる理由は，分類する方法を２通りの同定基準（2A と 2C）で行った生徒が１名いたからである．

3種類あります。

$y'=3ax^2+2bx+c=0$

すべてを正とする

そしてはんべつ式を使うと

$<$

$=$

$>$

の3つしかないので

3種類あります。

図 3-3-8．判別式による２次関数の解と３次関数のグラフの関係

2) ２次関数の最小値の符号（１名）

図 3-3-9 は，導関数である２次関数の最小値が正，０，または，負によって３次関数のグラフが異なることを同定した例である．

結論は3種類である。

その理由は

aが正の数なので全て右上りのグラフになり、

導関数のグラフを見ると、最小値が0のグラフと

正の数のグラフと負の数のグラフの

3種類があるからである。

図 3-3-9．２次関数の最小値と３次関数のグラフの関係

3)　２次関数の実数解の個数（４名）

図 3-3-10 は，導関数である２次関数の実数解の個数を基準に，３次関数のグラフの種類を同定した例である．この生徒は９つの３次関数のグラフと増減表を記述しており，それらを観察した結果，導関数の値が０（$y'=0$）になる x は０−２個であることを「三次関数の導関数は二次関数なので $y=ax^3+bx^2+cx+d$ の導関数では x の値が０−２こでてくる.」と記述したと考えられる．次に「０この時と１この時はこの関数では $a>0$ なので増減表の導関数の左右（端）は常に一定である.」では，定義域を広範囲で考えると３次関数のグラフは右上がりになるので増減表の導関数の欄の左右は常に＋で一定であることを記述していると考えられる[15]．つまり，$y'=0$ となる x が０個の場合の増減表の導関数の欄は常に＋，さらに，１個の場合は＋０＋となり，それぞれ１種類ずつのグラフをもつと結論づけたと考えられる．最後の「２つの時も同じように端が一定なので３パターンでてくるがこの関数の導関数は必ず極小値がでてくるグラフになるので１パターンしかでてこない.」では，$y'=0$ となる x が２個の場合の増減表の導関数の欄は，(1)＋０＋０＋，(2)＋０００＋，(3)＋０−０＋，の３パターン考えられるが，導関数である２次関数の極小値が必ず負になるので(3)＋０−０＋の１パターンのみであると結論づけたと考えられる[16]．これらの考察結果から３次関数のグラフは３種類であると結論づけた．

結論は3種類である。その理由は三次関数の
導関数は二次関数なので $y=ax^3+bx^2+cx+d$ の導関数
ではxの値が0〜2こでてくる。0この時と1この時はこの関数
ではa>0なので増減表の左右(端)は常に一定である。そして，2つ
の時も同じように端が一定なので3パターンでてくるがこの関数の
導関数は必ず極小値がでてくるグラフ(　)になるので
1パターンしかでてこない。よって3種類である。

図 3-3-10．導関数の値が０になる個数と３次関数のグラフの関係

[15] この生徒は，図 3-3-10 に示した結論以外に，分かったこと・気づいたことを多数記述している．その中に「$y=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフで b,c の値がどんな値になっても広範囲を見ると右上がりのグラフになる」という発見を記述している．これを参考に，図 3-3-10 にある「増減表の左右（端）は常に一定である.」の記述は，「定義域を広範囲で考えると３次関数のグラフは右上がりになるので増減表の左右は常に＋で一定である.」と考えていると解釈した．

[16] 導関数である２次関数の極小値が必ず負になることの理由に関しては，生徒のレポートには記述されていない．この生徒は９つの３次関数を記述していることから，これらのグラフを観察した結果から結論づけたと考えられる．

b．関数の極値の観点による分類（6人）

図 3-3-11 は，グラフ電卓に表示した幾つかの事例をもとに，3 次関数の極値が「存在する」または「存在しない」の同定基準でグラフを分類した例である．ここでは表 3-3-2 に示した同定基準の分類 A に見られるような，導関数である 2 次関数の性質と 3 次関数の極値との関係については言及されていない．

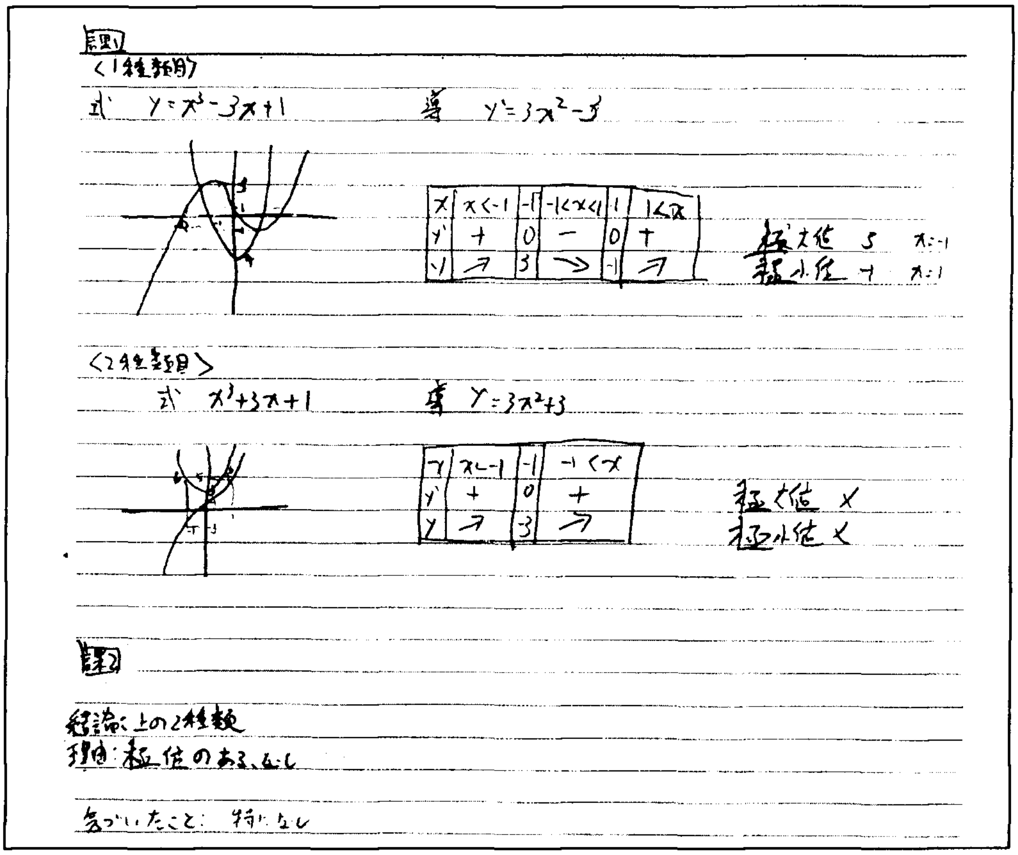


図 3-3-11．関数の極値の観点による分類

c．関数の各係数とグラフとの関係（9人）

3 次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ の 4 つの係数 a,b,c,d とグラフの関係を探究した生徒は 9 名であった．この関係の探究は，教材のねらいの一つであるが，生徒にとっても自然な考え方だったようだ．なぜならば，一次関数 $y=ax+b$ では各係数と傾き・y 切片との関係，さらに，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ の一般形では a がグラフの形状，c は y 切片，標準形 $y=a(x-p)^2+q$ では p と q が頂点というように，既習の関数では方程式の係数とグラフの特徴との関係を学習しているからである．

6 名の生徒達の探究方法を分析すると，1) 複数の係数を同時に変更する場当たり的な探究［6 名］，2)変更する係数を 1 つにして他の係数を固定する探究［2 名］，3) 代数計算を基にした各係数の場合分けによる探究［1 名］，の 3 通りがあった．それぞれの探究方法について以下に紹介する．

1) 複数の係数を同時に変更する場当たり的な探究（6名）

図 3-3-12 を記述した生徒は，$y=2x^3+6x^2+6x+1$の事例から① $0<b$，$0<c$の場合は極限が存在しないタイプ(c)のグラフ[17]になり，さらに，$y=2x^3-6x+6$の事例から② $b=0$，$c<0$の場合は極限が存在するタイプ(a)のグラフ[18]になると結論づけた．さらに,「①の条件を$b<0$，$c<0$にすると②の形となり,②の条件を$b<0$，$c=0$としてもそのままの形となった．[19]」では，どちらの方法も２つの係数を同時に変更しているため場当たり的な探究になっているようである．つまり，これらの変更によって得られた結論は，どちらの係数の影響によるものかは考察されていないと考えられる．

