

## 第4章

# 数学と他教科とを関連づけた数学的活動と その実践

## 4. 1 数学と物理とを関連づけた総合学習「数物ハンズオン」の概要

### 1. はじめに

2. 3節では、ハンドヘルド・テクノロジーを活用した数学的モデリングの実践研究が、我が国では1996年から行われたことを先行研究から明らかにした<sup>1</sup>。さらに、これらの先行研究では、数学的モデリング過程の適材適所でハンドヘルド・テクノロジーを適切に活用し、個々の生徒及びクラス全体が積極的に数学的活動を行っていることが分かった。このことから、我が国における実践研究では、数学的モデリングに関する生徒の課題とテクノロジー活用の課題<sup>2</sup>をある程度克服していると結論づけた。しかし、これらの実践研究は、長期的な実践が少なく、しかも、通常の学校教育で実践されるまでに至っていないことから、数学的モデリングに関するカリキュラムの課題と教師の課題は、今後克服すべき課題であることを指摘した。

ここでは、筆者が平成8年から金沢工業高等専門学校で実施している数学と物理とを関連づけた総合学習「数物ハンズオン」の概要について述べる。「数物ハンズオン」では、各種センサー、データ収集機〔CBL: Calculator-Based Laboratory〕およびグラフ電卓で身近な物理現象データを収集し、それを数学的に解析し、最終的には、解析した数学的モデルの物理的意味の解釈、さらに数学的モデルの検証・評価を行うことを実践の目的とした。この総合学習は、2年間で6つの物理現象のテーマを扱っており、2年間のカリキュラムでは現象の定式化（数学的モデルの作成）、解釈・評価、より良いモデル化に関する能力を段階的に育成するようにテーマ及び教材が構成されている。これにより、身近に生じる実現象が授業で学習する数学や物理学に深く関係していることの実感と興味を増大させ、勉学への動機づけと基礎学力の定着を図っている（佐伯他，1998；佐伯他，1999）。

<sup>1</sup> 2. 3節（pp.108-113）を参照。

<sup>2</sup> Blum and Niss（1989）とBlum（1991）は、テクノロジー活用の課題とリスクとして、単なるボタンプレッシングに置き換えてしまう可能性と、現象を熟考する本来の活動がテクノロジーに集中することで阻止される可能性を指摘している。詳しくは2. 3節（pp.101-102）参照。

## 2. 数学的モデリングを扱った総合学習の必要性

国際教育到達度評価学会（IEA：The International Association for the Evaluation of Educational Achievement）が1999年に報告したTIMSS-R（The Third International Mathematics and Science Study – Repeat）調査によると、我が国の中学生における数学問題の平均正答率は、前回（1995年）の調査結果と同様に上位であった。これに対し、「数学は生活の中で大切」「将来、数学または科学を使う仕事がしたい」といった数学に対する意識は、前回と同様に低い結果であった（国立教育政策研究所，2001）。また、若者の「科学技術離れ」の現象は、将来の科学技術系の人材不足が予測され、科学技術立国としての大きな社会的問題として取り上げられている（黒杭，2002）。

現実の現象を理解するために、観察・実験で得られた情報をもとに現象を数学的モデルで解析・評価、さらには、未来を予測する科学的な手法は、プトレマイオスの天動説に始まったと言われている（丹羽，1999）。電気工学科と機械工学科の技術者を養成する金沢工業高等専門学校では、専門教科の授業や卒業研究において、実験などによる実現象データを数学で解析し問題解決することは必須である。このため、数学的モデルを扱った科学的手法を授業で経験することは、数学の有用性・実用性を理解し、数学を専門教科の中で積極的に活用する能力を身に付けるために必要であると考えた。

数学と物理はモノ造りと工学実験の基礎となることから、筆者を含む研究グループが平成5年度より、数学と物理とを関連させた総合学習の調査研究を行った。その結果、平成7年度に数学と物理とを関連させた実験・観察型授業「数物ハンズオン」の基本方針が決定した。

- 1) 数学と物理で学習する内容を相互に横断的・総合的に関連させた新たな授業を行う（図4-1-1）。
- 2) 実験・観察による生徒の主体的な数学的活動を重視する。
- 3) 実験・観察には簡易なテクノロジーを活用する。
- 4) テストによる評価はしない。

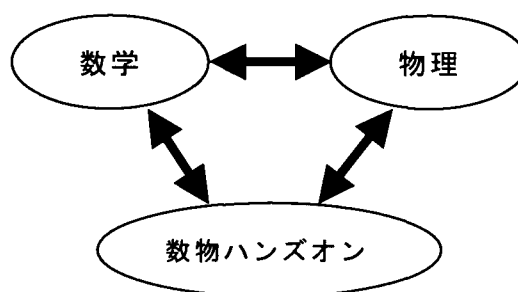


図 4-1-1. 数物ハンズオンと授業の関連

この基本方針は、平成8年に中央教育審議会（1996）の「第1次答申」で提案された「生きる力」を育てるための横断的・総合的な学習と基本的に同じ考えであり、その答申を引き受けた教育課程審議会（1998）は、「審議のまとめ」でその名称を「総合

的な学習の時間」として具体的な提案を行った。この事実に対して、我々の「数物ハンズオン」は平成8年に既に総合学習を実践していたことになる。

### 3. 「数物ハンズオン」の目的と達成目標

#### (1) 目的

「数物ハンズオン」では、生徒が主体となって身近な物理現象データをハンドヘルド・テクノロジーで収集・解析し、そのプロセスと結果から数学・物理の関連について興味と理解を得ることを目的とする。

#### (2) 達成目標

本総合学習を通して、生徒は以下の能力・技能を習得することを達成目標とする。

- 1) 実験を通して身近な自然現象を体験する。
- 2) テクノロジーを積極的に活用する。
- 3) 自分たちで実験を設計し実行する。
- 4) 実験結果を既習の数学と物理を使って解析する。
- 5) 自分たちの問題をグループ活動で解決し、まとめ、クラス全体に報告する。

### 4. 「数物ハンズオン」の実施方法

- 1) 授業形態：約50人クラスで3～4人によるグループ活動
- 2) 対象学年：金沢工業高等専門学校，1年生と2年生
- 3) 授業者：佐伯昭彦，氏家亮子，槻橋正見<sup>3</sup>（ティーム・ティーチング〔主：1人／副：2人〕）
- 4) 実施時間：年間3～4テーマ，1テーマ3週間（45分×6時間）
- 5) 使用機器：グラフ電卓(TI-83 Plus)，データ収集機(CBL)，各種センサー

図4-1-2に「数物ハンズオン」で使用している実験装置の一例を示す。データ収集機，グラフ電卓と各種センサー（距離，音，温度，電流・電圧など）は，手のひらサイズで持ち運びが容易であり，しかも，操作が簡単である。さらに，安価であるため，少人数のグループで1台ずつの実験環境を整えることができ，生徒主体による実験が可能である。図4-1-2に示すように，データ収集機とセンサーで得られた実験データは，グラフ電卓のリストに格納され時系列のグラフとして表示されるため，生徒は得られた実験データを加工して数学的に解析し，最終的には，解析した数学的モデルの物理的意味の解釈を行うことができる。このように，これらのハンドヘルド・テクノロジーを活用することにより，実験データの収集

<sup>3</sup> 槻橋は，平成14年より金沢工業大学・工学基礎教育センター・教授に就任。現在に至る。

から解析・考察までの一連の探究活動が容易に行うことが可能となった。(佐伯他, 1997; 梅野, 2002).

筆者らは, これらのハンドヘルド・テクノロジーが, ①「数物ハンズオン」の目的を補助する道具として適している, ②実験操作が容易であることから実験の経験が少ない生徒にとって適している, といった理由で「数物ハンズオン」の実験装置として採用した.

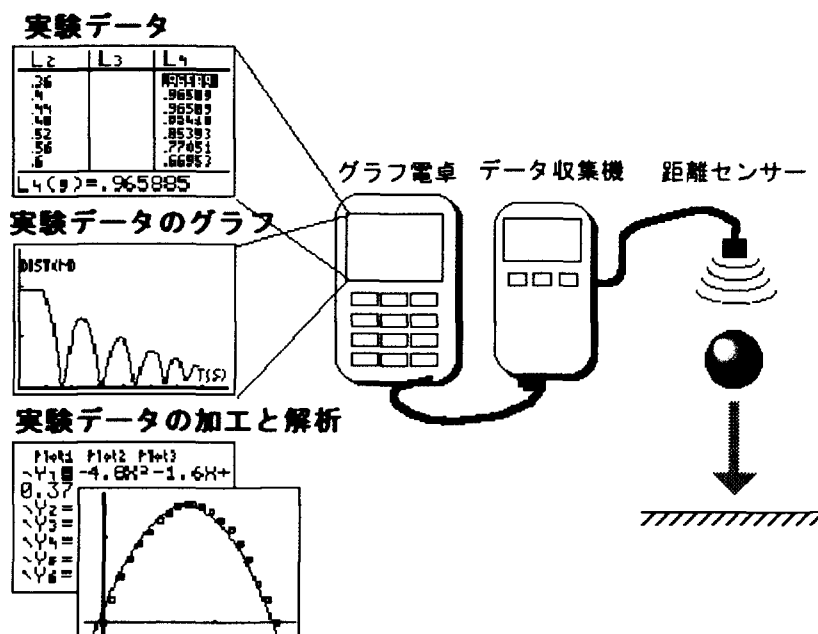


図 4-1-2. 実験装置例 (ボールの実験)

## 5. 「数物ハンズオン」授業の設計視点

### (1) カリキュラムに位置づけられたテーマ構成

「数物ハンズオン」は, 数学と物理の授業で学習する内容を相互に横断的・総合的に関連させた実験・観察型の授業であり, 金沢工業高等専門学校のカリキュラムに位置づけられた教科「創造設計 I・II」<sup>4</sup>の一部として開設された. 表 4-1-1 は, 2年間で実施される 7つのテーマ内容と通常の数学・物理授業で学習する項目の関連を示している.

「数物ハンズオン」を従来の数学と物理の教科と分離した理由を以下に列記する.

- 1) 生徒の主体性による実験・観察を行うには, ゆとりのある時間が必要である.

<sup>4</sup> 「創造設計 I・II」は, 工学への動機づけと基礎理論の定着を目的に, モノ造りと工学的実験を取り入れた教科で平成 8 年より実施された. この科目には, 「数学・物理系」「電気工学系」「機械工学系」のテーマが 3 週間のローテーションで実施され, 1 年生と 2 年生を対象とした必修教科である. 筆者は, 「数学・物理系」である「数物ハンズオン」の授業設計, 教材開発, および, 授業の実施と評価を担当した.

- 2) 松宮他(1995)の実践と同様に、それぞれの授業が相互に関連できるようにカリキュラムを構成する。つまり、現実世界を取り扱った「数物ハンズオン」の数学的活動において、数学や物理で学習した既習事項を活用しながら問題解決を行うことができる。これに対して、論理的抽象的な数学・物理を学習する普通授業に「数物ハンズオン」で実施した実験事例を取り扱うことができるため、「数物ハンズオン」と数学・物理授業における相互の関連づけが可能である。
- 3) 上記 2)により、通常の数学授業で実験・観察の時間を取り扱う必要がないため、従来教えてきた数学と物理の内容及び時間数を削減するといったマイナスの影響がない。

表 4-1-1. 「数物ハンズオン」と数学・物理授業との関連

1年生のテーマ

学期	数物ハンズオン	数学	物理
1学期	面白い曲線を作ってみよう	関数の概念	速度と速さ
2学期	バウンドするボールの高さの変化を調べよう	2次関数・指数関数	鉛直落下・はねかえりの係数
3学期	君は音を見たことがあるか	三角関数・指数関数	音・波・音階

2年生のテーマ

学期	数物ハンズオン	数学	物理
1学期	振り子の振れる様子を調べてみよう	三角関数・無理関数	単振り子・単振動
2学期	充電・放電の様子を調べてみよう	指数関数	コンデンサー
3学期	未来を予測しよう	回帰分析	なし
	みそ汁の冷める変化を調べてみよう	指数関数	なし

(2) 数学的モデリング過程の能力育成を考慮したテーマ構成

三輪(1983)は、数学的モデリングの教育的問題点の一つとして、定式化、解釈・評価、より良いモデル化は、これまでの学校教育で教えることのなかった高度な技能が必要であることを指摘した。それ以来、数学的モデリングに関する実践および研究が行われているが、この問題点を解決するには至っていないのが現状である。池田(1999)は、数学的モデリング過程を経験していない大学生を対象とした調査において、数学的モデリング過程を促進する考え方は、中・高等学校での純粋数学の指導によって自動的に育成されない結果を明らかにしている。

このため、「数物ハンズオン」では、定式化(数学的モデルの作成)、解釈・評価、より良いモデル化の能力について段階を追って徐々に育成するようにテーマ及び教材を構成した(表 4-1-2)。表 4-1-2 の右側の欄は、数学的モデリング過程の能力を①数学的モデルの作成、②数学的モデルの解釈、③数学的モデルの評価、④より良いモデル化、の4つに分類されており、各学期・各学年と進むにつれて数学的モデリング過

#### 4. 1 数学と物理とを関連づけた総合学習「数物ハンズオン」の概要

程の能力が徐々に習得できるように教材内容を構成した。なお、欄内の●印はワークブックに従って行われる生徒主体の探究活動を示し、○印は教師による指導、または、教師の補助によってクラス全体が議論をしながら結論を導いていく活動を意味する。一方、最後のテーマである「お湯の冷め方」の欄の※印は、実験結果の解析方法が自由な活動を意味し、①数学的モデルの作成以降の活動は、生徒自身の判断によって行われるものである。

表 4-1-2 数学的モデリング過程の能力を考慮したテーマ構成

	学期	数物ハンズオン	実験データの収集	数学的モデルの作成	数学的モデルの解釈	数学的モデルの評価	より良いモデル化
1 年次	1学期	面白い曲線を作ってみよう		●			
	2学期	バウンドするボールの高さの変化を調べよう	●	●	○		
	3学期	君は音を見たことがあるか	●	●	○		
2 年次	1学期	振り子の振れる様子を調べてみよう	●	●	●	●	
	2学期	充電・放電の様子を調べてみよう	●	●	●	●	
	3学期	未来を予測しよう		●	●	●	●
		みそ汁の冷める変化を調べてみよう	●	※	※	※	※

#### (3) 「数物ハンズオン」の特徴

##### a. 現実性を持ったテーマ

各テーマは、松宮他（1995）が提唱する「現実性をもつ課題の総合学習」の条件を参考に設計されている。

- 1) 身近な物理現象を取り扱う [現実性]
- 2) 実験の解析の過程において、数学や物理の既習事項を横断的・総合的に活用する [総合性]
- 3) 実験のデータ収集から解析の過程では、生徒がグラフ電卓・データ収集機・センサー等のテクノロジーを用いて主体的に実験・探求する [実践性]
- 4) 1テーマを6時間で学習する [一連性]

##### b. 科学リテラシーの育成

中学校で実験を経験してきた生徒が少ないことから、探究の仕方、問題解決の仕方、

発表の仕方などの科学リテラシーを習得している生徒は多くはない。この為、「数物ハンズオン」では以下の3点を重視している。

### 1) 実験データ収集前の予想の重要性

実験の目的や内容を明確にする意味で実験データ収集前の予想は重要である。さらに、我々人間は、学校で自然科学を学習する前から、物理現象に対して自分なりの誤った知識を経験的に構成していることがあり、こういった素朴概念 (Osborne R. & Freyberg P., 1988 ; 鈴木他, 1989) を逆利用することも大切である。例えば、実験データ収集前の予想が実験結果と異なった場合、予想が違ったことに対する疑問を生徒が持てば、実験・観察への動機づけと興味を持つ可能性が高くなる。

### 2) 多角的な観察による数学的モデリング

図4-1-3に示すように、テーマ「ボールの落下実験」では、バウンドの一つの山を2次関数でモデル化し、さらに、バウンドの各頂点の変化を指数関数でモデル化するように、各テーマにおける物理現象を多角的に観察しモデル化を行う。

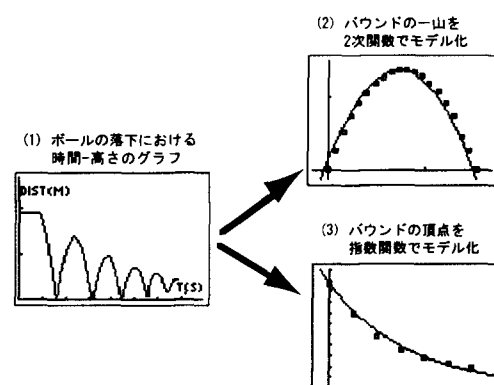


図 4-1-3. 多角的な観察

### 3) 実験・観察技術とプレゼンテーション能力の育成

1年生のテーマでは、実験用のワークブックに従って授業が進められ、そこでは、各テーマの実験・観察の仕方、データ収集方法、データの読み方、解析方法等の問題解決のプロセスを習得する。次に、2年生のテーマになると、実験・観察の主導権及び主体性を徐々に生徒に移し、最後のテーマでは、実験の企画から報告書作成及びプレゼンテーションに至る全ての活動が、生徒の主体によって行われる。この時の教師の役割は、生徒の主体的な活動を促進するファシリテーターとなる。この様に2年間で6テーマを通じて、実験・観察技術とプレゼンテーション能力を徐々に習得していく様に各テーマが構成されている。

## C. ワークブックの構成

我が国には、テクノロジーを活用した数学と物理の総合学習用の教科書等がないため、参考文献に挙げたようなアメリカの教科書や実践例を参考に、独自のワークブックを作成した (Brueningsen C., Bower B., Antinone L. and Brueningsen E., 1994 ; Johnny W. L., Maurice B. and et al., 1996). 本ワークブックの特徴は、実験の目的、手順、解析法等のほか「数学 Note」「物理 Note」「数物 Note」という項目を設け、実験結果の考察・探究の際、色々な視点から考察が行えるように配慮した。



#### 4. 1 数学と物理とを関連づけた総合学習「数物ハンズオン」の概要

- ・「数学 Note」：テーマで使用する関数の定義，特徴をまとめる。
- ・「物理 Note」：テーマで使用する物理の授業で学習した内容をまとめる。
- ・「数物 Note」：実験で得られた結果と考察を，数学と物理の両分野の観点から関連させてまとめる。

また，生徒が授業中に行う活動は以下のように分類されている。

- ・「練習」：実験装置の操作方法，実験データの解析方法が未学習または困難な場合，教師の指導のもとに生徒が一斉に操作方法や解析方法を練習する活動。
- ・「課題」：授業時間内に終了すべき基本課題。
- ・「挑戦」：上記の「課題」を終えたグループが行う応用課題。この応用課題を行うことにより，より発展的な理解が得られる。また，「課題」の実験で得られた数学的モデルや考察を再検証することにもなる。

#### d. 評価方法

試験による評価は行わず，以下の項目において総合的に評価を行う。

- 1) 生徒の授業参加態度。
- 2) 実験課題数(授業時間内に終了すべき基本課題以外に応用課題が準備されている)。
- 3) 報告書の内容。

## 6. テーマの概要(例)

ここでは，「数物ハンズオン」で実施した7つのテーマの中から，1年生の3学期に実施する音の実験「君は音を見たことがあるか！」の授業展開について，以下に紹介する<sup>5</sup>。

### (1) テーマの目的

音の現象をグラフと数式で調べ，ペットボトル楽器を作る。さらに，求めた数学的モデルの物理的意味を考察する。

### (2) テーマのねらい

- 1) 音の現象における振動数・周期・振幅の特徴を実験結果から探究し，それぞれの値の求め方を習得する。
- 2) 音階と振動数の関係から楽器の仕組みを調べる。さらに，ペットボトルで鳴らした音を三角関数でモデル化し，振動数・周期・振幅と数学的モデルの関係を理解する。
- 3) ペットボトルでド，レ，ミ，ソの音を作り「メリーさんの羊」の演奏会を行う。

<sup>5</sup> 音の実験に関しては，巻末の教材ワークシート(pp.258-260)を参照。また，この他のテーマに関する授業の概要については，氏家他(1997)と佐伯(2000)を参照。

(3) 各週における授業の概要

a. 第1週目：「音の強弱や高低を数値で表してみよう！！」（45分×2）

- ・準備：振動数の定義について学び，人間と犬について，出せる音と聞こえる音の振動数について比較する．
- ・課題1：CBLと音センサーを使って自分の声を収集してみる（図4-1-4）．大きな声，小さな声，高い声，低い声を収集し，振動数（周期）と振幅の関係を視覚的に調べる（図4-1-5）．
- ・課題2：プログラムに組み込んである3つのサンプルデータを使って，振幅，周期，振動数の値を計算で求める．それぞれの値を比較し，どのデータが一番大きな音であるか，また，どのデータが一番高い音であるかを調べる．

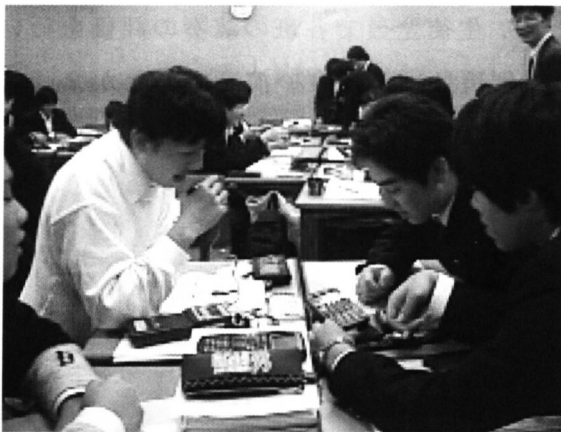


図4-1-4. 自分の声を見る

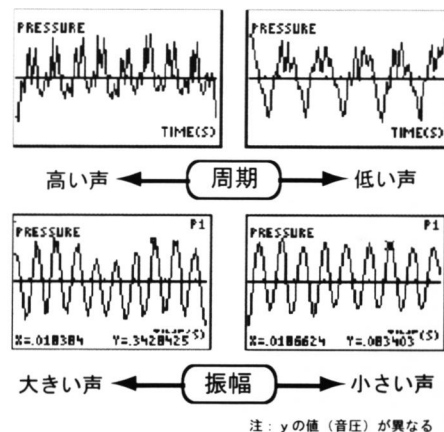


図4-1-5. 声と周期・振幅の関係

b. 第2週目：「楽器や音に潜む数学」（45分×2）

- ・課題1：音階と振動数の関係を調べる．音階が一つ上がるごとに振動数が何倍になっているか，また，オクターブと振動数について，これらが指数関数に関係することを理解する（室岡，1997）．さらに，ギターやピアノの弦の長さも同様の関係があることを理解する（Savage，1979）．
- ・課題2：プログラムに組み込んであるサンプルデータを使って，振幅，周期，振動数の値を計算で求め，三角関数  $y = A \sin\{2\pi F(x - D)\}$  でモデル化する方法を習得する（図4-1-6）．次に，ペットボトルを吹いた音のデータ（空と水を入れた2種類のデータ）をCBLと音センサーを用いて収集し，収集したデータを三角関数でモデル化する．
- ・挑戦：収集データが指定された振動数（330Hzと392Hz）になるようにペットボトルに水を入れ，そのデータを三角関数でモデル化する．

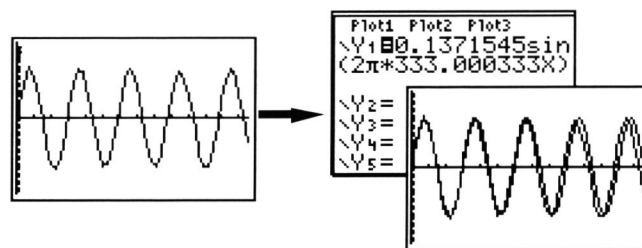


図 4-1-6. ボールのバウンドの解析方法

c. 第3週目：「手作り楽器の演奏会！！」（45分×2）

- ・課題：各班4人のグループにおいて、ペットボトルに水を入れてド、レ、ミ、ソのペットボトル楽器を作成する。CBLと音センサーで収集した音データをもとに4つの振動数を算出する。楽器作りが終了したら、「メリーさんの羊」の練習をする（図4-1-7）。
- ・演奏会：全ての班が全員の前で演奏を行う。生徒全員で各班の演奏の評価を行い、上位3チームを選出する（図4-1-8）。評価項目は、①良い演奏でしたか？ ②音階の調律は良いですか？ ③演奏態度は良いですか？ である。



図 4-1-7. 楽器作りの様子



図 4-1-8. 演奏会の様子

## 7. まとめ

ここでは、筆者が平成8年から金沢工業高等専門学校で実施している数学と物理とを関連づけた総合学習「数物ハンズオン」の概要について述べた。教材の開発・改良、授業の実施を行った教師の効果は以下の通りである。

- 1) これまで紙の上での知識として理解していた実現象と数学の関連性を、教材開発の段階における具体的な実験を通して改めて体で実感・理解できた。
- 2) 普段の授業においても実現象の話題を取り上げるなど指導に幅ができた。
- 3) 「数物ハンズオン」授業では、普段の授業では見られない生徒の発言、行動、考え

方に接する機会があり、生徒の意外な考え方に教えられるなど、生徒とのコミュニケーションが増えた。

なお、「数物ハンズオン」における生徒の効果については、次節以降に記述する。

### 引用文献・参考文献

- 1) Brueningsen C., Bower B., Antinone L. and Brueningsen E. (1994). Real-World Math with the CBL System ~ 25 Activities Using the CBL and TI-82 ~. Texas Instruments.
- 2) Blum W. and Niss M. (1989) "Mathematical Problem Solving, Modelling, applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction". In Blum W., Niss M. and Huntley I. (eds.) . Modelling, Applications and Applied Problem Solving. Ellis Horwood. pp.1-21.
- 3) Blum W. (1991). "Applications and Modelling in Mathematics Teaching – A Review of Arguments and Instructional Aspects". In Niss M., Blum W. and Huntley I. (eds.) . Teaching of Mathematical Modelling and Applications. Ellis Horwood. pp.10-29
- 4) 中央教育審議会 (1996). 21世紀を展望した我が国の教育の在り方について (第1次答申). [http://www.mext.go.jp/b\\_menu/shingi/12/chuuou/toushin/960701.htm](http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/12/chuuou/toushin/960701.htm).
- 5) 池田敏和 (1999). 「数学的モデリングを促進する考え方に関する研究」. 日本数学教育学会誌. 第85巻. 第3号. 数学教育論究. Vol.71・72. pp.3-18.
- 6) Johnny W. L., Maurice B. et al. (1996) . THE SIMMS PROJECT(Teacher's Edition)LEVEL 3 VOLUME 2. Simon & Schuster Custom Publishing.
- 7) 国立教育政策研究所編 (2001). 数学教育・理科教育の国際比較 –第3回国際数学・理科教育調査の第2段階調査報告書–. ぎょうせい.
- 8) 黒杭清治 (2002). 「理科離れについて考える」. 工学教育. 50. 4. pp.27-34.
- 9) 教育課程審議会 (1998). 幼稚園, 小学校, 中学校, 高等学校, 盲学校, 聾学校及び養護学校の教育課程の基準の改善について (審議のまとめ). [http://www.mext.go.jp/b\\_menu/shingi/12/kyouiku/toushin/980601.htm](http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/12/kyouiku/toushin/980601.htm).
- 10) 三輪辰郎 (1983). 「数学教育におけるモデル化についての一考察」. 筑波数学教育研究. 第2巻. pp.117-125.
- 11) 松宮哲夫, 柳本哲 (1995). 総合学習の実践と展開 –現実性をもつ課題から–. 明治図書.
- 12) 丹羽敏雄 (1999). 数学は世界を解明できるか –カオスと予定調和–. 中公新書.
- 13) 室岡和彦 (1997). 音階による指数の探究 –LOGO とグラフ電卓を用いて指数のしくみを探る–. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育 –実験・

#### 4. 1 数学と物理とを関連づけた総合学習「数物ハンズオン」の概要

- 観察アプローチを取り入れた数学授業の改善へ」。明治図書。pp.80-88.
- 14) Osborne R. and Freyberg P. 著，森本信也，堀哲夫訳（1988）。子ども達はいかに科学理論を構成するか-理科の学習論-。東洋館出版社。
  - 15) 佐伯昭彦，磯田正美，清水克彦編著（1997）。テクノロジーを活用した新しい数学教育～実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善へ。明治図書。
  - 16) 佐伯昭彦，氏家亮子（1998）。「数学的モデリングを重視した総合カリキュラム - 身近な物理現象を数学的にモデル化する授業-」。日本数学教育学会誌。数学教育。第 80 巻。第 9 号。pp.10-18.
  - 17) 佐伯昭彦，氏家亮子(1999)。「数学と他教科とを関連づけたクロスカリキュラムの試み」。日本数学教育学会編「算数・数学カリキュラムの改革へ」。産業図書。pp.295-313.
  - 18) 佐伯昭彦（2000）。数学と物理とを関連づけた総合カリキュラムに関する実証的研究～身近な自然現象を取り入れた実験・観察型授業～。平成 10～11 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究（C）：課題番号 10680298，代表：佐伯昭彦）研究成果報告書。
  - 19) Savage S. S. (1979). "Vibes – the Long and Short of It" . In Sharron S. and Reys R. E.(eds.) . Applications in School Mathematics. 1979 Yearbook. NCTM. pp.125-136.
  - 20) 鈴木宏昭他（1989）。教科理解の認知心理学。新曜社。
  - 21) 氏家亮子，佐伯昭彦（1997）。「君は音を見たことがあるか？ -周期現象をデータ収集機で実験・観察する-」。佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育～実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善へ」。明治図書。pp.89-99.
  - 22) 梅野善雄（2002）。「数式処理電卓の応数・応物での利用例案と予想される教育効果」。工学教育。50。1。pp.22-27.

巻末資料 3：教材のワークシート（pp.258-260）参照

## 4. 2 数学的モデルの有用性に関する生徒の意識変容

### 1. はじめに

数学的モデリングを実践する意義の一つとして、生徒が数学を活用して実世界の現象の問題解決することにより、学校数学で学習する数学の有用性を感得することが挙げられる。実際に、池田・浜（1992）、西村（2001）の実践研究では、授業後の生徒の感想内容から有用性を感得したと結論づけている。さらに、大澤（1996）の実践研究では、バトンパスの課題を数学的に解決し、実際にリレーのタイムが縮まったことの達成感から数学の有用性を体感したと結論づけている。これらの研究は、1つの実践後に調査した生徒の意識・態度から結論づけているのに対して、長期間の実践における生徒の数学に対する有用性の意識を調査した研究はこれまでに行われていない。

ここでは、数学的モデル（数式）を活用して実現象の問題を解決することの有用性に関して、2年間の「数物ハンズオン」を学習した生徒個々の意識変容について報告する<sup>1</sup>。調査した結果、実験結果を数式で表すことの有用性に関する生徒の意識は、3テーマ終了時に対して7テーマ終了時の方が向上していたことが分かった。特に、「数式から未来が予測できる」と「数式の物理的意味が分かる」といった内容を記述した生徒が増えていたことが分かった。この結果、数学的モデリングの能力を育成する長期間のカリキュラムによって、数学の有用性に関する生徒の意識を向上させることが可能であることが明らかになった。

### 2. 数式の有用性を感得させる教材開発の視点

実現象を数式で表現する利点を生徒に理解させるには、授業の最終目的が数学的モデルである数式を作成することだけではなく、その数学的モデルを使って如何に問題解決をするかを生徒に経験させることが大切である。このため、「数物ハンズオン」では、次の5つの視点で教材を開発している。

- 1) 数式を使って実験データ以外（未来）を予測する。
- 2) 実験条件と数式とを比較する。

<sup>1</sup> 実際の数学的活動では代数的表現である数式でモデル化を行っており、授業では数学的モデルのことを簡単に「数式」または「モデル式」として表現した。従って、本節では数学的モデルのことを「数式」または「モデル式」として記述した。

4. 2 数学的モデルの有用性に関する生徒の意識変容

- 3) 数式の物理的意味を考察する.
- 4) 数式から実験条件を推測する.
- 5) 実験結果を他人に伝える.

以下に、これらの観点で開発した教材を2年1学期に実施する「単振り子の実験」を参考に紹介する(図4-2-1).