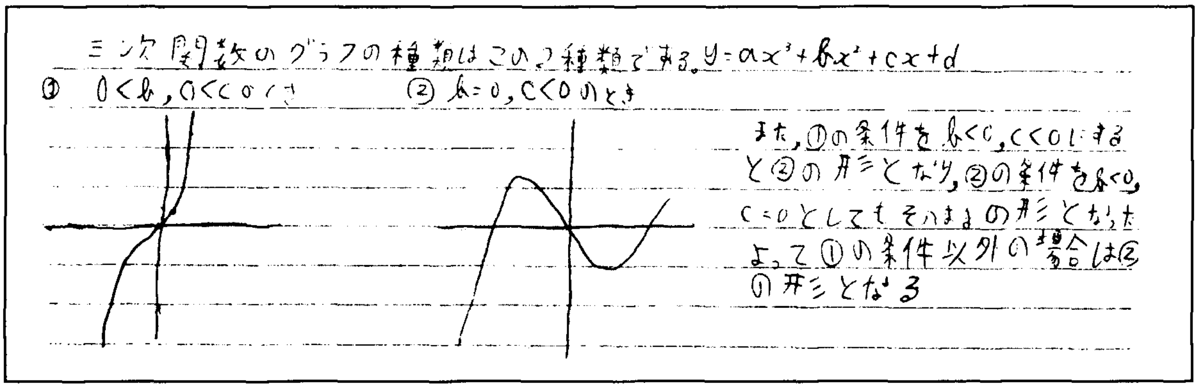


図 3-3-12. 複数の係数を同時に変更する場当たり的な探究

2)変更する係数を１つにして他の係数を固定する探究（２名）

図 3-3-13 に記述された文章「$y=x^3-3x^2+3x$の３次関数をもとに，$y=ax^3+bx^2+cx+d$のa,b,c,dの値をそれぞれ変えて導関数との関係について比較してみた.」，さらに，係数 c を変更した三つのグラフから推測すると，活動①ー活動④の仮説を設定する段階において，この生徒は３次関数$y=ax^3+bx^2+cx+d$の４つの係数a,b,c,dのうち，一つの係数のみを変更しながら観察・実験を行なったと考えられる．つまり，島田（1995）が示す数学的活動の模式図を参考に考察すると，まず最初に「f．条件・仮説」の段階で変更する係数を一つに着目することで条件を簡単化し，その係数に関する実験・観察→「k.データ」→「l．照合」→「m．仮説の修正」のサイクルを何度か繰り返しながら

[17] $y=ax^3+bx^2+cx+d$の導関数は$y'=3ax^2+2bx+c$であるため，$0<b,0<c$の場合，導関数の判別式$D=b^2-3ac$が正，0，負の何れにも成りうるので，この結論は正しくない．

[18] $b=0,c<0$の場合，導関数の判別式$D=b^2-3ac$が常に正となるので，この結論は正しい．

[19] $b<0,c<0$と$b<0,c=0$の何れの場合も，導関数の判別式$D=b^2-3ac$が常に正となるので，この結論は正しい．

「g．f（条件・仮説）の数学的ないいかえ（公理化）」へと至る数学的活動を行ったと思われる．この数学的活動の過程は，科学的な探究方法として重要であり，この生徒が自主的に活動したことは評価できる．しかし，「g．f（条件・仮説）の数学的ないいかえ（公理化）」において，数学的に記述された仮説を数学的に検証する「h．十分か」や，具体的な事例（データ）を基にした「I．照合」が行われていないため，この生徒は係数 a,b の仮説（グラフの形に大きな変化はない）に誤りがあることに気づかなかったようである（図 3-3-14）．

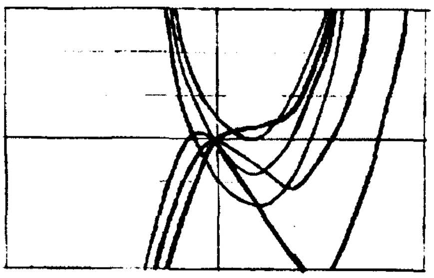
・$y = x^3 - 3x^2 + 3x$ の3次関数をもとに，$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ の a, b, c, d の値をそれぞれ変えて導関数との関係について比較してみた。

1) $a\ (a>0)$ の場合 → 2つのグラフともにy軸に近づいていき，傾きが変化したけどもグラフの形に大きな変化はない。

2) b の場合 → グラフが左右に移動するだけで，変化はない。

3) c の場合 → 導関数が上下に移動し，そのグラフと同時に3次関数のグラフが大きく変化して，2種類のグラフがあった。

4) d の場合 → 3次関数のグラフが上下するだけで，導関数は変わらない。よってグラフの形は変わらない。



<cの場合>

① $y = x^3 - 3x^2 - 3x$　$y' = 3x^2 - 6x - 3$
② $y = x^3 - 3x^2$　$y' = 3x^2 - 6x$
③ $y = x^3 - 3x^2 + 3x$　$y' = 3x^2 - 6x + 3$

・結論は…2種類である

・その理由は…

2次関数である導関数は接線の傾きであるから，この接線の傾きが上下移動すると，グラフも大きく変化する（!?）

図 3-3-13．１つの係数のみを変更する探究

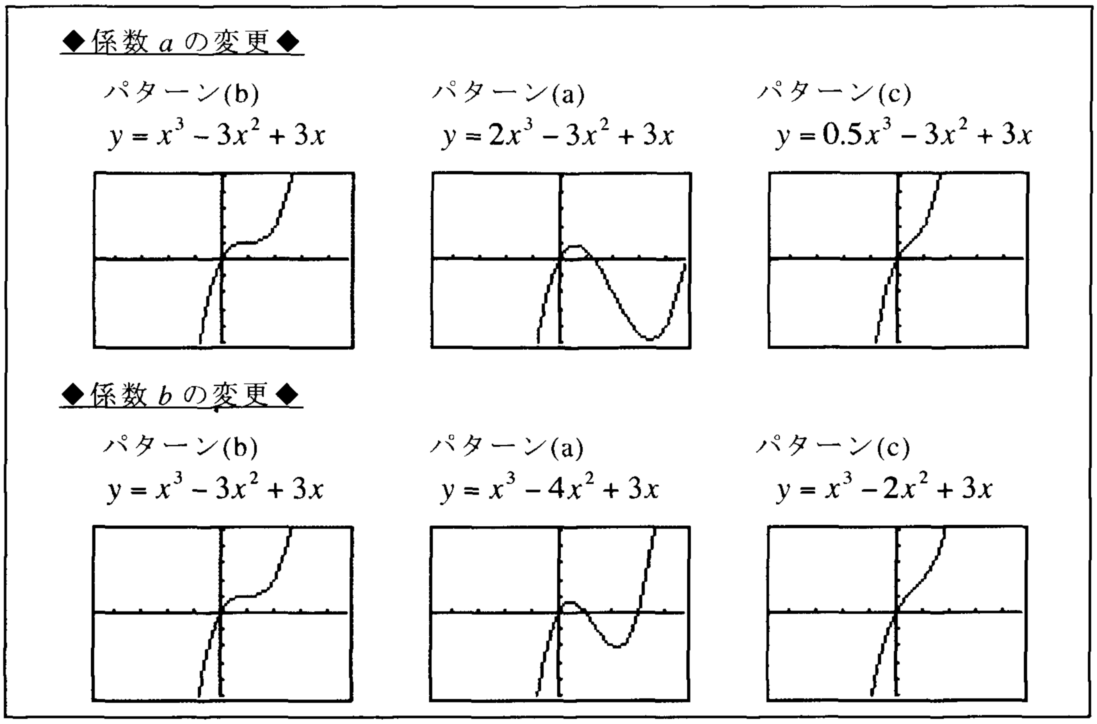


図 3-3-14．係数 a，b における仮説に対する反例

3) 代数計算を基にした各係数の場合分けによる探究（１名）

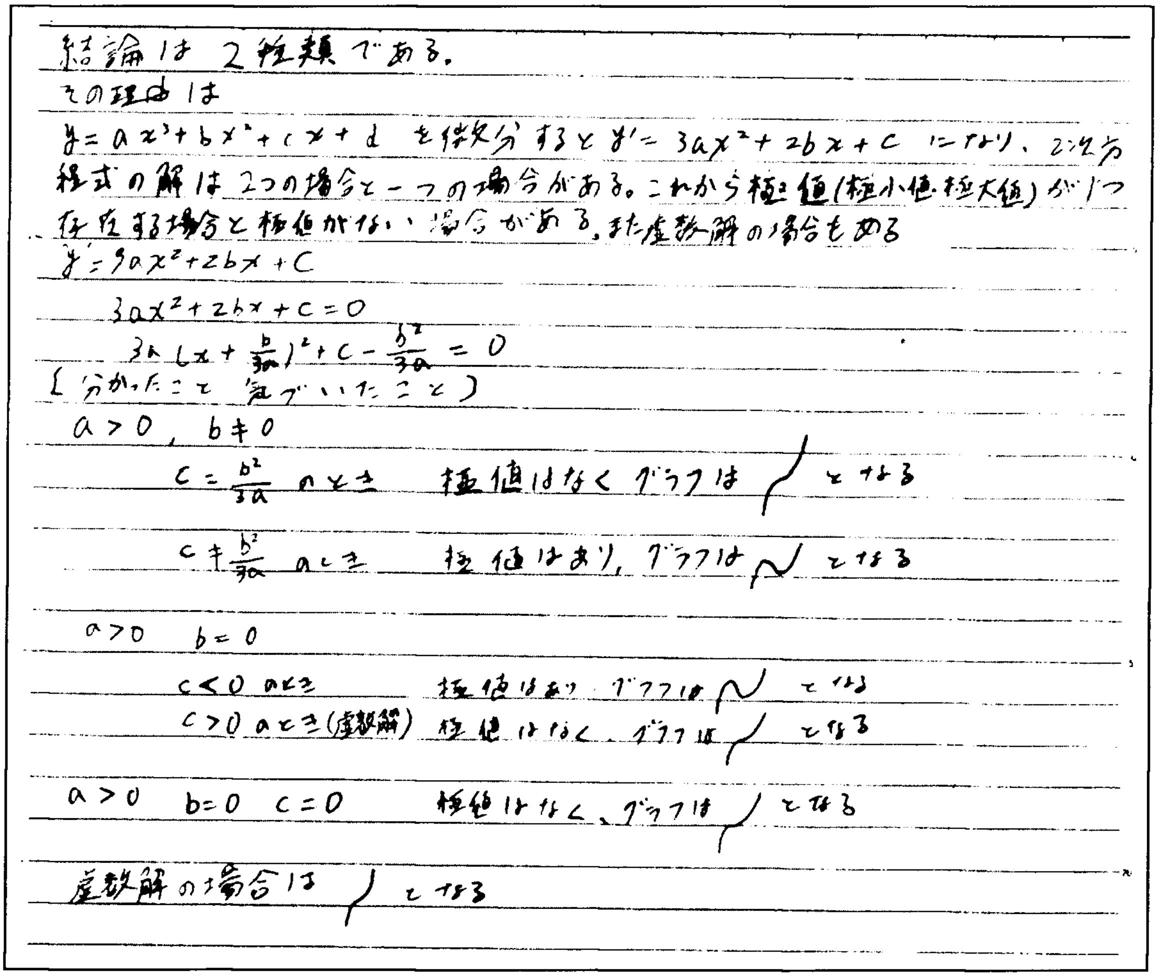
図 3-3-15 は，導関数である２次関数の実数解の個数を基準に，３次関数の極値が存在する場合と存在しない場合を考察し，その結果をもとに３次関数のグラフの種類を同定した．次に，導関数である２次関数を２次方程式 $3ax^2 + 2bx + c = 0$ として，それを標準形 $3a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{3a} = 0$ に式変形した．さらに，係数 b，c を［① $a > 0, b \neq 0$，② $a > 0, b = 0$，③ $a > 0, b = 0, c = 0$］[20]の三つのパターンに場合分けをして，$c - \frac{b^2}{3a}$ の符号を考察することで３次関数のグラフを分類し，最終的には虚数解の場合も含めてグラフは２種類であることを結論づけている．この生徒の記述には，① $a > 0, b \neq 0$ の部分に誤りがあるが[21]，活動⑥「仮説の真偽を数学的に演繹する（Deduction）」の過程で係数 b，c の場合分けによる演繹的な考察を通して，自分の

---

[20] ①は $a > 0, b \neq 0, c \neq 0$ であり，②は $a > 0, b = 0, c \neq 0$ であると考えられる．また，この生徒の分類では $a > 0, b \neq 0, c = 0$ が抜けている．

[21] ① $a > 0, b \neq 0, c \neq 0$ の場合において「$c \neq \frac{b^2}{3a}$ のとき極値はあり，グラフはパターン(a)」と記述されているが，正しくは「$c > \frac{b^2}{3a}$ のときは極値が存在しないのでグラフはパターン(c)，さらに，$c < \frac{b^2}{3a}$ のときは極値が存在するのでグラフはパターン(a)」となる．

仮説を代数的に検証したことは評価できる．



結論は２種類である。
その理由は
$y=ax^3+bx^2+cx+d$ を微分すると $y'=3ax^2+2bx+c$ になり、２次方程式の解は２つの場合と一つの場合がある。これから極値(極小値・極大値)が１つ存在する場合と極値がない場合がある。また虚数解の場合もある
$y'=3ax^2+2bx+c$
$3ax^2+2bx+c=0$
$3a(x+\frac{b}{3a})^2+c-\frac{b^2}{3a}=0$
［分かったこと 気づいたこと］
$a>0,\ b\neq 0$
$c=\frac{b^2}{3a}$ のとき 極値はなくグラフは となる
$c\neq\frac{b^2}{3a}$ のとき 極値はあり，グラフは となる
$a>0$　$b=0$
$c<0$ のとき 極値はあり グラフは となる
$c>0$ のとき(虚数解) 極値はなく，グラフは となる
$a>0$　$b=0$　$c=0$ 極値はなく，グラフは となる
虚数解の場合は となる

図 3-3-15．代数計算を基にした各係数の場合分けによる探究

ｄ．視覚的な分類（16 人）

グラフ電卓を活用した数学的活動では，沢山のグラフが短時間で視覚的に観察できるため，テクノロジーを使わない数学的活動と比べると，多くのグラフを基にした仮説の設定及び検証が容易にできる利点がある．しかし，図 3-3-16 に示す生徒の記述「これ以外に変わったグラフが出てこなかったので２種類である．」に見られるように，沢山のグラフが観察・実験できることが逆に「これ以上見つからないから，全てのパターンを調べつくした．」という錯覚を生徒に生じさせ，「どうしてそうなるのだろうか？」といった疑問や数学的に検証する必要性を感じさせない欠点があるようである．この生徒以外に「これ以上式をかえてもでてこないから．」，「これ以上思いつかないから．」「これ以上はでなかった．」「この調べた三種類以外の形で表わせるグラフは無いと思ったからです．」「２種類しか見つからなかった．」「これ以上のグラフは（自分には）書けないから….」「おおよそやってみて形が似ているのばかりだから．」「今まで

見たことのあるグラフがおそらく２種類だけだからである.」などの記述があり，視覚的な分類のみによる探究を行った生徒は 16 名（約１／３）であったことが分かった.

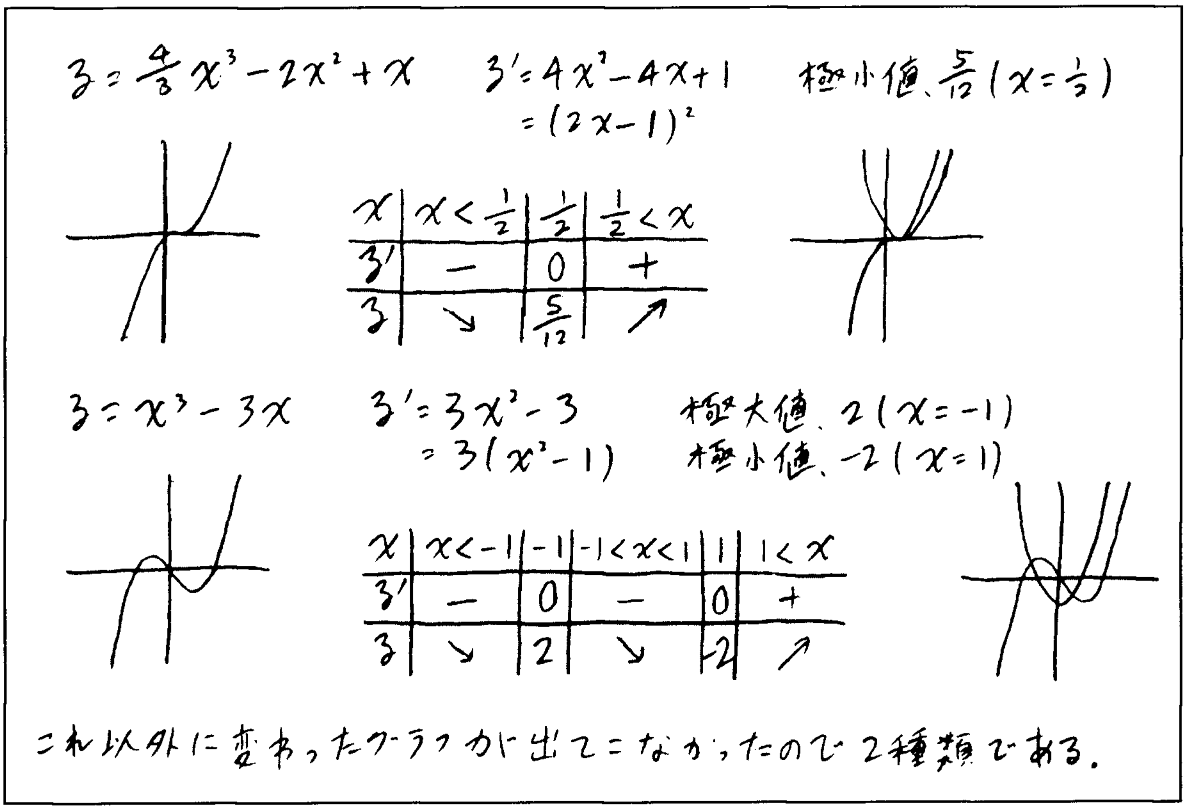


図 3-3-16. **視覚的な分類による探究**

(2) ３次関数のグラフの分類以外に発見した規則

表 3-3-3 は，３次関数のグラフの分類以外に発見した規則の反応類型と人数を以下の観点で分類したものである[22].

分類 A：係数 a に関する規則　　分類 B：係数 b に関する規則

分類 C：係数 c に関する規則　　分類 D：係数 d に関する規則

分類 E：導関数に関する規則

表 3-3-3 に示した生徒が自ら発見した規則の中で，規則が成り立つ理由を数学的に記述したレポートは，図 3-3-15 に前述した生徒１名のみで，この生徒は A-2 と C-2 の規則について代数的に検証した．このように自ら発見した規則が真であることを数学的に検証した生徒が少なかったが，規則の中には，B-1 と E-3 のように第二次導関数と変曲点の学習に繋がる発展的な規則もあった.

[22] 数学的に誤っている規則と意味不明な規則は除外した．また，規則を記述した生徒は 11 名であり，表の合計と異なるのは，一人で複数の規則を記述している生徒がいたためである.