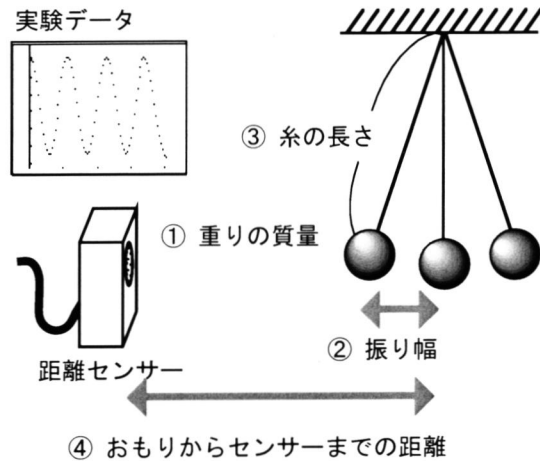


図 4-2-1. 単振り子の実験

(1) 数式を使って実験データ以外(未来)を予測する

「単振り子の実験」の第3週目では、糸の長さとの関係に着目して、解析結果から得られた数式を活用して実験データ以外の値を予測することを行った。図4-2-2は、この実験における探究過程を示している。生徒は実験で得られたデータをグラフ電卓に入力・プロットし、プロットされたデータに一致する数式を定式化、さらに、得られた数式をグラフ的・視覚的に検証する。その後、次のような2つの課題を生徒に与え、生徒自身が算出した数式を利用して課題を解決した。

課題(a)：糸の長さを4 mにしたときの振り子の周期を求めよ。

課題(b)：周期が1.5秒の振り子を作るには糸の長さはどれくらいにすれば良いか？

こういった問題場面を解決するために、身近な実験道具で実験を行い、得られた実験データから算出した数式を活用してデータ以外の値を予測することで、生徒が現象を数式で表現する利点と有用性を理解するきっかけとなることを狙いとしている。

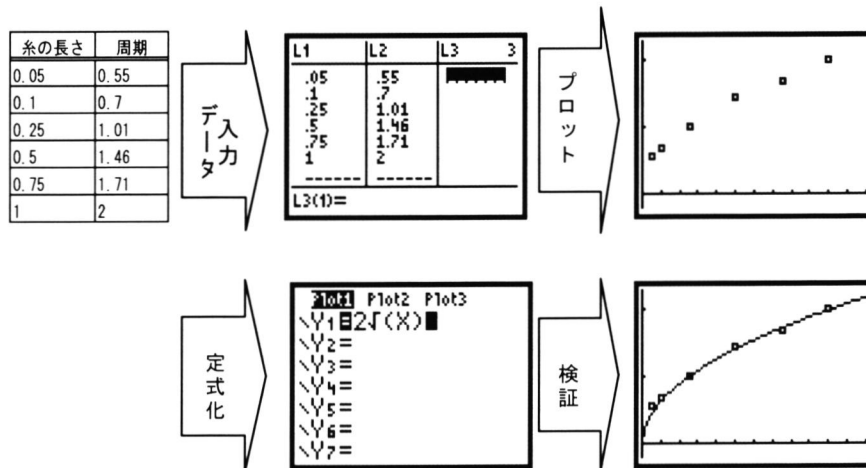


図 4-2-2. 振り子の糸の長さとの関係における解析の流れ

(2) 実験条件と数式とを比較する

ハンドヘルド・テクノロジーを活用すると実験データが瞬時に収集できるのが特徴である。この特徴を利用して、グループ4人の生徒がそれぞれの実験条件を変更して実験を行い、個々の生徒が算出した数式と実験条件の比較を行わせた。図4-2-3の上の部分は、振り子の振り幅を4cmから8cmに変更し、さらに、おもりからセンサーまでの距離を55cmから65cmに変更した場合の実験結果である。これらの実験結果をもとに、実験条件の変更に伴って変化する数式の係数との対応関係、さらに、変化しない数式の係数との不変的關係を考察することは、実現象を関数的に捉える数学的な考え方の育成を狙いとされている。

【班の結果】

班のメンバーがそれぞれ行った実験について、実験条件とモデル式を記録しなさい。  
ただし、糸の長さは1m、おもりは鉄球とする。

担当者名	振り子の振り幅	センサーまでの距離	モデル式(実験データと一致した式)
	4cm	55cm	$y = 5.02 \cos(3.14x) + 55.8$
	8cm	55cm	$y = 10.49 \cos(2.11x) + 54.31$
自分	4cm	65cm	$y = 6.6 \times \cos(3.14x) + 67.09$
	8cm	65cm	$y = 9.75 \times \cos(4.21x) + 66.09$

【考察】

班の実験結果から、各々の係数(A, B, C)の物理的な意味を考えてみなさい。

係数	物理的な意味
(例) Tの値は?	振り子が一往復するのにかった時間
Aの値は?	振り子の振り幅
Bの値は?	分からない♡
Cの値は?	センサーまでの距離

その他、気づいたこと・発見したこと・疑問に思ったことがあったら、書きなさい。

式'にちよとした意味を表していると分かった。  
Bはおもりではないかと考えられる。

図4-2-3. 実験条件と数式との比較と物理的意味の考察

(3) 数式の物理的意味を考察する

4つ実験で得られた数式と実験条件の関係を比較することで、数式の係数における物理的意味を考察させた。図4-2-3の下の部分では、生徒は振り子の振り幅が三角関数  $y = A \cos B(x - p) + C$  の振幅Aと関係していることと、おもりからセンサーまでの距離がY軸方向の平行移動量Cに関係していることを考察している。この生徒は、B



4. 2 数学的モデルの有用性に関する生徒の意識変容

の物理的意味は「分からない」と述べているが、「式にはちゃんとした意味を表していることが分かった. Bはおもりではないかと考えられる.」と実験中に考察したことを記述している.

科学的に法則を発見する場合に、いくつかの具体的な事例から一般に通じる法則を帰納的に推測することは重要である. ここでは、実験で得られた数式と実験条件とを関係づけて物理的意味を考察することにより、生徒はその現象に対する自分たちなりの公式(法則)を作るといった帰納的な推論を行わせている. さらに、生徒が帰納的に算出した公式について、物理の授業で学習した理論と関連づけることで、より確かな知識へと発展させることも授業で行っている.

(4) 数式から実験条件を推測する

上記の実験とは逆に、実験条件ではなく数式を与え、その式で表されるような実験をするにはどのような実験条件を設定すればよいのかという課題を行う. 例えば、「モデル式が  $y = 4 \cos 3.14x + 70$  となるように糸の長さ、振り子の振り幅などの実験条件を設定して実験し、モデル式と同じような結果が得られるかどうかを確かめなさい」の課題では、生徒は糸の長さ等の実験条件を設定し、この設定で行なった実験結果を数式で表現し、与えられた数式と同様な結果が得られるかを検証する(図4-2-4).

この課題は、上記(3)で帰納的な推論で算出した法則を実験で具体的に検証することが目的であり、与えられた数式から逆に実験を振り返るといった活動は、数学・物理の学習内容と実験(現象)との関連を深めるだけでなく、現象を数学的モデルである数式で表現することの有用性を実感させると考える.

**《課題》**

糸の長さ、振り子の実位、おもりなどを覚えて、モデルの式と似たグラフを作ってみなさい。

$Y = 4 \cos 3.14 X + 70 = 4 \cos \pi X + 70$

---

**<実験方法>**  
 実験を始める前に、どのような条件で実験を行うのか、テキストに記録しなさい。(予想)

- ① 糸の長さ
- ② 振り子の実位
- ③ おもりの種類
- ④ 距離センサーから静止したおもりまでの距離

**<実験2・課題の結果>**

- (1) グラフをスケッチしなさい。
- (2) グラフから実数A、B、Cの値を求め、モデル化しなさい。
- (3) グラフ電卓に式を入力し、データと一致するか確かめなさい。
- (4) モデル化した式と、課題の式が同じならば、次の実験に進みなさい。

		$Y = 4 \cos \pi X + 70$
予 想	① 糸の長さは?	100 cm
	② 実位は?	4
	③ おもりは?	20g
	④ 距離センサーから静止したおもりまでの距離	70
実 験 結 果	⑤ スケッチ (TRACEで調べた点の座標を記録しなさい。)	
	⑥ モデル式は?	$y = 6.37 \cos(3.14x) + 72.60$
	⑦ 実験する際に気を付けた点	...

図 4-2-4. 数式から実験条件を推測する活動

(5) 実験結果を他人に伝える

2年間の最後のテーマである「お湯の冷め方」実験では、実験の企画、企画書作成、解析、報告書作成を全て生徒自身の力で実行し、最終的には実験結果のプレゼンテーションをクラス全員が行う。

この実験の解析方法は、各グループの判断によるもので、教師側から特に解析方法を提示しなかったため、生徒達はそれぞれの考えで実験データを解析する。このため、全てのグループのプレゼンテーションが終わった後に、それぞれの解析方法の利点を議論することにより、実験結果を他人に伝える方法として、数式で表した方が簡潔で明確であることを認識させる事が狙いである（図4-2-5）。

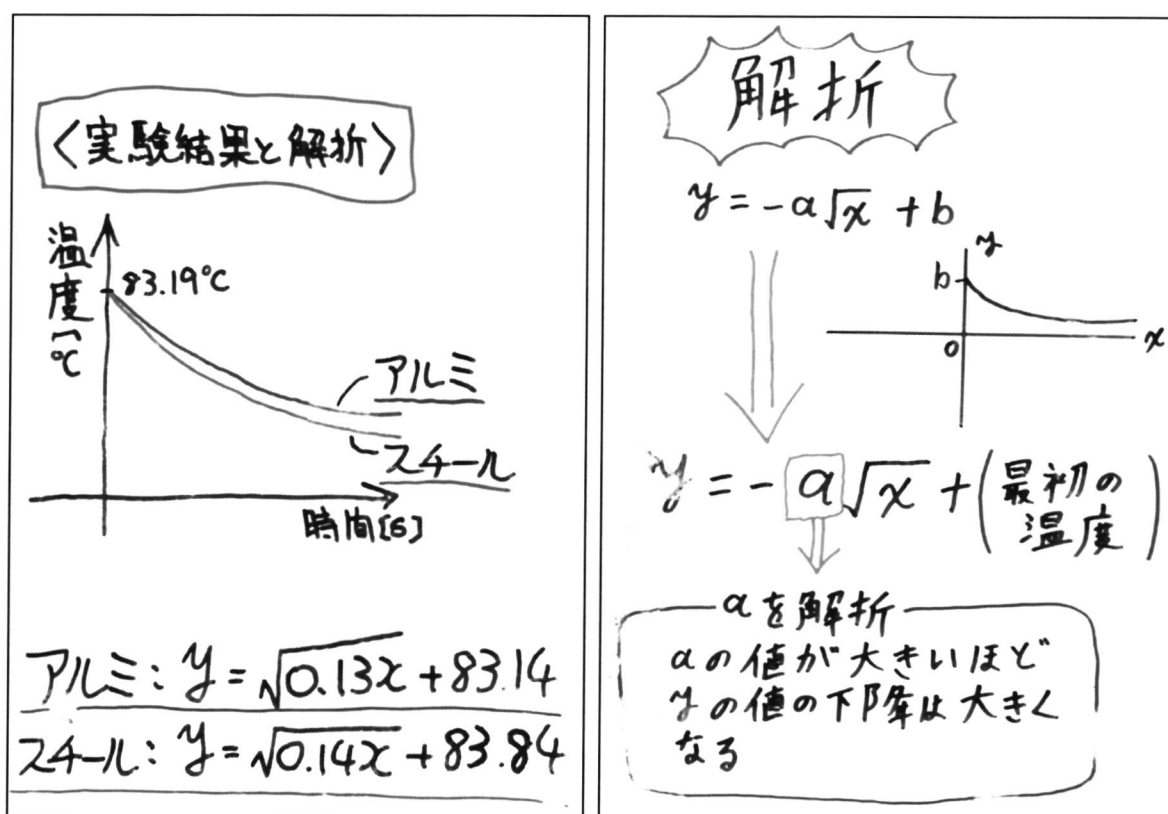


図 4-2-5. 「お湯の冷め方」のプレゼンテーション用 OHP

### 3. 調査の目的

数学的モデリングの過程を2年間かけて繰り返し体験することにより、実験データを代数的表現である数式で表すことの利点に関する生徒個々の意識変容を調べる。

### 4. 調査の方法

- 1) 調査方式：質問紙による記述方式
- 2) 対象学年と人数：平成11年度入学生（電気工学科：約100名）
- 3) 調査時期：A. 3テーマ終了後  
2年次の授業開始時（平成12年4月）  
B. 6テーマ終了後  
3年次の授業開始時（平成13年4月）
- 4) 調査項目：実験結果を数式で解析するとどんな利点があると思いますか。自由に書いて下さい。

### 5. 調査の結果

表4-2-1は、記述形式の回答を「利点あり」、「利点なし」、「わからない」、「無回答」の4つの項目で分類した結果を示している。3テーマ終了時の調査では、実験データを数式で表すことに「利点あり」と答えた生徒が全体の57%であったのに対し、7テーマ終了時では全体の73%と増加していた。これに対して「利点なし」、「わからない」、「無回答」の割合が減った。

表 4-2-1. 数式で表す利点に関する調査結果（1）

	A. 3テーマ終了後	B. 7テーマ終了後
	平成12年4月	平成13年4月
有効回答数	104人	96人
無回答	3人（3%）	1人（1%）
わからない	25人（24%）	16人（17%）
利点なし	17人（16%）	9人（9%）
利点あり	59人（57%）	70人（73%）

表 4-2-2 は、「利点あり」と応えた生徒の記述内容をさらに詳しく分析した結果である。生徒の記述内容において、数式で表す利点の根拠が具体的に記述されていた割合が、3テーマ終了時では全体の 51%であったのに対し、7テーマ終了時では全体の 80%と増加していた。さらに、利点の根拠が記述されていた記述内容を前項で示した教材開発における5つの観点に分類し、分類別の人数を表 4-2-2 の下部に示した。この結果、「実験データ以外を予測」と「物理的意味の考察」に関する内容を記述した生徒が顕著に増えたことが分かった。

表 4-2-2. 数式で表す利点に関する調査結果 (2)

		調査幾期間	
		調査 A	調査 B
特定の根拠なし・不明		29人 (49%)	14人 (20%)
具体的な根拠あり		30人 (51%)	56人 (80%)
利 点 の 根 拠	(1) 実験データ以外を予測	15人	38人
	(2) 実験条件と数式との比較	3人	3人
	(3) 物理的意味の考察	5人	12人
	(4) 数式から実験条件を推測	2人	6人
	(5) 実験結果を他人に伝える	6人	5人
注：一人以利点の根拠を複数回答している場合あり			

## 6. 考察

ここでは、現象を数式で表す利点について生徒が記述した根拠を、教材開発の5つの観点で考察する。

### (1) 数式を使って実験データ以外（未来）を予測する

生徒が記述した内容には、「実験結果を数式で解析すると、実験しない値もある程度予想できる.」、「実験して測定した値以外の値を推測できる.」、「例えば1億年後、・・・、 $0\text{ km}$ の高さ・・・なんて、実験では結果を求められないものを求めることができる。」など、『実験していない値(未来)を予測できる』といった意見が多かった。このように「実験データ以外を予測できる」と記述した生徒は、3テーマ終了時に15人であったのに対し、7テーマ終了時には38人に増えた（表 4-2-2 参照）。

これは、授業内で次の2点を強調しながら指導を行なったためだと考える。

- 1) 実験は、限られた測定時間の中で行われており、決してその現象すべてのデータを収集している訳ではない。
- 2) もしその傾向が今後も続くとしたら、その後の変化の様子は式から判断することができ、かつ、値（予測値）を求めることもできる。

ちなみに、数式から予測するのは「未来」であると答えた生徒が多かったのは、2年間で取り扱った6つの物理現象の実験が、時間に伴って変化するものを対象にしたためと思われる。

得られたデータをもとに数学的モデルである数式を作成しデータの範囲外の値を予測することは、科学的な手法のねらいの一つであり、「数物ハンズオン」の授業において、数学的モデルである数式が重要な役割を果たしていることを生徒に認識させることができたと言える。

#### (2) 実験条件と数式とを比較する

生徒が記述した内容には、「数式で変化のしかたや比較ができるのでいいと思う」という意見があった。

「数物ハンズオン」の授業では、実験条件を変更して実験を行い、実験条件の変更に伴って変化する数式の係数と、変化しない数式の係数を比較することにより、実験条件と数式との対応関係を考察している。しかし、「比較しやすい」と記述した生徒は、3テーマ終了時には3人で、7テーマ終了時には同数の3人であった(表4-2-2参照)。

#### (3) 数式の物理的意味を考察する

生徒が記述した内容には、「法則や公式が発見できる」、「違う条件のもとでも数式の変数を置きかえればだいたいの結果を求めることができる」という意見があった。記述中の「法則・公式」や「数式の変数」は、数学的モデルである数式の物理的意味を意識していると考えられ、このように記述した生徒は、3テーマ終了時には5人であったのに対し、7テーマ終了時には12人に増加した(表4-2-2参照)。

複数の実験結果を数式で解析すると、結果を比較しやすくなる(上記(2))とともに、数式の物理的意味を帰納的に推論する「数物ハンズオン」の活動を通して、数式に示されている物理的意味の関係性を生徒に認識させることができたと言える。

#### (4) 数式から実験条件を推測する

生徒が記述した内容には、「数式がわかればどんな実験をしたかや、どういうグラフになるかがわかる」、「数式を使って解析するとどの数をどの式にあてはめるかで、何かが理解できるようになったかな?」、「結果の裏付けがしやすくなる」といった意見

があった。このように「数式から実験条件を推測する」と記述した生徒は、3テーマ終了時には2人であったのに対し、7テーマ終了時には6人に増加した（表4-2-2参照）。

実験で得られた数式の物理的な意味づけを行い、自分なりに法則・公式を作ることができることにより、次の段階ではそれとは逆に、式が与えられたとき、その式からどのような実験を行なったのか予測することができるようになるといったことを生徒が認識したと言える。