表 3-3-3．グラフの種類以外に発見した規則の反応類型と人数

分類	反応類型	人数
A-1	$y=ax$^$3\ (a>0)$ のグラフは $x>0$ で正，$x<0$ で負になる	1
A-2	$y=ax$^$3\ (a>0)$ のグラフは極値はない	2
A-3	係数 a を大きくするとグラフはy軸方向に近づく（a の値が大きくなればなるほどグラフは急な傾きになる）	3
A-4	係数 a は正なので広範囲でみると右上がりのグラフになる	5
B-1	係数 b は x 軸の位置で＋（プラス）だと左で−（マイナス）だと右の方にグラフが移動する	2
C-1	係数 c の値を大きくするとグラフは直線に近づく	1
C-2	係数 c は＋（プラス）だと極値のないグラフで−（マイナス）だと極値のあるグラフ［ただし，$b=0$ の場合］	3
D-1	係数 d は y 軸の位置（y 切片）である	4
E-1	導関数と x 軸との交点が x の極値になる	2
E-2	導関数のグラフの y の値によって上下どちらに傾いているかが分かる	1
E-3	導関数の極値は，関数式のグラフの中心を通っている（2つの極値の中点が変曲点である）	1
	合計	25

8．考察

(1) 主体的な数学的活動による多様な分類基準と既習事項との関連づけ

3次関数のグラフの種類を分類する本課題では，生徒たちは4つ同定基準に基づいて分類を行った．特に，同定基準 D（実験事例を視覚的に分類）以外の3つの同定基準では，生徒自らが既習事項を関連づけながら同定基準を設定したことが分かった．例えば，同定基準 A（導関数である2次関数の性質との関係）では，導関数である2次関数の解の種類を3次関数のグラフとの関係を調べるために，①判別式，②実数解の個数，③最小値の符号，といった方法で，2次関数の性質との関連づけを生徒は自主的に行った．さらに，同定基準 C（関数の各係数とグラフとの関係）では，導関数である2次関数を2次方程式 $3ax^2+2bx+c=0$ として，それを標準形 $3a\left(x+\dfrac{b}{3a}\right)^2+c-\dfrac{b^2}{3a}=0$ に式変形した生徒もいた．

教科書や問題集における数学的活動では，与えられた問題に対して教科書等に示された解法で問題解決することが多い．これに対して，生徒の主体的な数学的活動による本課題では，生徒が発見した自らの同定基準の正当性を数学的に分析（Analysis）・演繹（Deduction）するために，生徒自らが既習事項を活用したことが明らかになった．

また，3次関数の分類以外に発見された規則も多様であったが，その規則を数学的

に分析（Analysis）・演繹（Deduction）したのは一人だけであった．しかし，規則の中にはグラフの変曲点に関する発見もあり，本課題を発展的な学習に展開できる可能性があることが分かった．

(2) **外的活動と内的活動の相互作用による数学的活動**

生徒たち全員のレポートには，３次関数に関する複数の事例（グラフ，導関数，増減表など）が記述されており，生徒達は複数の事例を基にグラフを分類する同定基準を考察したと考える[23]．つまり，本節の「６．教材内容」で示した８つの数学的活動では，全員の生徒が活動①「グラフの観察（外的活動）」⇒活動②「増減表によるグラフの検証（内的活動）」⇒活動③「関数と導関数のグラフ関係の観察（外的活動）」⇒活動④「活動①ー活動③の繰り返しによる分類基準の同定（外的活動から内的活動）」⇒活動⑤「同定基準の公理化（内的活動）」といった外的と内的の活動を相互に作用させた数学的活動を行ったと考える．さらに，一部の生徒は，同定基準の正当性について既習事項を活用して数学的に分析・演繹する内的活動（活動⑥）を行った．このように，生徒の外的活動と内的活動との相互作用が促進されたのは，グラフ電卓の即時性・簡易性によって，複数のグラフを観察・実験，さらには，自分の仮説や考察を視覚的・グラフ的に検証することが容易に行えたからであると考える．

しかし，グラフ電卓の即時性・簡易性が，逆に生徒の数学的活動を困難にさせた事実も明らかになった．それは，生徒は３次関数の係数を自らの考えで自由に設定できるため，導関数が整数の範囲で因数分解できない事例を実験した生徒が多かったようである．このため，導関数の解を求める計算が煩雑になり，14 名（約 29%）もの生徒が計算間違いをした．例えば，図 3-3-17 に示す生徒は，３次関数 $y=x^3-2x^2-2x+2$ のグラフに関して，導関数 $y'=3x^2-4x-2=0$ の解 $x=\dfrac{\sqrt{10}}{3}, x=\sqrt{10}$ を求め，それを基に増減表と極小値・極大値を求めた．さらに，グラフ電卓に３次関数と導関数のグラフを表示し，それらのグラフをレポートに描いた．$y'=3x^2-4x-2=0$ の正しい解は $x=\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{3}$ であり，この生徒は，自分で求めた解 $x=\dfrac{\sqrt{10}}{3}, x=\sqrt{10}$ が計算間違いであることに気づかなかったようである．しかし，①増減表の結果[24]とグラフ電卓が表示した３次関数のグラフが一致しないこと，さらに，②求めた解 $x=\dfrac{\sqrt{10}}{3}, x=\sqrt{10}$ が

---

[23] 生徒が記述した事例は，一人当たり平均 3.2 個であり，最高で 11 個の事例を記述した生徒がいた．

[24] 図 3-3-17 の増減表の一部に間違いがある．

正であるのに対してグラフ電卓が表示した導関数のグラフの x切片が負と正で一致しないこと，の2点を検証すれば自分で求めた解 $x=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$, $x=\sqrt{10}$ が正しくないことに気づいたはずである．つまり，この生徒は，内的活動によって求めた増減表や極値と，グラフ電卓に表示されたグラフを観察する外的活動とを相互に関連づけなかったために，計算間違いに気づかなかったと考えられる．

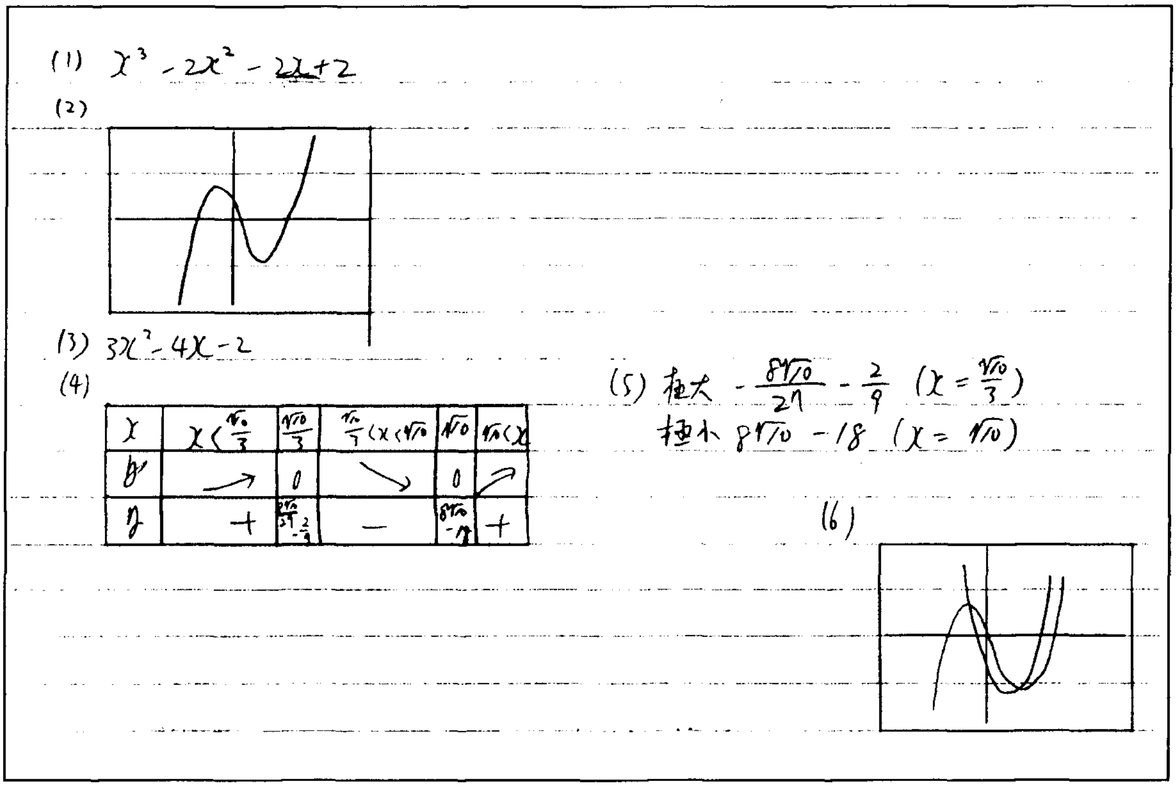


図 3-3-17. 計算間違いによる増減表とグラフ電卓の結果との不一致

表 3-3-4 に，計算間違いを6つの観点で分類した結果を示す．これらの計算間違いも，上記の生徒と同様に，自分で求めた計算結果とグラフ電卓に表示されたグラフとを比較検証しなかったことが原因であった．この結果，片岡（1996）の実践研究に見られるような，手計算の結果（内的活動）とグラフ電卓の結果（外的活動）とを往復しながら，自分で求めた計算結果を検証・修正する重要性を生徒に認識させることが今後の課題として明らかになった．