#### (5) 実験結果を他人に伝える

生徒が記述した内容には、「グラフを口で伝えることができる」、「数式を教えるだけなので伝わりやすい」、「数式を用いることで実験結果が分かりやすくなったり、他の実験の時に応用できる。そして相手に説明する時等、より説得させることができる」、「その値を基にデータを再現できるようになるため、どんな人にでも分かるようになる。解析方法を書くとなお良い」といった意見があった。

実際のプレゼンテーションでは、「言葉」「数値（平均や差）」「グラフ」「代数的表現（数式）」等の表現方法による実験結果の報告が行われた。このため、プレゼンテーション後にクラス全体で、それぞれの解析方法の利点を議論した。その結果、実験結果を他人に伝える方法として、数式で表した方が簡潔で明確であることを認識した生徒が増加した結果が得られた。しかし、「実験結果を他人に伝えやすい」と記述した生徒は、3テーマ終了時には6人であったのに対し、7テーマ終了時には5人に減少した（表4-2-2参照）。

## 7. まとめ

本稿では、「数物ハンズオン」の概要と数式（数学的モデル）の有用性に関する生徒の意識変容について報告した。調査の結果から、実験結果を数式で表すことの有用性に関する生徒の意識は、3テーマ終了時に対して7テーマ終了時の方が向上していたことが分かった。特に、「数式から未来が予測できる」と「数式の物理的意味が分かる」といった内容を記述した生徒が顕著に増えていたことが分かった。

ハンドヘルド・テクノロジーの活用は、実験データが容易に収集でき、解析した数学的モデルの検証がグラフ的・視覚的に即座に行える利点がある。このため、予想→実験→解析→検証といった一連の探究過程を繰り返し行うことが可能になった。さらに、グループ内での実験結果を共有することにより、生徒同士の会話や討論を行う活動が増えた事が生徒の意識向上に繋がったと考える。

普段の授業では、「すでにできあがった法則・公式」として教科の内容を学習するこ

とが多いが、生徒が「自らの力で実験・探究した結果から法則・公式を作り検証する」といった学習経験が未来の科学者・技術者を育成するために必要であると考える。

#### 引用文献・参考文献

- 1) 池田敏和, 浜泰一 (1992). 「高等学校数学科における数学的モデリングの事例的研究」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 74 巻. 第 7 号. pp.42-50.
- 2) 西村圭一 (2001). 「数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 83 巻. 第 11 号. pp.2-12.
- 3) 大澤弘典 (1996). 「現実場面に基づく問題解決 -グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第 9 号. pp.16-20.
- 4) 佐伯昭彦 (2002). 生徒個々の数学的モデリング能力に応じた総合学習の教材開発に関する研究 -簡易テクノロジーを活用した数学と理科との総合学習-. 平成 12 -13 年度文部省科学研究費補助金 (基盤研究 (C)) : 課題番号 12680291, 代表 : 佐伯昭彦) 研究成果報告書.
- 5) 佐伯昭彦, 氏家亮子 (2003). 「数学と物理とを統合したクロスカリキュラム型授業の教育効果」. 工学教育. 51 巻 1 号. pp.109-114.

### 4. 3 数学的モデルの妥当性に関する生徒の検討方法

#### － 回帰モデル機能を用いたより良いモデル化 －

##### 1. はじめに

2. 3節では、数学的モデリングにおけるテクノロジーの活用として、①データ収集の補助、②データ解析の補助、③シミュレーションによる実験・探究の補助、の三つの方法があることを紹介した。さらに、ハンドヘルド・テクノロジーの活用の利点の一つとして、回帰モデル機能の活用により、未学習内容の関数が数学的モデルとして取り扱うことができることと、数学が不得手な生徒でも数学的モデリングの活動に参加することができることを示した。しかし、それらの利点に対して、生徒の数学的活動がボタンプレッシングに陥る危険性があることが、今後の研究課題として取り上げられていることも示した<sup>1</sup>。

この課題に対して、数学的モデリング過程の「解釈・評価」および「より良いモデル化」の段階において、回帰モデル機能で算出した複数の数学的モデルの妥当性を検討し、適切な数学的モデルを選択する数学的活動の実践を行った。ここでは、生徒が記述したレポートをもとに、生徒自身が行った数学的モデルの妥当性の検討方法と最適な数学的モデルの選出方法について分析した。

##### 2. これまでの研究の問題点

三輪（1983）は、数学的モデリングの教育的意義と問題点の中で、「定式化」、あるいは「解釈・評価」は、これまでの学校教育で教えることのなかった高度な技能を要求することを問題点の1つとして挙げていることは既に述べた。実際にテクノロジーを活用しない実践研究では、「解釈・評価」さらに「より良いモデル化」に焦点をあてた研究は少ないようである。この原因について、佐伯他（1998）は、生徒の焦点が数学的モデルを作成することに集中しすぎるため「解釈・評価」さらに「より良いモデル化」の過程まで至らないことを指摘している。

これに対して、テクノロジーの回帰モデル機能を活用することにより、数学的モデリングの過程における「定式化」と「数学的作業」の過程が軽減でき、数学的モデルの「解釈・評価」と「より良いモデル化」の過程に焦点を当てることが可能になった。実際に我が国の実践研究をレビューしてみると、中学校の実践においても、回帰モデ

<sup>1</sup> 2. 3節（pp.99-112）を参照。



ル機能が数学的モデリングの道具として有効に活用されている（大澤，1996；柳本，1996；大澤，1998a；大澤，1998b；柳本，1998；大澤，1999）。しかし，テクノロジーの回帰モデル機能はブラックボックスであるため，回帰分析の理論を学習していない生徒が道具の使い方を誤ると，数学的モデリング過程における数学的作業は，グラフ電卓のボタンを押す操作だけに終わり「より良いモデル化」が行われない危険性があることも先行研究で指摘されている（Blum and Niss, 1989；Blum, 1991）。

大澤（1996，1998a）とBrown（1998）の実践研究では，式中心による代数的解決は行われなかったが，グラフ電卓の回帰モデル機能から得られたグラフ的・数値的情報を活用してより良いモデル化へと検討・修正が行われ，生徒が数学を活用して実世界の問題を解決することの意義を理解した事例が報告されている。これらの実践の特徴は，取り扱われた題材が生徒にとって身近で興味があったことと，複数の生徒達（大澤の実践では4人の小グループ，Brownの実践ではクラス全体）による議論を行う過程で「より良いモデル化」が行われたことである。

一方，Zbiek（1998）は，数学教員の養成講座を受講した13名の生徒を対象に，テクノロジー（コンピュータのグラフィングツールやグラフ電卓）で数学的モデルを作成・検証する生徒の方略を分類した結果を報告している。彼女は，数学的モデリング過程における活動中の発話プロトコル，活動観察報告，生徒のレポート内容等をもとに分析を詳細に行った結果，次の4つに方略を分類した。

**方略(1)：**テクノロジーで算出した複数の回帰モデルの中から，当てはまりの尺度（goodness-of-fit values）のみで最適な数学的モデルを選択した方略

**方略(2)：**テクノロジーで算出した複数の回帰モデルの中から，データの散布図の傾向と関数の特徴を比較検討して最適な数学的モデルを選択した方略

**方略(3)：**テクノロジーで算出した全ての回帰モデルが妥当でないと判断した後に，データの散布図の特徴を考慮しながら数学的モデルを自らの力で作成・評価，さらには，より良いモデル化を行った方略

**方略(4)：**テクノロジーを活用しないで，個人の経験と洞察により，持っている知識（例えば割合）を適用した方略

このように，テクノロジーの回帰モデル機能を活用した実践研究と調査研究が徐々に行われてきているが，生徒の「解釈・評価」および「より良いモデル化」における能力向上に焦点をあてた教材開発と教育的効果について言及した研究はあまり見られないのが現状である。

### 3. 調査の目的と方法

本調査の目的は、生徒が「解釈・評価」および「より良いモデル化」が可能になる段階のステップとして、「複数の数学的モデルから適切なモデルを選択する」活動を行う指導の意義と効果について明らかにすることである。

そのために、Zbiek の調査研究の方略(2)を参考に教材を開発し、生徒が行ったモデル化活動をもとに以下の2点を調査する。

- 1) 個々の生徒がどのような方法で数学的モデルの妥当性を検討するかについて調査する。
- 2) 個々の生徒が複数の数学的モデルの中からどのような方法で最適な数学的モデルを選択するかについて調査する。

調査で使用した教材は、Demana(1996)の実践による「アメリカの公立学校におけるコンピュータ数の変化の予測」の課題を参考に開発した。この教材では、まずコンピュータ1台あたりの生徒数に関する過去のデータをもとに、グラフ電卓の回帰モデル機能を使って7つの数学的モデルを作成し、さらに、それぞれの数学的モデルの妥当性を検討した上で最適な数学的モデルを選択し、その理由を記述する形式で行った。この社会現象データを取り扱った理由は、データの減少傾向が一定（直線的）でないため、複数の数学的モデルの中から最適なモデルを選択するための議論が出やすいためである。

### 4. 調査の概要

#### (1) 調査方法

- 1) 授業形態：プリントを使った個人による数学的活動
- 2) 対象学年と人数：金沢高専，2年生約50名（2クラス）
- 3) 授業者：佐伯昭彦
- 4) 実施期日：2000年11月28日，2001年1月30日
- 5) 使用機器：グラフ電卓(TI-83 Plus)
- 6) 前提知識：2次・無理・分数・指数・対数・三角関数は1年次で履修済み

#### (2) 調査に使用した教材の概要

##### a. 教材の目標

実際の社会現象データを題材に、グラフ電卓の回帰モデル機能で算出した数学的モデルの妥当性を考察することにより、数学的モデルの「解釈・修正」、さらに、「より良いモデル化」が可能になる段階のステップとして、「複数の数学的モデルから適切なモデルを選択する」活動の意義を理解する。

b. 教材の題材と展開

[題材] 学校でのコンピュータ利用 (Demana, 1996)

右の表は、1983年から1994年のアメリカの公立学校でのコンピュータ1台における生徒数を表している。この傾向が続くとしたら、2000年ではコンピュータ1台における生徒数は何人になるだろうか。(Source: Quality Education Data)

Year	生徒数
1983	125
1984	75
1985	50
1986	37
1987	32
1988	25
1989	22
1990	20
1991	18
1992	16
1993	14
1994	12

[予想]

データを観察して2000年の値を予想する。

[数学的モデルの妥当性の検討]

グラフ電卓の回帰モデル機能を活用して7つの数学的モデル(表4-3-1)を算出し、さらに、それぞれの妥当性を以下の手順で検討しプリントに記述する(図4-3-1)。

- ・それぞれの数学的モデルを求め、その結果のグラフを描写する。(グラフの描写は、データの散布図の傾向と数学的モデルとを視覚的に比較することを意図している)
- ・求めた数学的モデルから2000年の値を求める。(算出した値の解釈・評価により、数学的モデルを数値的に検討することを意図している)
- ・数学的モデルの妥当性を考え、その理由を記述する。(理由を記述することで、最適な数学的モデルを選択する時の検討基準を考察し表現することを意図している)

[最適な数学的モデルの選択]

7つの数学的モデルを比較し、最適だと思われる数学的モデルを選択し、その理由を記述する。

表 4-3-1. 教材で使用した回帰モデル機能

回帰モデル	コマンド
一次回帰モデル	LinReg(ax+b)
二次回帰モデル	QuadReg
三次回帰モデル	CubicReg
四次回帰モデル	QuartReg
対数回帰モデル(底はe)	LnReg
指数回帰モデル	ExpReg
べき乗回帰モデル	PwrReg

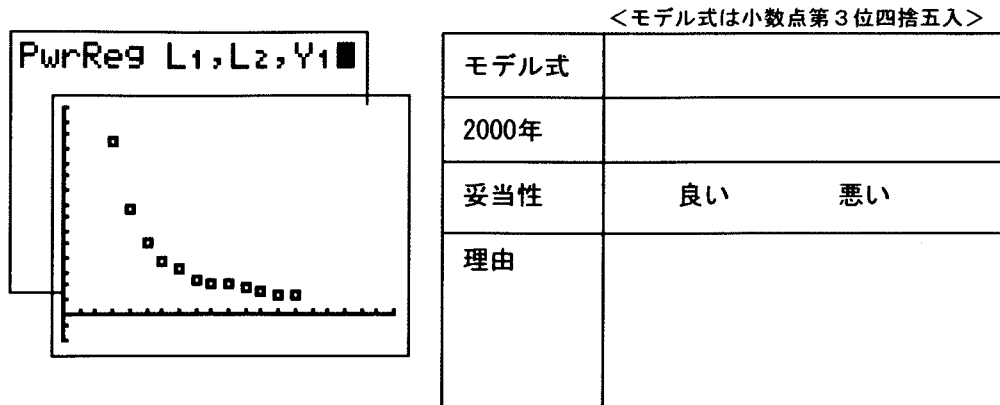


図 4-3-1. 数学的モデルの妥当性を記述する欄

c. グラフ電卓の活用目的

大澤（1998）と Brown（1998）の実践研究と同様に，本教材では数学的モデルと 2000 年の値を算出するための道具としてグラフ電卓の回帰モデル機能を活用した．グラフ電卓で数学的モデルと 2000 年の値を算出することにより，図 4-3-2 に示す定式化と数学的作業の過程を軽減することが可能になる．このため，生徒は数学的モデルの妥当性とより良いモデル化の検討に十分な時間をかけることができ，個々の生徒が自由な発想のもとで数学的モデルの妥当性の検討と最適な数学的モデルの選択が行えると考えた（図 4-3-2）．さらにグラフ電卓は，算出した回帰モデルのグラフとデータの散布図とを同時に表示することができるため，数学的モデルの妥当性を視覚的に比較検討することが容易に行える利点もある（図 4-3-3）．

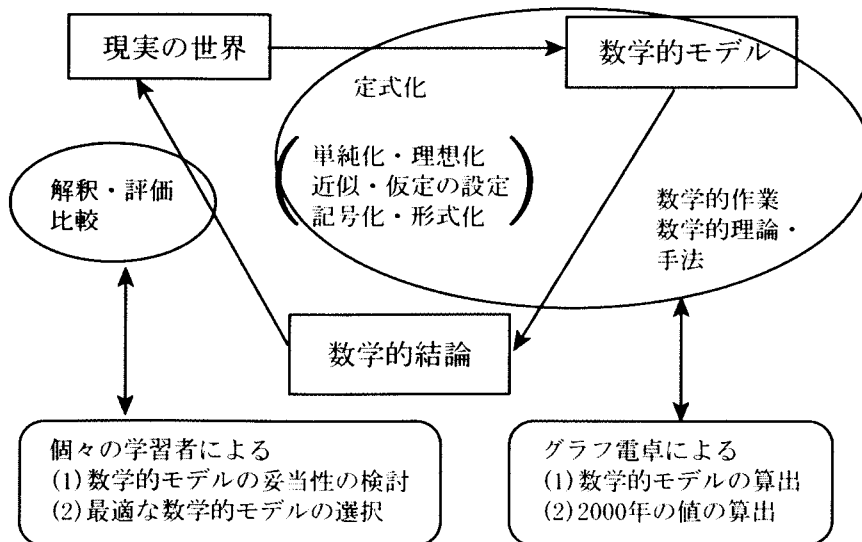


図 4-3-2. 数学的モデリング過程における教材の焦点

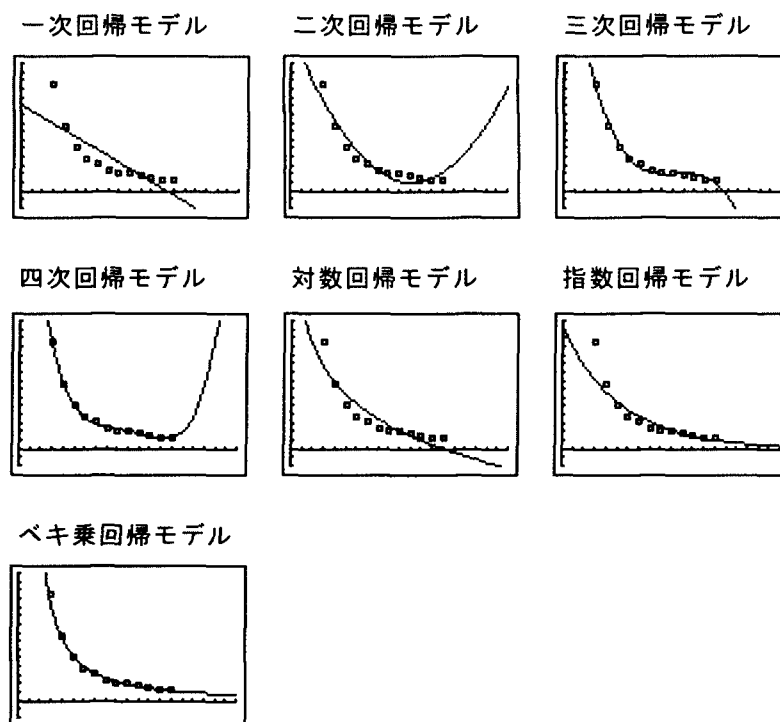


図 4-3-3. 回帰モデル機能によるグラフの表示結果

## 5. 調査の結果

図 4-3-3 に示したように、グラフ電卓の回帰モデル機能による数学的モデルのグラフと 2000 年の値の算出結果から、生徒達はそれぞれの考えで数学的モデルの妥当性を検討し、さらに、より良いモデルの選出を行った。ここでは、生徒のレポート結果をもとに、(1)数学的モデルの妥当性の検討方法と、(2)より良いモデル化への検討方法について分析した結果を述べる。

### (1) 数学的モデルの妥当性の検討方法

生徒のレポート内容を分析した結果、数学的モデルの妥当性に関する検討方法は、以下の 3 つの方法で行われていた。

- 1) 数値的表現による検討
- 2) グラフ的表現による検討
- 3) 数値的表現とグラフ的表現の複数の表現による検討

以下、それぞれの検討方法について詳しく説明する。

#### a. 数値的表現による検討

図 4-3-4 に示す生徒は、対数回帰モデルで求めた数学的モデル ( $Y_1 = 164 - 62 \times \ln(x)$  : 図 4-3-4 は生徒の記入ミス) の妥当性が悪い理由について、「世界が崩壊してもマイナ

スにはいかない」と記述している。これは、生徒が算出した 2000 年の値が -22 人/台であるため、マイナスの値が現実性に欠けることを生徒自身の表現方法で記述したものである。つまり、この生徒は、数値的表現である 2000 年の値を用いて、対数回帰モデルで求めた数学的モデルの妥当性を検討していると考えられる。

(5) LnReg : 対数回帰モデル

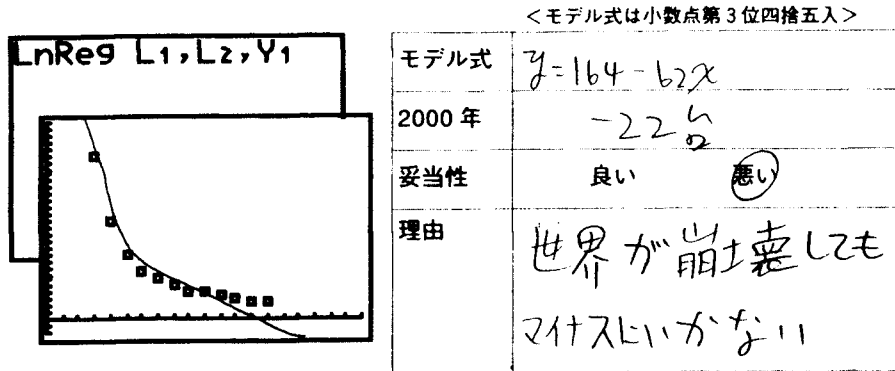


図 4-3-4. 生徒の数値的表現による検討方法

b. グラフ的表現による検討

図 4-3-5 に示す生徒は、四次回帰モデルで求めた数学的モデル ( $y_1 = 0.04x^4 - 1.72x^3 + 25.52x^2 - 167.94x + 440.41$ ) の妥当性が悪い理由について、「データとグラフがほぼ一致しているけど、94年以降、急に上昇しているので良いグラフではないと思う。」と記述している。これは、データの散布図と数学的モデルのグラフが1994年まで一致しているが、求めた数学的モデルは1994年以降の未来の予測に相応しくないことを述べている。つまり、散布図と数学的モデルのグラフが視覚的に一致しているかどうかは妥当性の検討判断の基準であり、この生徒は数学的モデルをグラフ的表現によって検討していると考えられる。

(4) 7: QuartReg : 4次回帰モデル

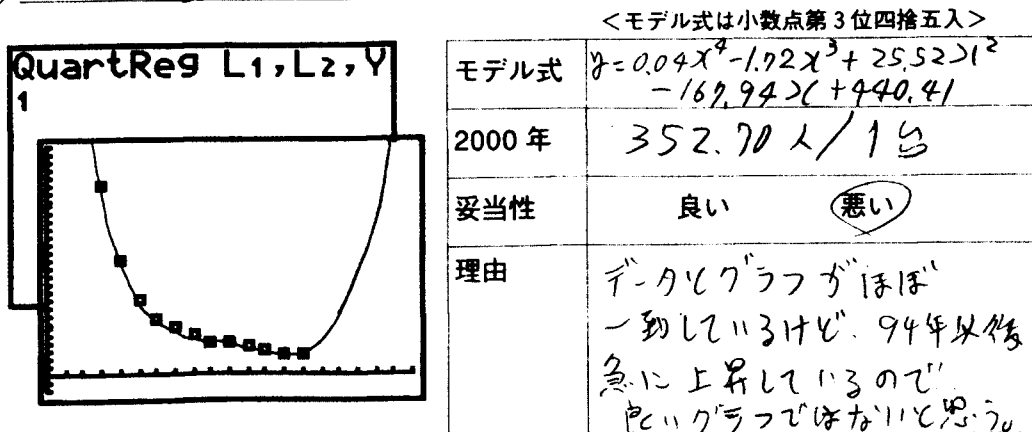


図 4-3-5. 生徒のグラフ的表現による検討方法

c. 数値的表現とグラフ的表現の複数の表現による検討

図 4-3-6 に示す生徒は、べき乗回帰モデルで求めた数学的モデル ( $Y_1 = 545.93 \times x^{-1.45}$ ) の妥当性が良い理由について、「こんなピッタリのグラフがあつていいのわ!!? (笑)ちゃんとそれぞれの値もきっちり取つたし、2000年の値もなかなかであります。すごい!!おみそれしました(笑)」と記述している。この記述の前半は、データの散布図と数学的モデルのグラフが視覚的に一致しているかどうかについてのグラフ的表現による検討である。さらに、後半の記述は、数的表現である 2000 年の値が妥当であるかどうかについての検討である。つまり、数学的モデルの妥当性の判断基準として、グラフ的表現と数値的表現の 2 つの表現で考察されている。

(7) A: PwrReg : べき乗回帰モデル

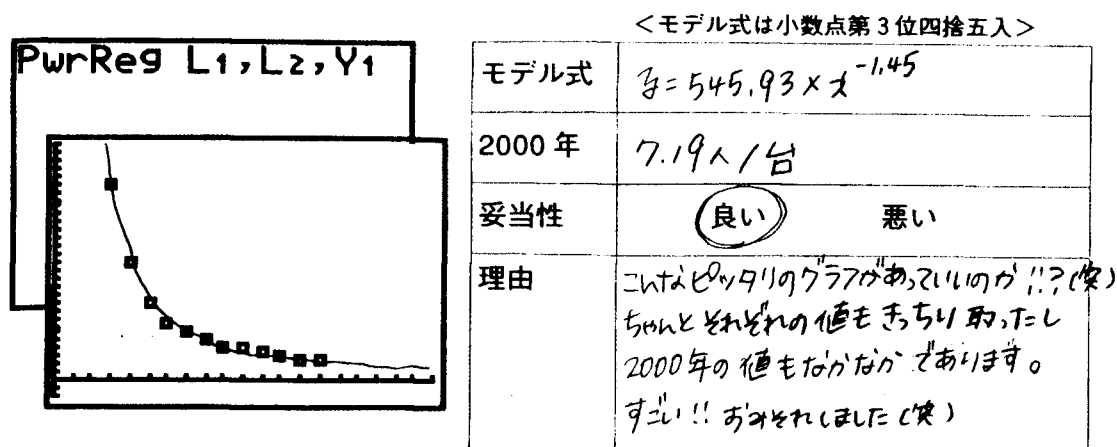


図 4-3-6. 生徒の複数の表現による検討方法

(2) より良いモデル化への検討方法

課題「学校でのコンピュータ利用」における最後の探究は、7つの数学的モデルを比較し、最適だと思われる数学的モデルを選択し、さらに、その理由を記述することである。ここでは、生徒のレポートから特徴的なものを3つ紹介する。

a. 数学的モデルの妥当性の検討基準のまとめ

図 4-3-7 に示す生徒は、1番良い数学的モデルとして、べき乗回帰モデルを選択している。その選択理由として、3つの検討基準が記述されている。

最初の検討基準「①データのプロット点とモデル式によるグラフがほとんどあつてから。」は、データの散布図と数学的モデルのグラフとの一致を視覚的に行っていることから、グラフ的表現による数学的モデルの検討基準であると考えられる。

2つめの検討基準「②  $x$  の値が多くなっていくにつれ、 $y$  の値が小さくなる。」は、与えられたデータの傾向から判断して、数学的モデルは単調減少であることを述べて

いる。この検討基準に「値」という言葉が記述されていることから、数値的表現による数学的モデルの検討基準であると考えられる。

最後の検討基準「③  $y$  の値が負の値にならない⇒漸近線」も2つめの検討基準と同様に「値」という言葉が記述されていることから、数値的表現による数学的モデルの検討基準であると考えられる。さらに、記述中の「漸近線…  $y=0$ 」は、べき乗関数のグラフの特徴を捉えることにより、かなり先の年の値も予想している様子が見られる。

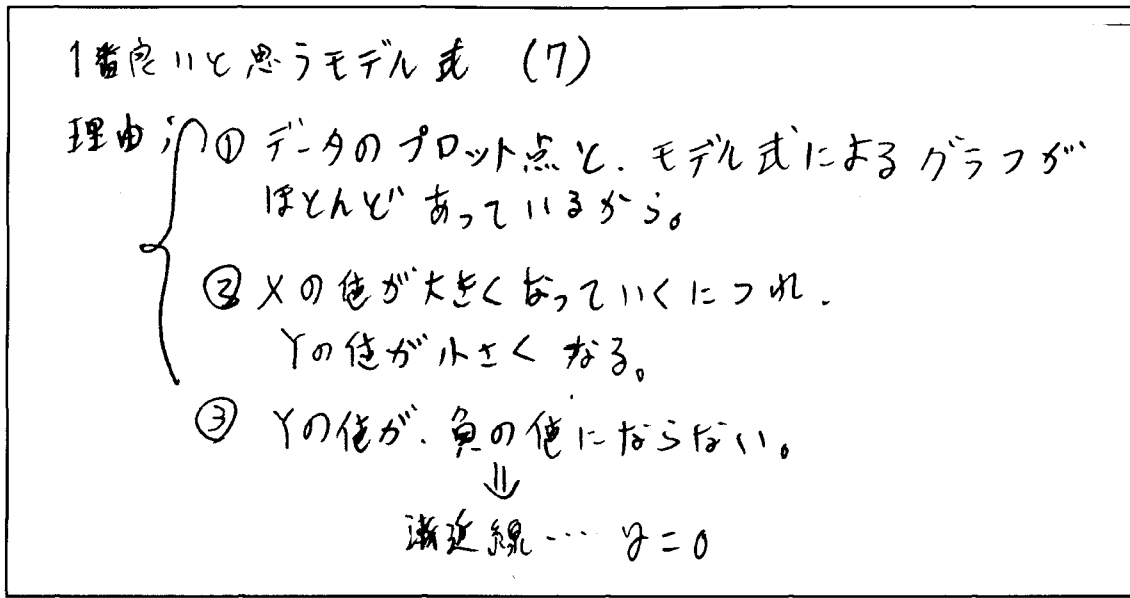


図 4-3-7. 数学的モデルの妥当性の検討基準のまとめ

b. 現実場面と数学的結論の対比による検討

図 4-3-8 に示す生徒は、べき乗回帰モデルと指数回帰モデルを比較した結果、1番良い数学的モデルとして指数回帰モデルを選択している。

記述中の「べき乗も一見近いような気もするが、最終的には後の方のデータの差を重視したようなあまり差のないグラフを示しているが、」では、両方のグラフを視覚的に比較した結果、べき乗回帰を選択しようと考えたが、データの後半部分ではべき乗回帰モデルと指数回帰モデルにおいて差がないことから、次の記述に見られる数値的表現による検討へと展開したと考えられる。つまり、「実際、この問題の場合、一人一台以上のPCを持ってもおかしくない問題なので、指数モデルがこの中では一番近いんじゃないかと思う。個人的に考えておそらく一人に3台くらいが実際と考えて（グラフ上の傾向としては）もおかしくないんじゃないだろうーか。」では、指数回帰モデルとべき乗回帰モデルの2000年の値を比較して、指数回帰モデルが3.26台（実際には3.26人/台であり、生徒の誤解である）が、べき乗回帰モデルの7.19台よりも現実的であることを理由に指数回帰モデルを選択したと考えられる。



#### 4. 3 数学的モデルの妥当性に関する生徒の検討方法

この生徒は 2000 年の値の単位を間違えているが、グラフ的表現の検討で選択したべき乗回帰モデルよりも、数値的表現の検討で選択した指数回帰モデルがより現実的であることの判断で指数回帰モデルを選択したと考えられる。つまり、数値的表現とグラフ的表現だけでなく、実際の現実場面と数学的結論とを関連させて考察することにより、最適な数学的モデルを選択したと考えられる。

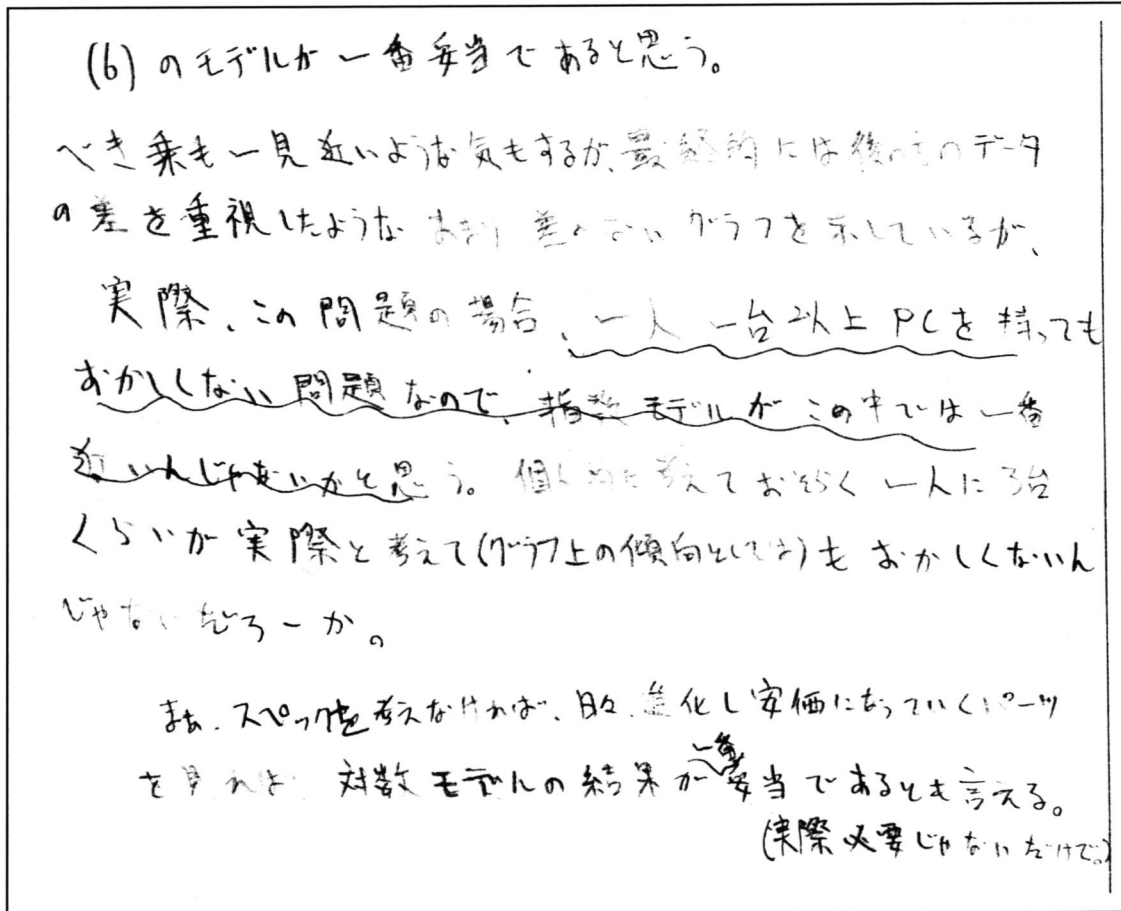


図 4-3-8. 現実場面と数学的結論の対比による検討

#### c. 2つの数学的モデルの併用

図 4-3-9 に示す生徒は、1 番良い数学的モデルとしてべき乗回帰モデルを選択している。

記述中の「グラフ上の点をきっちり通っているし、2000 年の値予想もなかなかのもので。」から、グラフ的表現と数値的表現の検討によって数学的モデルを選択したと考えられる。次に、「でも 4 次回帰モデルのやつも捨てがたいです。この全部のグラフの中でいちばんグラフ上の点がとれたのはコイツです。」から、1994 年までのデータにおいては、4 次回帰モデルのグラフがデータの散布図と視覚的に一番一致していることを述べており、その結果、1994 年を境に、過去を 4 次回帰モデル、さらに、