表 3-3-4. 計算間違いの分類と人数[25]

計算間違い	人数
解の公式	3
因数分解	5
虚数 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}$	2
増減表の符号ミス	5
単純な計算ミス（極値，途中計算）	2
不明	1
合計	18

(3) ４つの係数を変更する数学的活動における生徒の工夫

Polya（1959）が「帰納は物事の観察から始まることが多い．（p.2）」と述べるように，３次関数のグラフの分類を行う本課題では，生徒たちは，$y=ax^3+bx^2+cx+d$の４つの係数a,b,c,dを自分の意図で設定しながら複数のグラフを観察することから数学的活動を始めた．この方法は有用であるが，４つの係数を持つ３次関数の全てのグラフを観察することは不可能であり，ただ闇雲に各係数を変更する観察の結果による仮説は，それが真であると主張するには信頼性に欠けることがある．しかし，本課題を行った生徒達は，①原問題の変形，②４つの係数の効果的な変更，の２つの工夫を行って数学的活動を行っていた．

一つ目の工夫「①原問題の変形」に関しては，３次関数のグラフ分類の同定基準 A（導関数である２次関数の性質との関係）と同定基準 B（関数の極値による分類）の活動において，原問題の変形の工夫が行われていた．つまり，同定基準 A では，本課題を導関数である２次関数の性質（判別式による解の種類，実数解の個数，最小値の符号）を調べる課題に問題を変形し，そこで得られた性質を３次関数の課題に関連づけることでグラフの分類を行っていた．一方，同定基準 B は，複数のグラフと増減表を観察する活動において，極値が「存在する」「存在しない」といった課題に問題を変形し，その観点で分類した結果から３次関数のグラフの分類を行っていた．以上の結果から，生徒達は原問題を変形することにより，既習の２次関数や増減表の極値を活用しながら原問題を解決したことが分かった．Polya（1954）は，問題を変形させることの必要性について，次のように述べている．

「問題を変形させることは大切である．これはいろいろな仕方で実証することができる．ある観点からすれば問題を解くことは，すでに得た知識を動員し組織化

[25] 表の合計人数が 18 名となっているのは，一人で２つの計算間違いをした生徒が２名，さらに一人で３つの計算間違いをした生徒が１名いたためである．

することである．記憶の中からある要素を引出し，問題の中に織込むことが必要である．その目的には問題を変形させることが役に立つ．」(pp.148-149)

次に，二つ目の工夫「②4つの係数の効果的な変更」に関しては，同定基準C（関数の各係数とグラフとの関係）の活動において，係数の変更の工夫が行われていた．この同定基準では，1)複数の係数を同時に変更する方法，2) 1つの係数のみを変更する方法，3)代数計算を基にした各係数の場合分け，の三つのパターンの方法があった．何れも，変更する係数以外は固定する方法で3次関数のグラフの分類の一般化を行っており，これはPolya（1959）が述べる制限の導入による特殊化[26]の手法であると考えられる．

一方，視覚的な分類（16名），同定基準なし（11名）は，上記の工夫が行われておらず，観察・実験で得られた分類の仮説を信頼して良いのかどうかについて，もう1歩踏み込んで考察する態度を育成することが今度の課題として明らかになった．

(4) **グラフ電卓の有効性と課題**

生徒達はグラフ電卓に表示された3次関数のグラフを観察・実験することで，グラフを分類する同定基準を直感的・帰納的に類推することができた．さらに，一部の生徒には，その同定基準を具体的に実験・検証し，最終的には，数学的に検証した生徒もいた．例えば，図3-3-18に示す生徒は，自分の同定基準を特殊な事例 $y = 0.001x^3 + 1000x^2$ で実験・検証しており，グラフ電卓の即時性・簡易性がなければ行えなかった活動であると考える．このように，グラフ電卓は，生徒達の外的活動と内的活動を相互につなげる教具として有効であることが今回の調査で明らかになった．

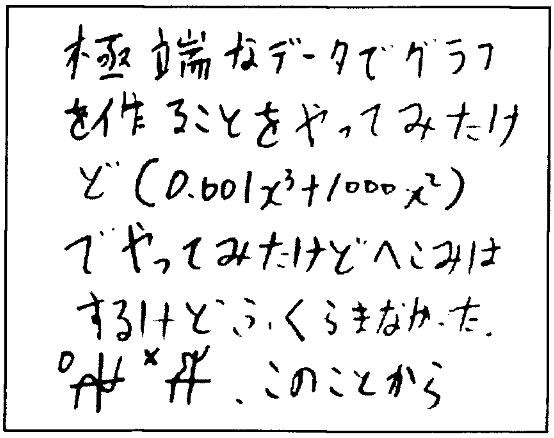


図 3-3-18．特殊な事例による同定基準の実験・検証

[26] Polya（1959）は，特殊化を「与えられた一組の対象の考察からそれに含まれるより小さな一組の対象の考察に移ることである．」と述べている．さらに，特殊化の移行には，制限の導入と変数の限定化の二つの例を示している（P.13）．

これに対して，本課題では，不適切な Window 設定によるグラフの誤解を記述した生徒が８名も存在した．多くの研究者（Demana and Waits, 1988 ; Goldenberg, 1989 ; Dion, 1990 ; Dick, 1992 ; Hector, 1992 ; Donley and Elizabeth, 1993 ; Williams, 1993 ; Hansen, 1994 ; Ward, 1998 ; Krumpe and keiser, 2003 ; 佐伯・黒木，2004）がグラフ電卓の誤表示による生徒の誤認識とその影響の重要性[27]を強調しているが，この８名の内の２名が Window を適切に設定して自らの誤解を解消していたことが，生徒のレポートから明らかになった[28]．以下に，Dick（1992）が示した３つの分類（①表示画面外に存在するグラフ，②曖昧なズームインやズームアウトによる誤表示，③座標計算のまるめ誤差による誤表示）に従って，生徒の誤解を紹介する．

①表示画面外に存在するグラフ（１名）

図 3-3-19 は，３次関数 $y = x^3 - 6x^2 + 10$ の表示範囲を $-5 \leqq x \leqq 5, -10 \leqq y \leqq 10$ としたために，３次関数の極小値が表示範囲外となり，グラフが放物線のような形になったレポートである．この生徒は，導関数 $y' = 3x^2 - 12x = 0$ の因数分解を計算ミスしたために増減表の極小値を間違って求めた．このため，この生徒はグラフ電卓の表示画面外に存在する極小値に気づかなかったと考えられる．

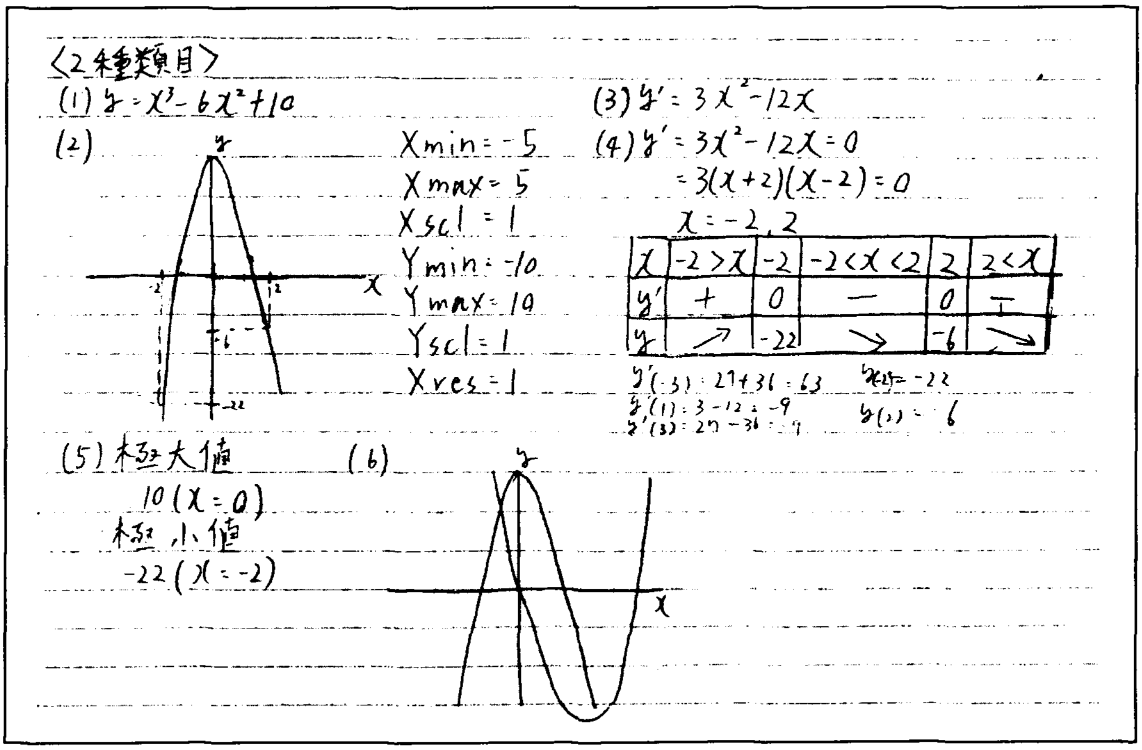


図 3-3-19．表示画面外に存在する極小値に気づかなかった事例

---

[27] 不適切な Window 設定による不完全なグラフの誤解に関しては，２．２節（pp.72-83）を参照．

[28] ここに示した人数は，生徒がレポートに記述した内容を分析した結果の人数であり，実際にはレポートに記述しなかった生徒もいると考えられるため，不適切な Window によるグラフの誤解をした人数，および，誤解を解消した人数は，これらの人数以上になると予想される．