未来をべき乗回帰モデルと2つの回帰モデルを併用することを考えた。生徒は、「…そんなことができるでしょうか?」と、少々控えめな意見を述べているが、この柔軟で大胆な発想には驚かされた。

この生徒は、最適な数学的モデルを選択する探究において、7つの数学的モデルのグラフとデータの散布図の差を視覚的に検討した結果、1994年以降の傾向が変化すると捉え、2つの数学的モデルを併用することで「より良いモデル化」を行ったと考えられる。こういった数学的モデルの併用を行った生徒は一人のみであったが、これは偶然行われたものではなく、テクノロジーを活用することにより、複数の数学的モデルの中から最適な数学的モデルを選択する探究に十分な時間がかけられ、しかも、数学的モデルと散布図とをグラフ的に比較検討できたことが大きな要因になっていると考える。

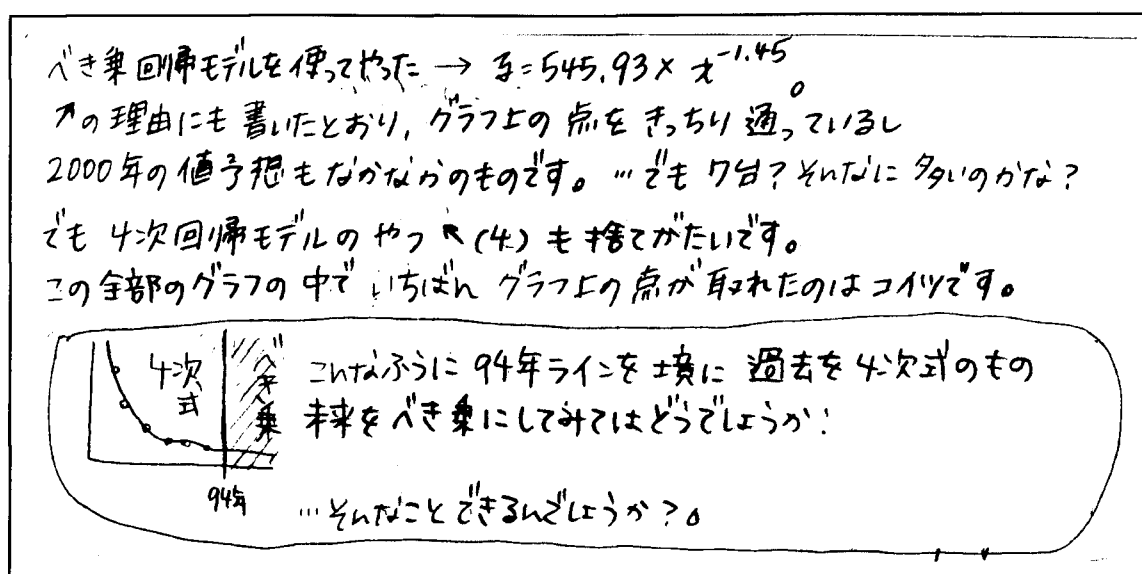


図 4-3-9. 2つの数学的モデルの併用

## 6. 考察

本調査の目的は、三輪(1983)の数学的モデリング過程の「解釈・評価」と「より良いモデル化」過程の能力の一部として「複数の数学的モデルから適切なモデルを選択する」能力に焦点を絞った教材を開発し、実際に生徒のモデリング活動をもとに以下の調査を行うことであった。

- 1) 個々の生徒がどのような方法で数学的モデルの妥当性を検討するかについて調査する。
- 2) 個々の生徒が複数の数学的モデルの中からどのような方法で最適な数学的モデルを選択するかについて調査する。

生徒がグラフ電卓の回帰モデル機能を活用して数学的モデルの算出し、生徒なりの自由な発想で数学的モデルの検討を行った結果、以下のことが明らかになった。

##### (1) 数学的モデルの妥当性の検討方法

本教材における数学的モデルの妥当性の検討は、三輪（1983）の数学的モデリング過程の「解釈・評価」の過程にあたる。生徒達は、この過程において①数値的表現である2000年の値による検討、②データの散布図と数学的モデルのグラフとを比較したグラフ的表現による検討、③数値的表現とグラフ的表現の複数の表現による検討、の3つの方法で検討を行った。本調査は、個々の生徒が個人で数学的モデルの検討を行った訳であるが、大澤（1998）の実践（4人の小グループによる検討）やBrown（1998）の実践（クラス全体による検討）と同様な結果が得られた。これに対して、先行研究と同様、代数的表現による検討は行われなかったが、生徒のレポートには、「三次関数のグラフってこんな感じだったのですね」や「漸近線… $y=0$ 」といった数学の学習内容と関連づけて数学的モデルを検討した例も見られた。

##### (2) 最適な数学的モデルの選択における検討方法

本教材における最適な数学的モデルの選択は、三輪（1983）の数学的モデリング過程の「より良いモデル化」の過程にあたる。生徒達は、この過程において①数学的モデルの妥当性の検討基準をまとめた生徒、②現実の場面に戻って数学的モデルを検討した生徒、③過去と未来に適した2つの数学的モデルを併用した生徒、その他、自由な発想による生徒独自の検討方法も見られた。上記の②は、大澤（1998）の実践とBrown（1998）の実践と同様な結果であり、さらに、③は大澤の実践と同様な結果が得られた。これに対して、①の数学的モデルの妥当性の検討基準をまとめた事例（図4-3-7参照）は、先行研究では報告されていないと思われる。

##### (3) テクノロジー活用による危険性の解消

調査では、数学的モデリング過程の「数学的作業」を軽減し、「解釈・評価」、さらに、「より良いモデル化」の過程に十分な思考時間を与えるために、回帰分析の学習をしていない生徒に、回帰分析の理論的な説明をしないでグラフ電卓の回帰モデル機能を活用させた。こういった活用に対して、グラフ電卓の単純なボタン操作で瞬時に数学的モデルを算出することは、生徒の思考活動が阻害されるとの批判があるようである。

しかし、本調査では、グラフ電卓をブラックボックスとして扱うのではなく、グラフ電卓に表示された数学的モデルを生徒自身の自由な発想で検討する道具として取り扱った。そのため、上記に示したように生徒達は自由な発想でグラフ電卓と対話を通

しながら、数学的モデルの妥当性の検討とより良いモデル化の検討を行っていたことが分かった。この結果、本教材での手法は、グラフ電卓等のテクノロジー活用によるボタンプレッシングの危険性を解消する一つの教育的方法を示唆すると考える。

## 7. まとめ

本節では、最初に本研究の調査方法と教材の概要について述べ、次に、生徒が記述したレポートをもとに、数学的モデルの妥当性の検討方法と最適な数学的モデルの選出方法について分析した。その結果、以下のことが明らかになった。

- ・ 数学的モデルの妥当性の過程では、1)グラフ的表現、2)数値的表現、3)グラフ的表現と数値的表現の複数の表現による検討が行われていた。
- ・ より良いモデル化の過程では、1)妥当性の検討基準の設定、2)現実場面との対比による検討、3)二つの数学的モデルの併用、その他、多様な検討が行われていた。
- ・ グラフ電卓の回帰モデル機能の活用により、数学的作業を軽減し、複数の数学的モデルの中から最適なモデルを選択する過程に十分な思考時間を与えた手法は、テクノロジー活用による危険性を解消する一つの教育的方法を示唆するという知見が得られた。

近年の情報化社会では、インターネット等の情報網から必要な情報を収集する能力、収集したデータを表計算ソフトや統計ソフトで解析する能力、さらに、解析した結果を検討・解釈して効果的に報告する能力が重要である。本教材は、3つ目の検討・解釈・報告する能力を向上させる一例であり、今後、こういった教材の実践が数学の授業や総合学習で実施されることが望まれる。

## 引用文献・参考文献

- 1) Blum W. and Niss M. (1989) "Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction". In Blum W., Niss M. and Huntley I. (eds.) . Modelling, Applications and Applied Problem Solving. Ellis Horwood. pp.1-21.
- 2) Blum W. (1991). "Applications and Modelling in Mathematics Teaching – A Review of Arguments and Instructional Aspects". In Niss M., Blum W. and Huntley I. (eds.) . Teaching of Mathematical Modelling and Applications. Ellis Horwood. pp.10-29
- 3) Brown R. (1998). "Mathematical modeling and current events using hand held graphing technology" . In P. Galbraith, W. Blum, G. Booker & I. D. Huntley (eds.) . MATHEMATICAL MODELLING Teaching and Assessment in a Technology-Rich

#### 4. 3 数学的モデルの妥当性に関する生徒の検討方法

- World. England. Horwood Publishing Limited. pp.85-93.
- 4) Demana F. (1996). 数学教育におけるテクノロジーの役割とその意義 (講演資料). 於清風高校.
  - 5) 三輪辰郎 (1983). 「数学教育におけるモデル化についての一考察」. 筑波数学教育研究. 第2巻. pp.117-125.
  - 6) 大澤弘典 (1996). 「現実場面に基づく問題解決 -グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第78巻. 第9号. pp.16-20.
  - 7) 大澤弘典 (1998a). 中学校における数学的モデリングの指導についての研究: 生徒によるグラフ電卓の利用を視点として. 上越教育大学大学院修士論文.
  - 8) 大澤弘典 (1998b). 「数学的モデリングにグラフ電卓の利用を図った教材例 -テープレコーダのカウンター問題-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第80巻. 第9号. pp.30-33.
  - 9) 大澤弘典 (1999). 「肥満とやせの判定基準づくり -数学を核とした総合的な学習の時間の展開例-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第81巻. 第11号. pp.5-9.
  - 10) 佐伯昭彦, 氏家亮子 (1998). 「数学的モデリングを重視した総合カリキュラム -身近な物理現象を数学的にモデル化する授業-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第80巻. 第9号. pp.10-18.
  - 11) 佐伯昭彦, 氏家亮子 (2003). 「数学的モデルの妥当性に関する学習者の検討方法 -回帰モデル機能を用いたより良いモデル化-」. 日本科学教育学会誌. 科学教育研究. Vol.27. No.5. pp.354-361.
  - 12) 柳本哲 (1996). 「グラフ電卓を活用した数理の総合学習-CBLシステムを用いた実験から-」. 大阪教育大学数学教育研究. 第26号. pp.41-54.
  - 13) 柳本哲 (1998). 「グラフ電卓を用いた問題解決学習-中学3年の実践内容と生徒の反応-」. 大阪教育大学数学教育研究. 第28号. pp.45-57.
  - 14) Zbiek R. M. (1998). "Prospective Teachers' Use of Computing Tools to Develop and Validate Functions as Mathematical Models". Journal for Research in Mathematics Education. Vol.29. No.2. pp.184-201.

巻末資料4: 教材のワークシート (pp.261-262) 参照

#### 4. 4 数学的モデルの解釈・評価・より良いモデル化

##### － 「お湯の冷め方」実験における生徒の実データ解析方法 －

###### 1. はじめに

前節では、複数の数学的モデルの候補から、それぞれの数学的モデルの妥当性を検討し、一番適切な数学的モデルを選択する生徒の方法について述べた。ここでは、得られた数学的モデルを解釈・評価し、さらに、より良い数学的モデルへと変形していく生徒の数学的活動について焦点を絞ることとする。実際には、「数物ハンズオン」の最後のテーマ「お湯の冷め方」実験での授業結果をもとに、数学的モデルの解釈・評価・より良いモデル化に関する生徒の検討方法について分析する。

###### 2. これまでの研究の問題点

数学的モデリング過程における定式化、解釈・評価、より良いモデル化は、これまでの学校教育で教えることのなかった高度な技能が必要であることが三輪（1983）によって述べられている。実際に池田（1999）の研究調査では、数学的モデリング過程を促進する考え方は、中・高等学校での通常の数学授業では育成されない結果を明らかにした。この問題に対して、北澤他（2000）と Stephens 他（2001）は、「総合的な学習の時間」や「選択学習」の中で現実の問題を取り扱うことで数学的モデリング過程のプロセスを育成する実践を行っている。一方、西村（2001）は、通常の数学授業の単元「数列」で数学的モデルの作成や数学的作業の過程を取り入れながら、生徒の未習（等差数列と等比数列）の数学的な概念や手法を学習する方法を取り入れている。

本節で取り扱う数学的モデルの解釈・評価・より良いモデル化の過程に焦点を絞ると、これまでの先行研究（例えば、大澤，1996；柳本，1996；大澤，1998；Brown，1998；北澤他，2000；Stephens 他，2001；西村，2001）では、小グループまたはクラス全体の議論によって数学的モデルを解釈・評価、さらに、より良いモデル化が行われており、テクノロジーが数学的モデリング過程を補助する道具として活用されているのが特徴的である。また、大澤（1996，1998）の研究では、リレーのバトンパスの現実問題において、生徒自身が数学的モデルを検討・修正し、より良いモデル化を行った過程が詳細に記録・分析されている。しかし、大澤の実践の様に詳細に分析した研究報告は少なく、生徒がいかにして数学的モデルを解釈・評価し、さらに、より良いモデル化を行うかについて明らかにされていないのが現状である。

### 3. 調査の目的と方法

本調査の目的は、「お湯の冷め方」実験において、生徒が数学的モデリング過程にどのように活動し、数学的モデルを解釈・評価、さらに、より良いモデル化をどのように行うかについて明らかにすることである。

「お湯の冷め方」実験は、「数物ハンズオン」の6テーマを終えた生徒を対象に、実験の企画、解析方法、報告書作成、プレゼンテーションの全ての数学的活動が生徒自身によって行われた。本調査を明らかにするため、生徒が発表したプレゼンテーション内容とプレゼンテーションで使用した OHP をもとに分析した。

### 4. 調査の概要

#### (1) 調査方法

- 1) 授業形態：3～4人によるグループ活動で、実験の企画、解析方法、報告書作成、プレゼンテーションの全ての数学的活動が生徒自身によって行われた。
- 2) 対象学年と人数：金沢高専、2年生約50名（2クラス）
- 3) 授業者：佐伯昭彦
- 4) 実施期日：2000年12月～2001年2月
- 5) 使用機器：グラフ電卓(TI-83 Plus), データ収集機(CBL), 温度センサー

#### (2) 調査に使用した教材の概要<sup>1)</sup>

##### a. 教材の目標

「お湯の温度の冷め方」実験について、実験の企画、解析、報告を全て生徒自身の力で実行する。

##### b. 生徒に与えた実験の課題設定

「24時間冷めない鍋を開発するための基礎的実験」をテーマに、お湯（液体）の冷め方の要因（冷却される物質と容器の材質）について調べてみる。特に、熱湯は短時間で冷めないため、30分程度の実験データから、いかに未来を予測して冷め方を比較するかを実験課題として設定した<sup>2)</sup>。

##### c. 教材の概要と展開

#### 【第1週目】基本実験と企画書作成

<sup>1)</sup> 平成12年度に実施した「お湯の冷め方」実験の教材概要は、佐伯他（1998）で報告した内容とほぼ同じである。

<sup>2)</sup> 佐伯他（1999）は、実験終了時（約30分）の測定温度が室温にまで達していないデータを使ってモデル化したために、現実とかけ離れた数学的モデルを作成した実践例を報告している。実験終了後も温度が下がり続け、最終的には室温に達することを生徒に意識させることは、数学的モデルを解釈・検討し、さらに、より良いモデル化を実行させる動機にもなるため、少々オーバーであるが「24時間冷めない鍋を開発するための基礎的実験」というテーマを設定した。

- ・ 予想：お湯の冷め方の予想をグラフ上に描き，その理由を記入する<sup>3</sup>。
- ・ 基本実験：基本実験（ビーカーに入れた熱湯の冷め方）を行い，実験結果を観察し解析する．この実験における解析方法は，生徒自身が決定する．
- ・ 企画：基本実験の結果を基に，グループ毎に調べてみたい実験の企画書〔実験の目的，予想，実験方法，実験に必要な試料及び材料〕を作成する<sup>4</sup>。

[第2週目] 企画実験の実行と報告書の作成

- ・ 企画実験の実施：生徒自らが企画した実験を行う（図4-4-1）。
- ・ 実験の解析：実験結果から自分たちが発見した法則と，その法則の理由をまとめる．ここでの発見及び解析の表現方法は自由とする<sup>5</sup>。
- ・ 報告書の作成：実験の報告書を作成する．さらに，発表用のOHPを作成する。

[第3週目] プレゼンテーション

- ・ プレゼンテーション：自分たちで企画，実験，解析，考察した結果を第三者に分かるように報告する．
- ・ 授業のまとめ：教師が生徒の実験結果をまとめ，お湯の温度の冷め方の理論式と物理的意味の解釈を説明する<sup>6</sup>．さらに，現象を数学的にモデル化することの有用性について理解させる．