②曖昧なズームインやズームアウトによる誤表示（１名）

図 3-3-20 の３種類目のグラフは，３次関数 $y=\dfrac{1}{3}x^3+x$ の Window 表示範囲を $-1\leqq x\leqq 1, -5\leqq y\leqq 5$ とズームイン（狭く）したために，３次関数のグラフが直線のようになった事例である．この生徒が最初に観察した１種類目のグラフは極値が存在する曲線であり，２種類目は極値が存在しない曲線であった．このため，生徒は分類の同定基準を「極値が存在する．または，存在しない曲線」と設定したと考えられる．しかし，３種類目のグラフが直線となり同定基準と矛盾するために，Window の表示範囲を $-10\leqq x\leqq 10, -10\leqq y\leqq 10$ にズームアウトした結果，同定基準が正しいことを視覚的に検証したと考えられる．この生徒の記述「直線に見えていたので Window を変えると曲線になった．注意しなければ．」に生徒の工夫が見られる．ここでは，内的活動で設定した同定基準を，グラフ電卓による外的活動で実験・検証し，そこで生じた矛盾を再実験によって検証する外的活動と内的活動の相互作用による数学的活動が行われたと考えられる．

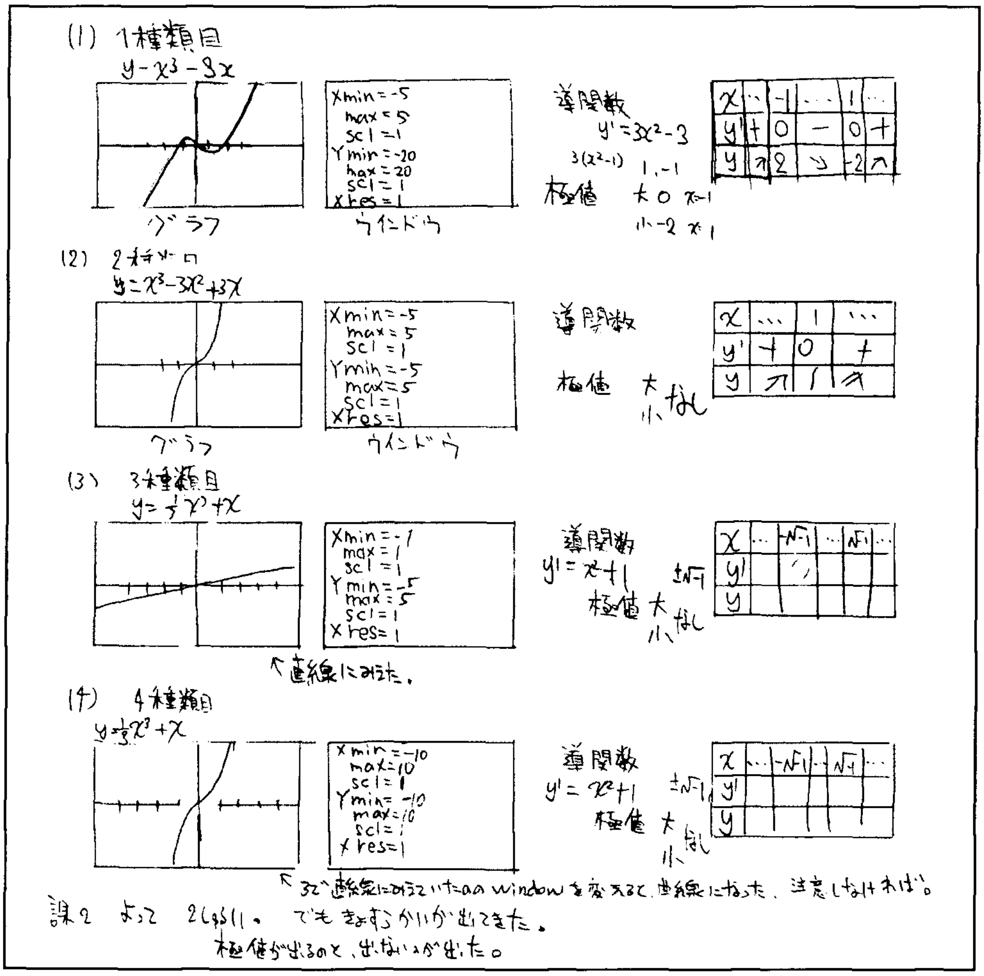


図 3-3-20．Window の再設定による同定基準の再検証

③座標計算のまるめ誤差による誤表示

グラフ電卓（TI-83）の液晶画面は，横が 95 個のピクセル数，縦が 63 個のピクセル数で構成されている．この液晶画面の制約と，座標を計算するときのまるめ誤差によって，グラフ電卓は誤ったグラフを表示する場合がある．以下に，この原因によって生徒が誤った認識を行った事例を 4 つ紹介する．

1) 増減表による確認・検証を行わなかったグラフの誤認識（1 名）

図 3-3-21 は，3 次関数 $y=x^3$ と $y=x^3+x^2$ のグラフがほぼ同じグラフであると認識した生徒のレポートである．この生徒は，増減表を記述しておらず，グラフ電卓に表示されたグラフを視覚的に比較して，双方のグラフとも極値の存在しない同じような形であると判断したと考えられる．$y=x^3+x^2$ は極値が存在するグラフであり，増減表で極値が存在することを確認・検証すれば，この生徒が行った誤認識は回避できたと思われる．

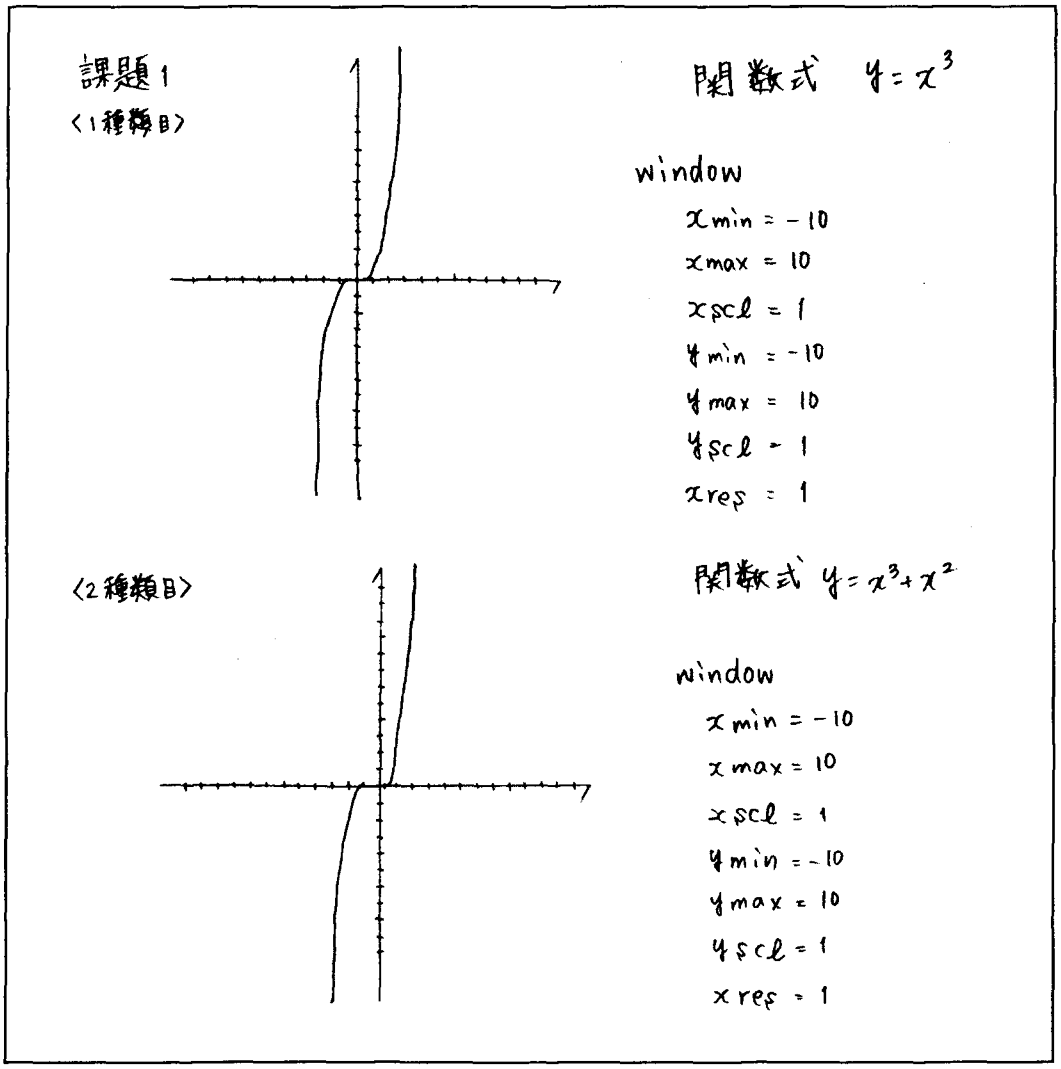


図 3-3-21．増減表による確認・検証を行わなかった事例

2) 増減表の符号の間違いによるグラフの誤認識（３名）

図 3-3-22 の生徒は，３次関数 $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$ のグラフを $-5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5$ の範囲で描いたところ，グラフには極値が存在しないと誤って認識したようである．このことを増減表で確認・検証したが，$-1 \leq x \leq -\frac{1}{3}$ における導関数の符号が間違ってプラス（$y' > 0$）としたためにグラフは単調増加となり，グラフ電卓で観察した通りに極値が存在しないと判断した．しかし，増減表に記述された関数の値を比較すると，$y(-1) = 3 > y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{77}{27}$ であることから，グラフは $-1 \leq x \leq -\frac{1}{3}$ の範囲で減少することが判断できるが，この生徒はこのチェックを行なわなかったために自分の間違いに気づかなかったようである．この誤りは，複雑な分数計算による計算間違いが原因と考えられるが，グラフ電卓に表示された誤表示を無批判に受け入れてしまったために計算間違いに気づかなかったとも考えられる．

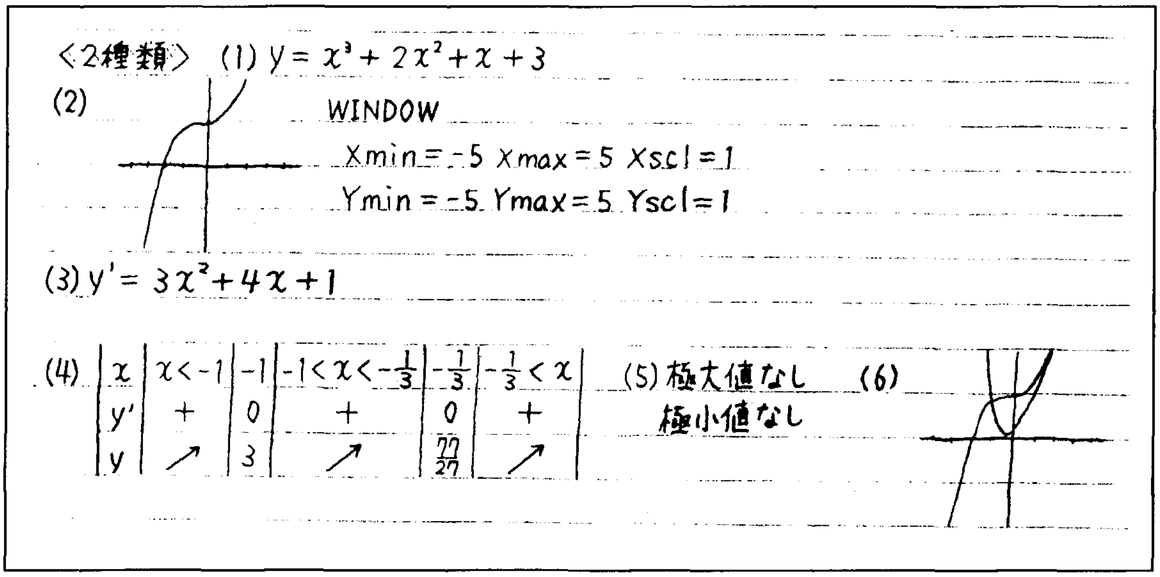
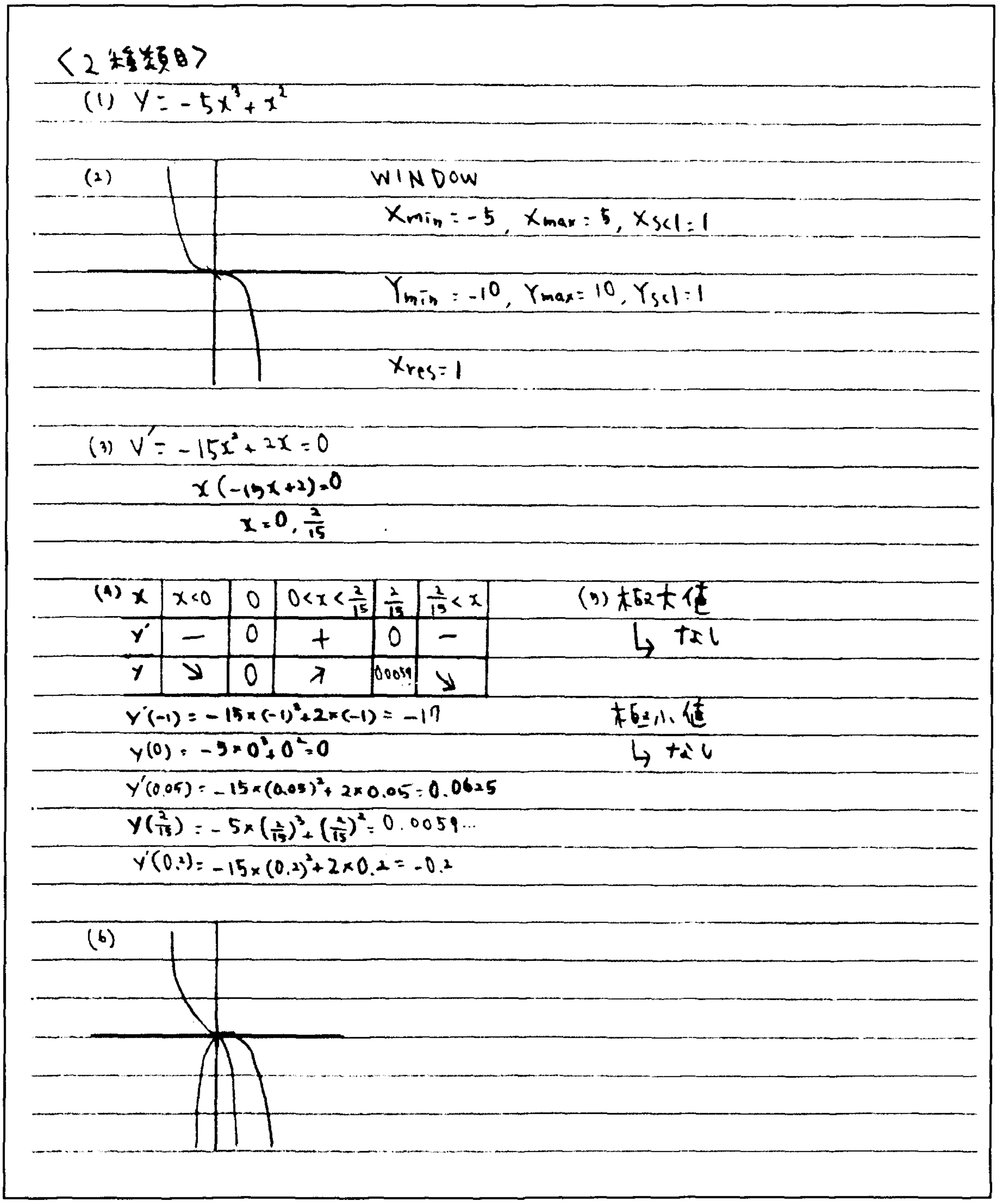


図 3-3-22. 増減表の符号の間違いによるグラフの誤認識

3) 正しい増減表に反するグラフの誤認識（１名）

図 3-3-23 の生徒は，３次関数 $y = -5x^3 + x^2$ のグラフを $-5 \leq x \leq 5, -10 \leq y \leq 10$ の範囲で描いたところ，グラフには極値が存在しないと誤って認識したようである．さらに，このことを確認・検証するために増減表を作成したが，正しい増減表を作成し，かつ，関数の増減が増加→減少→増加と記述したにも関わらず，極値が存在しないと判断している．増減表の下に記述してある計算結果を見ると，増減表を作成する手続きと計算に間違いがないことから，この生徒は，増減表の結果よりも，グラフ電卓に表示された視覚的な判断を優先して極値が存在しないと判断したと

考えられる．このように不適切な Window 設定によるグラフの誤表示に気づかなかったのは，グラフ電卓を使ってグラフを観察する外的活動と，それを増減表で確認・検証する内的活動との相互作用を行なわなかったことに原因があると思われる．



〈2 種類目〉

(1) $y = -5x^3 + x^2$

(2)

WINDOW

Xmin = -5, Xmax = 5, Xscl = 1

Ymin = -10, Ymax = 10, Yscl = 1

Xres = 1

(3) $y' = -15x^2 + 2x = 0$

$x(-15x+2) = 0$

$x = 0, \frac{2}{15}$

(4)

x	$x<0$	0	$0<x<\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}<x$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	0.0059	↘

$y'(-1) = -15\times(-1)^2 + 2\times(-1) = -17$

$y(0) = -5\times 0^3 + 0^2 = 0$

$y'(0.05) = -15\times(0.05)^2 + 2\times 0.05 = 0.0625$

$y(\frac{2}{15}) = -5\times(\frac{2}{15})^3 + (\frac{2}{15})^2 = 0.0059\cdots$

$y'(0.2) = -15\times(0.2)^2 + 2\times 0.2 = -0.2$

(5) 極大値

↳ なし

極小値

↳ なし

(6)

図 3-3-23. 正しい増減表に反するグラフの誤認識

4) ズームによるグラフの誤認識の回避（１名）

図 3-3-24 の生徒は，不適切な Window 設定によって，３次関数のグラフの一部が x 軸と平行になるグラフを観察した．この生徒のグラフを分類する同定基準は「2D：実験事例を視覚的に分類」であり，x 軸と平行になるグラフは，それまでに観察した２種類のタイプと異なることから，ズーム機能を使って確認・検証をした．その結果，グラフは極値を持つことが観察でき，不適切な Window 設定によるグラフの誤認識を回避したと思われる．