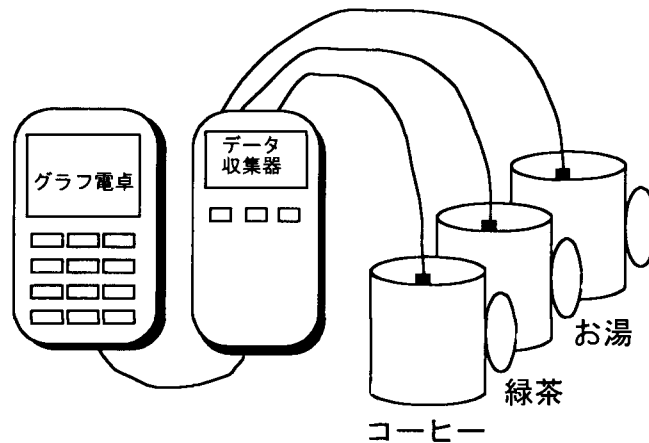


図 4-4-1. 生徒が企画した実験例

<sup>3</sup> 鹿野（1997）佐伯（1998）中村・黒木（2004）は，お湯の冷める実験の事前調査において，正しく予想した生徒が少なかったことを報告している。

<sup>4</sup> 生徒が主体的に数学的モデリング過程に取り組むことを目的に，実験の企画を立てさせた。

<sup>5</sup> 実験結果の解析を自由に行わせた理由は，(a) 生徒による主体的探究の重視，(b) 各班における多様な解析方法の比較，にある．特に(b)では，多様な解析方法の比較により実世界の現象を関数でモデル化することの有用性を理解させるためである。

<sup>6</sup> 実際の授業では，全ての班の実験結果（グラフ）をOHPで示し，お湯の中に入れる物質や容器の素材によって温度の冷める速さが異なる結果に対し，全て同じ形状のグラフ（減衰曲線）であることを理解した．さらに，お湯の冷める減衰曲線の理論式  $y = A \times e^{-Bx} + C$  と係数 A, B, C の物理的意味を説明した。



## 5. 調査の結果

ここでは、生徒が発表したプレゼンテーション内容とプレゼンテーションで使用した OHP をもとに、数学的モデルの検討・修正方法、さらに、より良いモデル化の方法について分析した結果を報告する。

## (1) 数学的モデルの分類

表 4-4-1 は、生徒が使用した数学的モデルの分類とグループ数を示している。約 4 割の 11 グループがグラフ表現、数値的表現、代数的表現の数学的モデルを使って多角的に解析していた。また、約 7 割の 18 グループが代数的表現を使って解析していた(表 4-4-2)。この内、17 のグループがグラフ電卓の回帰モデル機能を使って代数的表現を算出していたが、複数の回帰モデルを試してみて、その中から最適だと思われる数学的モデルを選択しているグループが多かった。

表 4-4-1. 数学的モデルの分類

数学的モデル	グループ数
グラフ表現	1
グラフ表現＋数値的表現	7
代数的表現	1
グラフ表現＋代数的表現	4
数値的表現＋代数的表現	2
グラフ表現＋数値的表現＋代数的表現	11
計	26

表 4-4-2. 代数的表現の種類

代数的表現	式	グループ数
指数回帰モデル	$y = a \times b^x$	12
べき乗回帰モデル	$y = a \times x^b$	1
対数回帰モデル	$y = a + b \times \ln(x)$	1
四次回帰モデル	$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	2
指数回帰モデルの改良	$y = a \times b^x + c$	1
回帰モデル未使用 (三次・一次)		1
計		18

(2) 解釈・評価とより良いモデル化

表 4-4-3 は、生徒が行った数学的モデルの解釈・評価，より良いモデル化の分類とグループ数を示している．全体の約 4 分の 1 のグループが，数学的モデリング過程において，数学的モデルの解釈・評価，より良いモデル化を行ったことが分かった．

ここでは，生徒の実データ解析方法について，以下の 3 つの事例をもとに示す．

- a. 数学的モデルの解釈を行った例（グループ A），
- b. 数学的モデルの解釈と評価を行った例（グループ B），
- c. 数学的モデルの解釈・評価とより良いモデル化を行った例（グループ C）

表 4-4-3 解釈・評価とより良いモデル化

数学的モデル化過程	グループ数
解釈	1
評価	3
解釈+評価	1
解釈+評価+より良いモデル化	1
計	6

a. 数学的モデルの解釈を行った例（グループ A）

図 4-4-2 と図 4-4-3 は，お湯，塩を溶かしたお湯，片栗粉を溶かしたお湯の冷め方を実験したグループの OHP（5 枚中の 2 枚）である．

【OHP-1】（4 枚目 / 5 枚）

図 4-4-2 の OHP では，実験開始時（15 秒後）の温度と実験終了時（30 分後）の測定結果が数値的表現で記述されている．

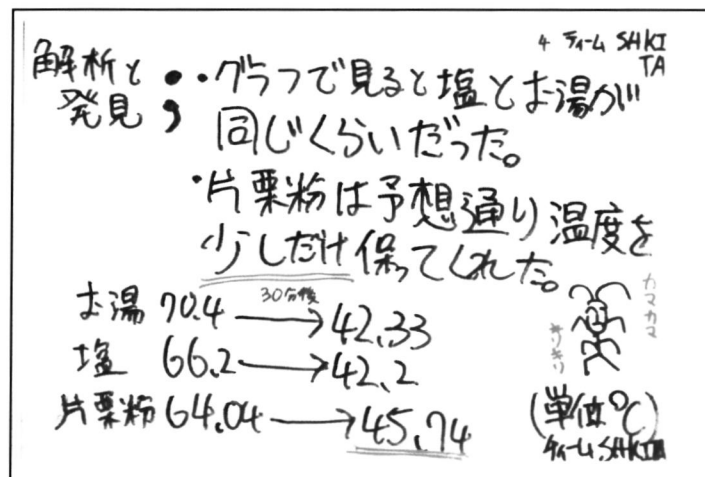


図 4-4-2. 生徒のプレゼンテーション用 OHP

【OHP-2】 モデルの評価 (5枚目 / 5枚)

図 4-4-3 の OHP に記述されている「色々あてはめた結果→LnReg: 対数回帰モデル!!」から、このグループは、グラフ電卓の回帰モデル機能を活用して複数の回帰モデルを算出し、対数回帰モデルを最適な数学的モデルとして選択していることが分かる。

次に、対数回帰モデル ( $y = 85.32 - 5.24 \ln(x)$ ) の  $x$  に 86400 秒 (24 時間) を代入した結果 ( $Y_1(86400) = 25.771 C^\circ$ ) が記述されている。このグループは、24 時間後にお湯の温度は室温である現実の世界と、数学の世界で算出した 24 時間後の値とを比較することによって数学的モデルの妥当性を評価したと考えられる (図 4-4-4)。

しかし、このグループが求めた対数関数 ( $y = 85.32 - 5.24 \ln(x)$ ) は、単調減少で  $x$  の値を 24 時間以上に大きくすると  $y$  の値が室温以下、かつ、マイナスの値にもなることが考察されていない。これを考察するには、対数関数に関するグラフの特徴などの数学的知識が必要であり、このグループの生徒たちにとっては、かなり高い知識・技能であったと思われる。

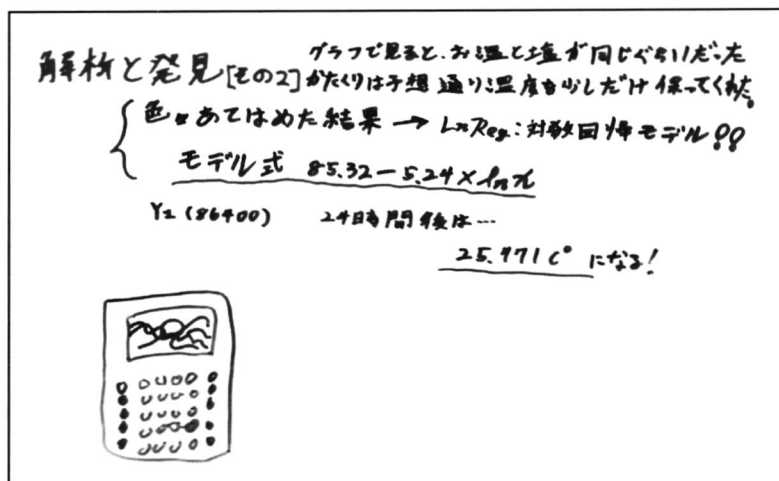


図 4-4-3. 生徒のプレゼンテーション用 OHP

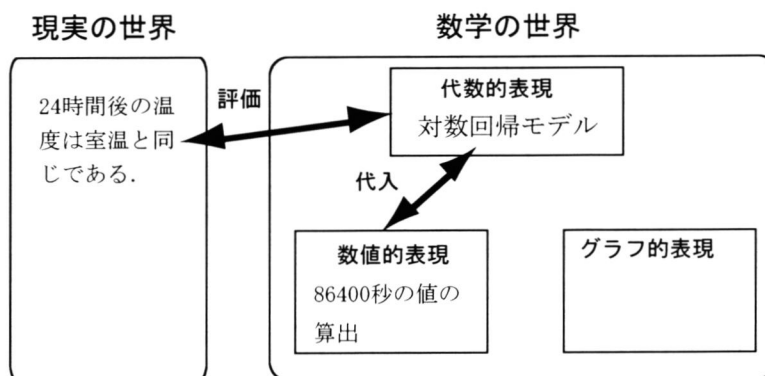


図 4-4-4. 数学的モデルの評価方法

b. 数学的モデルの解釈と評価を行った例（グループ B）

図 4-4-5 と図 4-4-7 は、お湯の中に 3 種類の粉（チョコレートの粉、イチゴチョコレートの粉、カレー粉）を溶かして、それぞれの温度の冷め方を実験したグループの OHP（5 枚中の 2 枚）である。

【OHP-1】モデルの評価（4 枚目 / 5 枚）

図 4-4-5 の OHP では、それぞれの粉についての解析結果を記述している。このグループは、代数的表現としてべき乗回帰モデルを使用している。また、グラフ表現として、実験データのプロットとべき乗回帰モデルのグラフを重ね合わせて描いている。さらに、グラフ上に実験終了時（1380 秒後）の温度について、実験による測定値と、べき乗回帰モデルから算出した値の両方を記述している。

このグループは、実験で得られた実験終了時の実データと、数学的モデルから算出した数値とを比較することにより、グラフ電卓の回帰モデル機能で求めた数学的モデルの妥当性を評価したと考えられる（図 4-4-6）。

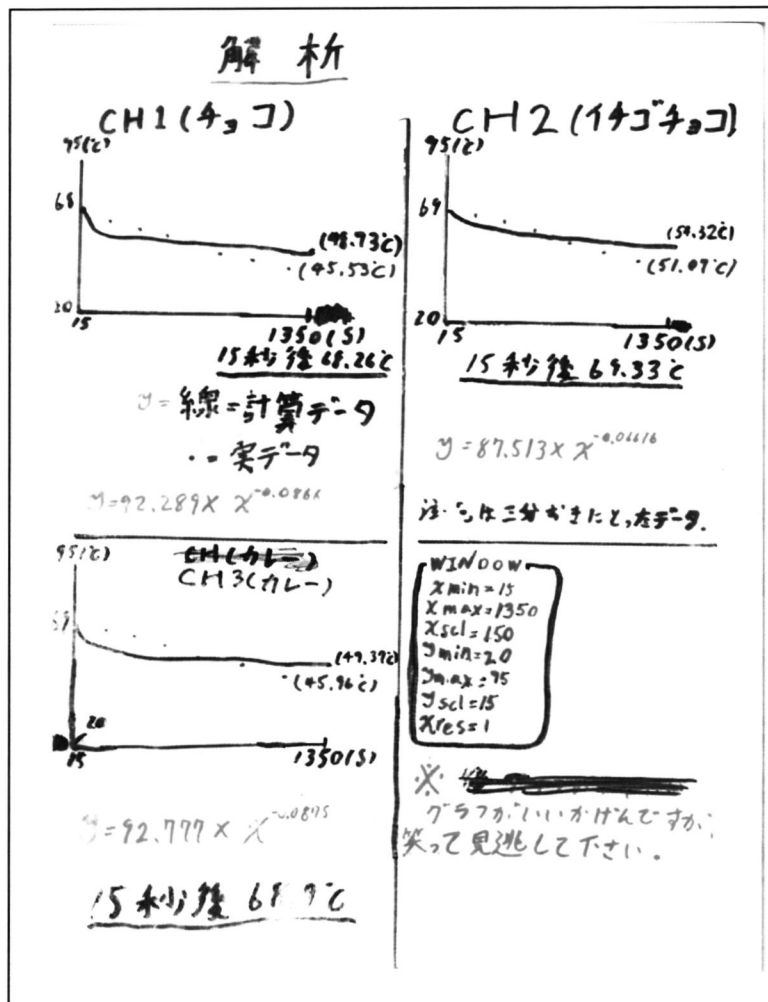


図 4-4-5. 生徒のプレゼンテーション用 OHP

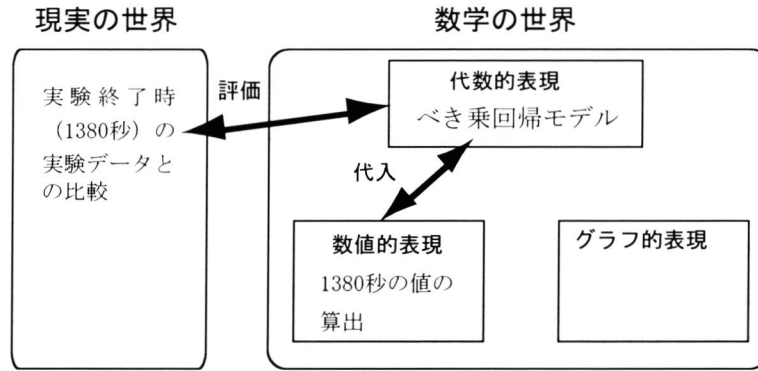


図 4-4-6. 数学的モデルの評価方法

【OHP-2】モデルの解釈（5枚目／5枚）

図 4-4-7 の最初にストロベリーチョコが一番冷めにくいことが記述されている。次に記述されている「チョコとカレーのグラフ，式はほとんど差がない」は，グラフの形状（プレゼンテーションでは「グラフの傾き」と述べている）とべき乗回帰モデル  $[y = a \times x^b]$  の係数を比較していることが分かる。

最終的には，ストロベリーチョコと他の2つの物質におけるグラフの形状とべき乗回帰モデルの係数を比較して，「べき乗関数  $[y = a \times x^b]$  の  $b$  の値が 0 に近ければ冷めにくい」と結論づけて，数学的モデルの  $b$  の値の物理的意味を解釈した（図 4-4-8）。しかし， $a$  の値の物理的意味の解釈（実験開始時の温度）には至っていない。

実験の予想と結果  
 (予想)カレー ⇒ (結果)ストロベリーチョコ  
実験結果と解析から発見したこと

- ・チョコとカレーのグラフ、式はほとんど差がない。
- ・ $y = a \times x^b$  の式をイチゴチョコのグラフにあてはめると  
 $a$  は3つのグラフの中で一番小さい  
 $b$  は3つのグラフの中で一番大きい
- ・ $b$  が 0 に近ければ冷めにくい。

図 4-4-7. 生徒のプレゼンテーション用 OHP

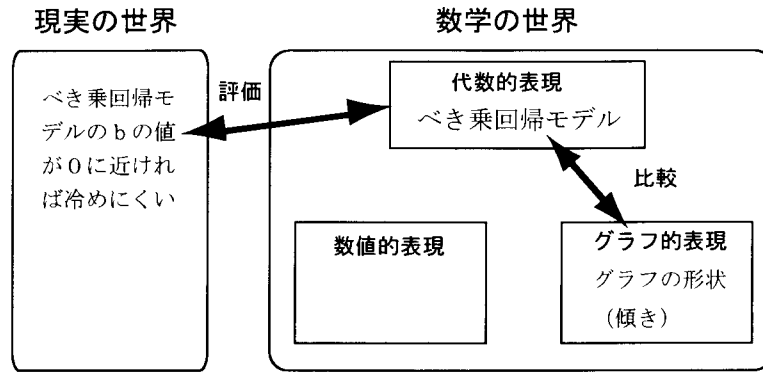


図 4-4-8. 数学的モデルの解釈方法

c. 数学的モデルの解釈・評価とより良いモデル化を行った例（グループC）

図 4-4-9 は、ビーカーに蓋をした場合と蓋をしない場合の冷め方を実験したグループの OHP（5 枚中の 4 枚）である。

【OHP-1】（2 枚目／5 枚）

この OHP では、実験方法と実験に使用した材料が記述されている。このグループでは、ビーカーに蓋をした場合と蓋をしない場合の温度変化について実験している。

【OHP-2】（3 枚目／5 枚）

この OHP では、実験条件である室温 17℃、代数的表現として指数関数の式、数値的表現として 15 秒後（実験開始時）と 1125 秒後（実験終了時）の温度、さらに、グラフ表現を活用して視覚的に温度変化を表している。