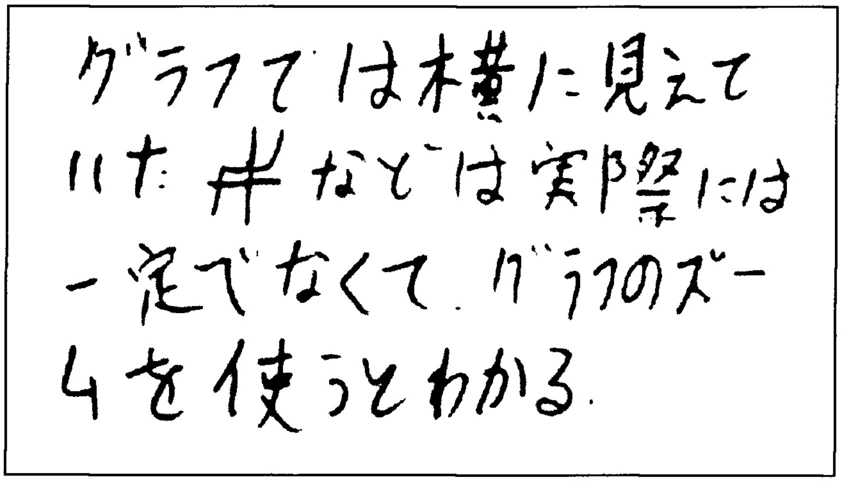

グラフでは横に見えていた # などは実際には一定でなくて．グラフのズームを使うとわかる．

図 3-3-24．ズーム機能によるグラフの誤認識の回避

９．まとめと課題

本研究では，微分の単元のまとめとして，３次関数のグラフの種類を調べる課題を通して，増減表と極値の理解の定着を図るとともに，３次関数のグラフの種類や性質を生徒が主体的に発見し，数学的に検証することを数学的活動の目的とした．数学的活動では，３次関数の関数族をグラフ的・数値的に，かつ，代数的に探究することを目的にグラフ電卓を活用した．

その結果，以下のことが明らかになった．

(1) ３次関数のグラフの種類を分類する本課題では，グラフ電卓に表示された複数のグラフを観察・実験することにより，生徒たちは分類の同定基準を直観的・帰納的に類推することができた．さらに，その同定基準をグラフ電卓で具体的に実験・検証し，最終的には生徒自らが既習事項を関連づけながら数学的に検証したことが分かった．

(2)生徒達は，外的な数学的活動と内的な数学的活動を相互に関連づけながら，自分で設定した同定基準を確認・検証したことが分かった．このように生徒が外的な数学的活動と内的な数学的活動を相互に関連づけた数学的活動を行ったのは，生徒とグ

ラフ電卓とのより良いパートナーシップによって，生徒がグラフ電卓と何度も対話を繰り返しながら自らの課題を解決した結果であると考える．しかし，グラフ電卓の即時性・簡易性が逆に自由度を増したことにより，代数計算が複雑になり計算間違いをした生徒が多かった事実も明らかになった．

(3)生徒達は，本課題を解決するために，既習事項を活用することで原問題を変形したり，４つの係数を効果的に変更する工夫をしながら数学的活動を行っていた．その反面，視覚的な分類のみの生徒や，同定基準がない生徒も多く，グラフ電卓に表示されたグラフの観察から得られた仮説を数学的に検証する態度を育成する必要性があることが分かった．

(4)不適切なWindow設定によるグラフの誤表示によって，誤った同定基準を設定した事例が生徒のレポートから明らかになった．これらの生徒は，グラフ電卓に表示されたグラフを観察する外的な数学的活動と，その結果を増減表で確認・検証する内的な数学的活動とを相互に関連づける活動を行わなかったことが原因であると考えられる．

以上のことから，３次関数のグラフの種類を調べる数学的活動では，生徒がグラフ電卓をパートナーとして積極的に活用することにより，生徒は多様な分類基準を設定し，かつ，既習事項を活用しながら数学的に検証したことが分かった．このことから，本教材は生徒が主体的に行う創造的な数学的活動であることが明らかになった．その反面，代数計算が複雑になったことによる計算ミス，グラフ電卓の誤表示による生徒の誤解，視覚的な観察で終わってしまう生徒の活動，など今後解決すべき課題も明らかになった．

引用文献・参考文献

1) Banchoff T. F. (1991). "Computer Laboratory Magnification of Idiosyncracies" . In Leinbach L. C. (Ed.) . The Laboratory Approach to Teaching Calculus. MAA Notes Vol.20. pp.1-7.

2) Demana F. and Waits B. K. (1988). "Pitfalls in Graphical Computation, or Why a Single Graph Isn't Enough" . The College Mathematics Journal. 19(2) . pp.177-183.

3) Dion G. (1990). "The Graphics Calculator: A Tool for Critical Thinking" . Mathematics Teacher. pp.564-571.

4) Dick T. P. (1992). "Super Calculators: Implications for the Calculus Curriculum, Instruction, and Assessment" . In Fey J.T. (Ed.) . 1992 Yearbook: Calculators in mathematics education. NCTM. pp. 145-157.

5) Donley H. E. and Elizabeth A. G. (1993). "Hidden Behaviors in Graphs" . Mathematics teacher. Vol.86. No.6. pp.466-468.

6) Fey J.T. (1987). 数学教育とコンピュータ. 成嶋弘監訳. 東海大学出版会.

7) Goldenberg E. P. (1989). "Mathematics, Metaphors, and Human Factors: Mathematical, Technical, and Pedagogical Challenges in the Educational Use of Graphical Representation of Functions" . Journal of Mathematical Behavior. 7. pp.135-173.

8) Hansen W. (1994). "Using Graphical Misrepresentation to Stimulate Student Interest" . Mathematics teacher. Vol.87. No.3. pp.202-205.

9) Hector J. H. (1992). "Graphical Insight into Elementary Functions" . In Fey J.T. (Ed.) . 1992 Yearbook: Calculators in mathematics education. NCTM. pp. 131-137.

10) 一松信 監修 (1995). グラフ電卓を数学に –活用の以後と教材集–. 教育社. pp.151-153.

11) 磯田正美 (1997). 「数学内の関連づけを促す実験・観察アプローチ –表現変更型推論による仮説検証型探究を通して–」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」. 明治図書. pp.35-48.

12) 片岡啓 (1996). 「高校「微分法の応用」におけるグラフ電卓の活用」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第78巻. 第7号. pp.14-19.

13) 加藤達也 (1994). グラフ電卓を用いたラボラトリーアプローチについての一考察 –高校数学の解析分野を中心にした教材開発–. 筑波大学大学院修士論文. pp.106-138.

14) 公庄庸三(1999).「 M．T．Tの実践報告」. Teachers Teaching with Technology Japan. Vol.3. pp.174-179.

15) Krumpe N. and Keiser J.W. (2003). "Getting to Know a Calculator's Numerical Limitations" . Mathematics Teacher. Vol.96. No.2. pp.138-140.

16) Leinbach L. C. (1991). "INTRODUCTION: The Laboratory Approach to Teaching Calculus" . In Leinbach L. C. (Ed.) . The Laboratory Approach to Teaching Calculus. MAA Notes Vol.20. pp.ⅶ-ⅷ.

17) 永井政義 (1997).「２次関数をたばねて観察してみると -グラフ電卓による関数族の探究-」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」. 明治図書. pp.130-138.

18) Polya G. (1954). いかにして問題をとくか. 柿内賢信訳. 丸善.

19) Polya G. (1959). 帰納と類比. 柴垣和三雄訳. 丸善.

20) 佐伯昭彦, 黒木伸明 (2004).「グラフ電卓のグラフ的誤表示の原因に関する生徒の分析方法」. 日本科学教育学会第 28 回年会論文集, Vol.28. pp.377-378.

21) 斎藤斉, 高遠節夫 他 (2003). 新訂 微分積分Ⅰ. 大日本図書. pp.38-56.

22) 坂本正彦 (1997).「実導関数の定義の必然性を探ると -プログラミングで微分の理解を深める-」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」. 明治図書, pp.156-164.

23) 島田茂 (1995). 新訂 算数・数学科のオープンエンドアプローチ -授業改善への新しい提案-. 東洋館出版社. p.15.

24) 田代嘉宏, 難波完爾 編 (2000). 新編 高専の数学２（第２版). 森北出版. pp.40-49.

25) 寺田文行 編 (1998). 高等学校 数学Ⅱ. 桐原書店. p.136.

26) 梅野善雄 (2004).「３次・４次関数に関する高専１年生の発見」. Teachers Teaching with Technology Japan. Vol.8. pp.160-165.

27) Ward (1998). "Graphing Calculator-Associates Strategies Used by and Misconceptions of High School Students" . Paper presented at the Technology and NCTM Standards 2000 Conference.
http://mathforum/technology/papers/papers/ward.html.

28) Williams C.G. (1993). "Looking Over Their Shoulders: Some Difficulties Students Have with Graphing Calculators" . Mathematics and Computer education. 27(3) . pp.198-202.

29) 吉田建二 (1997).「微分の前に多次関数を！ -グラフのイメージが微分の理解を助ける-」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育ー実験・観察

アプローチを取り入れた数学授業の改善ー」．明治図書．pp.148-155