【OHP-3】（4 枚目／5 枚）

この OHP では、代数的表現による数学的モデルを作成した過程が記述されている。以下に、その過程について詳しく説明する。

(a) 指数回帰モデルの選択

OHP の「他のモデルの場合、数値が矛盾した値となって表示された。」では、生徒たちは、多くの回帰モデルを算出し、かつ、それらの妥当性を検討していることが分かる。特に、OHP の「数値が矛盾した値」では、算出した回帰モデルの  $x$  に大きな値（時間）を代入して回帰モデルの妥当性を評価していると思われる。これらの検討結果から、指数回帰モデル [  $y = a \times b^x$  ] を数学的モデルとして選択したと思われる。

【OHP-1】(2枚目/5枚)

3. 実験方法

「ラフ電卓で、プログラム  
"HEAT3"を実行し、ふたを  
した時としない時の温度を測定する。  
データの採取時間は15秒おきに  
約20分とする。

4 材料

電卓 … 1台	熱湯 (600cc)
リンクケーブル … 7本	ビーカー … 2個
CBL … 1台	モーター … 1個
温度センサー … 2本	

【OHP-2】(3枚目/5枚)

モデル式

ふたなし 室温 17℃  
 $Y = 68 \times 0.999516^{\sqrt{x}} + 17$   
 15秒後 87.32℃ 1125秒後 58.68℃

ふたあり 室温 17℃  
 $Y = 67 \times 0.999737^{\sqrt{x}} + 17$   
 15秒後 84.08℃ 1125秒後 67.85℃

実験結果のグラフ

【OHP-3】(4枚目/5枚)

実験結果と解析方法

解析方法: 指数回帰モデル  
 (O:ExpReg)を使用。他の  
 モデルの場合、数値が矛盾した  
 値になって表示された。(O:ExpReg)  
 を使用した場合も数値が0に  
 限り無く近づいた為、室温の17℃  
 を式に足した。しかしこのままでも  
 実験結果のグラフに一致しな  
 い為式の値(0.99...)を調整した。  
 (0.99...)の値を小さくした。  
 2つの式から、時間が経過  
 するとお湯の温度は17℃(室温)  
 に限り無く近づく。

【OHP-4】(5枚目/5枚)

発見したこと

この実験より、ふた  
 をしないよりした  
 方が温度の下が  
 り方が穏やかに  
 することが出来る。  
 (19分後、10℃差が出た)  
 解析より、モデル式を  
 使うだけでは、正しい  
 グラフにはならない。

図 4-4-9. 生徒のプレゼンテーション用 OHP 例

## (b) 数学的モデルの評価・修正・解釈

OHPの「(0:ExpReg)を使用した場合も数値が0に限り無く近づいた為、室温17°Cを式に足した。」では、生徒らは最初に、指数回帰モデルの $x$ に大きな値<sup>7</sup>(時間)を代入した値が0に限り無く近づくことを数値的に評価した。さらに、お湯が長時間経つと室温以下の0度にならない事実を考察した結果、(a)で求めた数学的モデル $[y = a \times b^x]$ の修正を考え、室温( $c$ )と $y$ 軸方向の平行移動を考慮することで新たな数学的モデル $[y = (a-c) \times b^x + c]$ を作成したと思われる(図4-4-10)。ここでの評価と修正の過程では、得られた数学的モデルにおける室温( $c$ )の物理的意味が解釈されている。これに対して、数学的モデルにおける係数 $(a-c)$ の物理的意味の解釈(温度差)は行われなかった。

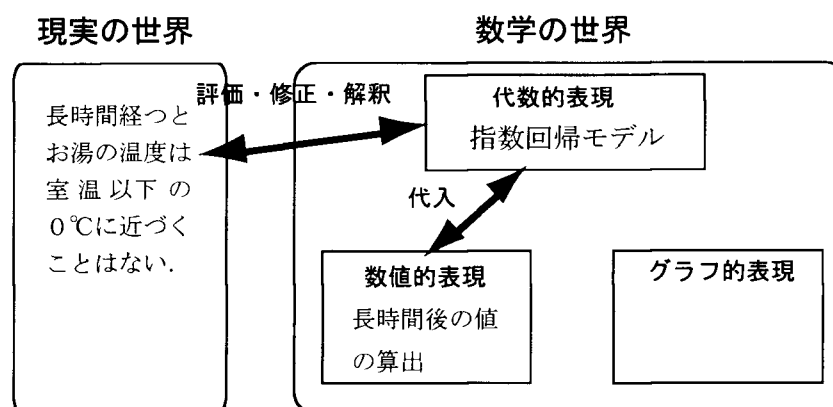


図4-4-10. 数学的モデルの評価・修正・解釈の方法

## (c) 数学的モデルの再評価・再修正

OHPの「しかしこのままでも実験結果のグラフに一致しない為、式の値(0.99...)を調整した。」では、(b)で求めた数学的モデルのグラフと実験データとの近似が視覚的に一致しないと評価したため、 $b$ の値を試行錯誤に修正して、新たな数学的モデル $[y = (a-c) \times b^x + c]$ を作成したと思われる。ここで行われたより良いモデル化の過程は、代数的表現とグラフ表現との関連だけで行われている(図4-4-11)。

<sup>7</sup> 実際にどんな値を代入したかについては、プレゼンテーション内容やOHPから判断できなかった。しかし、OHPに記述された「数値が0に限り無く近づいた」の表現から極限の概念が読み取れるため、指数回帰モデルの $x$ に大きな値(時間)を代入して数学的モデルを評価していると判断した。



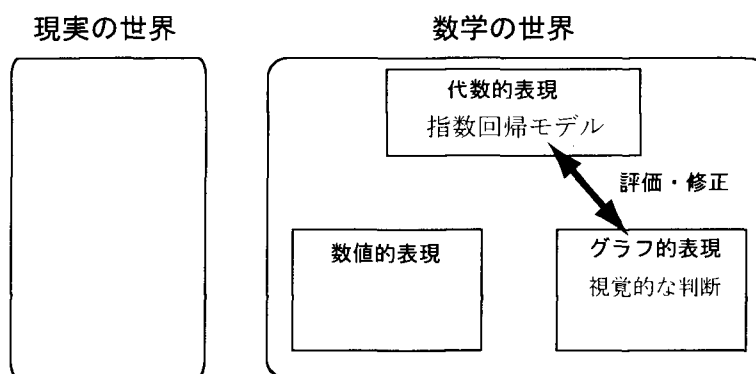


図 4-4-11. 数学的モデルの再修正方法

## 【OHP-4】(5枚目/5枚)

この OHP では、発見した事が書かれている。OHP の「モデル式<sup>8</sup>を使うだけでは、正しいグラフにはならない。」では、グラフ電卓の回帰モデル機能で得られた数学的モデルの妥当性を検討し修正する必要性が記述されている。

## 6. 考察

本調査では、生徒が発表したプレゼンテーション内容とプレゼンテーションで使用した OHP を分析した結果、以下のことが明らかになった。

## (1) 数学的モデルの評価方法について

グラフ電卓で算出した回帰モデルの評価を行ったグループは 5 つであり、その評価方法は以下の 3 つに分類された。

- 1) 回帰モデルの  $x$  に 86400 秒 (24 時間) を代入し、その結果と室温を比較することによって数学的モデルを評価した。[3 グループ: グループ A 参照]
- 2) 回帰モデルの  $x$  に 1380 秒 (実験終了時) を代入し、その結果と実験による測定値を比較することによって数学的モデルを評価した。[1 グループ: グループ B 参照]
- 3) 回帰モデルの  $x$  に大きな値 (時間) を代入し、その結果と室温を比較することによって数学的モデルを評価した。[1 グループ: グループ C 参照]

以上の結果から、数学的モデルの評価方法は、回帰モデルに数値を代入した結果を現実の現象 (室温や実験による測定値) と比較することによって行っていることが分かる。つまり、数学的モデルを評価するために、数学の世界における代数的表現と数値的表現、さらに、現実場面を相互に関連させながら数学的モデルを評価したと考えることができる。特に、 $x$  に 86400 秒 (24 時間) や大きな値 (時間) を代入したのは、実験の課題が「24 時間冷めない鍋を開発するための基礎的実験」であったことにも要

<sup>8</sup> 生徒が記述した「モデル式」とは、グラフ電卓の回帰モデル機能のことであると思われる。

因があったと考えられる。

## (2) 数学的モデルの解釈方法について

グラフ電卓で算出した回帰モデルの解釈を行ったグループは3つであった。

- 1) グラフの形状と回帰モデル  $[y = a \times x^b]$  の係数を比較することで、係数  $b$  の物理的意味を解釈した。しかし、 $a$  の値の物理的意味の解釈には至っていない。[1 グループ：グループ B 参照]
- 2) 回帰モデル  $[y = a \times b^x]$  に数値を代入して数学的モデルを評価する過程で、生徒は室温 ( $c$ ) の必要性に気づいたことで数学的モデル  $[y = (a - c) \times b^x + c]$  の修正を行った。ここでの評価と修正の過程では、得られた数学的モデルにおける室温 ( $c$ ) の物理的意味が解釈されているが、係数  $(a - c)$  の物理的意味の解釈 (温度差) は行われなかった。[1 グループ：グループ C 参照]
- 3) 回帰モデル  $[y = a \times b^x]$  において、係数  $a$  を「実験開始時の温度」、さらに、係数  $b$  を「冷め方」と解釈したグループがあったが、その解釈方法については分析できなかった。[1 グループ]

以上の結果から、数学的モデルの解釈方法は、数学の世界における代数表現と数値表現、または、グラフ表現との関連づけ、さらに、数学の世界と現実の世界との関連づけによって行われていることが分かる。しかし、1)のグループ B と 2)のグループ C の例では、数学的モデルにおける「実験開始時の温度」の物理的意味が解釈されていなかった。これを解釈するためには、回帰モデルの  $x$  に 15 秒 (実験開始時) を代入した数値と実験による測定値とを比較することで解釈できるが、どのグループも実験開始時の解釈を行わなかった。この原因を考察した結果、以下の2点が考えられた。

- ・実験の課題「24 時間冷めない鍋を開発するための基礎的実験」に見られるように、今回の実験では「24 時間」を強調しすぎた。
- ・2年間の「数物ハンズオン」のカリキュラム内容を再検討した結果、数学的モデリング過程で求めた代数的表現に実験データ以外の数値を代入して得られた結果と実現象を関連づけて検討する方法が教材ごとに段階を追って組み込まれているのに対し、実験開始時の実験データと代数的表現とを比較・検討することによって代数的表現を解釈・評価する教材が欠けていたことが明らかになった。

## (3) より良いモデル化について

より良いモデル化を行ったグループは1つのみであった。図 4-4-12 に示すように、このグループは少なくとも2回以上のサイクルで数学的モデルの修正を行っている。最初のサイクルの修正では、室温という現実の場面を考慮し、グラフ電卓で求めた

数学的モデル [  $y = a \times b^x$  ] と現実場面とを関連づけて評価・解釈した結果、新たな数学的モデル [  $y = (a-c) \times b^x + c$  ] へと修正が行われた。このように、数学的モデルの修正の過程が単独で行われたのではなく、数学的モデルの評価・解釈を行う一連の過程において、現実場面と関連づけながら数学的モデルの修正が行われたことが分かった。

さらに、2サイクル目の修正では、実験データと数学的モデルとをさらに近似するために、視覚的に数学的モデルを評価し、新たな数学的モデル [  $y = (a-c) \times b'^x + c$  ] へと修正が行われた。Pollak (1980) と三輪 (1983) は、数学の世界と数学以外の世界との間を行き来することによってより良いモデル化が行われると述べているが、この2サイクル目の修正は、数学の世界（代数的表現とグラフ表現）のみで行われたのが特徴的である。

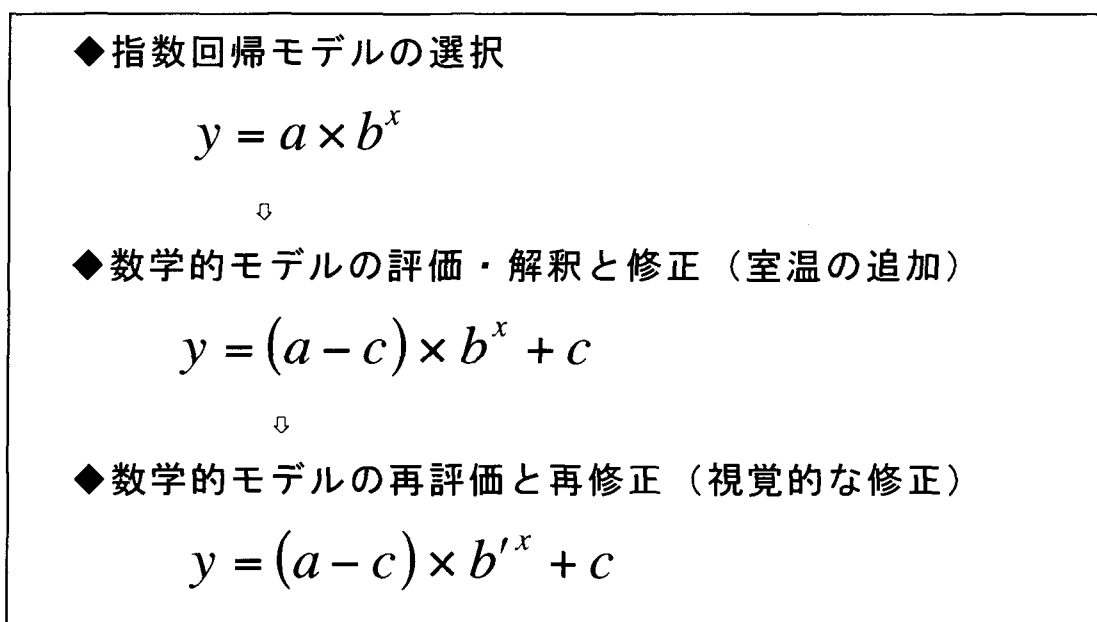


図 4-4-12. より良いモデル化の過程

## 7. まとめ

本調査の目的は、「お湯の冷め方」実験において、生徒が数学的モデリング過程にどのような活動を行い、数学的モデルを解釈・評価、さらに、より良いモデル化を行うかについて明らかにすることである。その結果、以下のことが明らかになった。

- 1) 数学的モデルの解釈・評価は、3つの表現（代数的表現、数値的表現、グラフ表現）と現実場面とを相互に関連づけて行われていた。
- 2) より良いモデル化は、数学的モデルの評価・解釈を行う一連の過程において、現実場面と関連づけながら数学的モデルの修正が行われた。
- 3) 数学的モデルにおける「実験開始時の温度」が解釈されなかったのは、「数物ハン

ズオン」のカリキュラム内容に問題があったことが分かった。

本調査の数学的活動では、数学的モデルの検討・修正についての報告を生徒に要求していなかった。しかし、図 4-4-9 に示したように、生徒達がプレゼンテーションで数学的モデルの検討・修正の過程をまとめて報告したのは、問題解決の結果以上に、検討・修正の大切さをこの数学的活動で生徒達が感得したためだと考える。特にグラフ電卓が算出した結果を鵜呑みにしてはいけないと結論づけたことは、これからの情報化社会に対応するための一つのクリティカルを自ら習得したと言える。

今回の調査では、生徒が発表したプレゼンテーション内容と OHP をもとに分析を行ったため、数学的モデルの評価・解釈、さらに、より良いモデル化を行う際の生徒の認知的行動や意思決定等の詳細が分析できなかった。今後の研究では、生徒の探究活動をビデオで収録し、生徒の活動を詳しく分析することが課題である。

### 引用文献・参考文献

- 1) Brown R. (1998). "Mathematical modelling and current events using hand held graphing technology". In P. Galbraith, W. Blum, G. Booker & I. D. Huntley (eds.) . *MATHEMATICAL MODELLING Teaching and Assessment in a Technology-Rich World*. England. Horwood Publishing Limited. pp.85-93.
- 2) 池田敏和 (1999). 「数学的モデリングを促進する考え方に関する研究」. 日本数学教育学会誌, 数学教育論究. Vol.71・72. pp.3-18.
- 3) 北澤嘉孝, 濱野久 (2000). 「数学的モデリング能力を高めるカリキュラムの開発とその効果」. 第 33 回数学教育論文発表会論文集. pp.229-234.
- 4) 三輪辰郎 (1983). 「数学教育におけるモデル化についての一考察」. 筑波数学教育研究. 第 2 巻. pp.117-125.
- 5) 中村好則, 黒木伸明 (2004). 「聾学校における数学的モデリングを取り入れた指導の可能性」. 日本科学教育学会第 28 回年会論文集. pp.281-284.
- 6) 西村圭一 (2001). 「数学的モデリングの授業の枠組みに関する研究」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 83 巻. 第 11 号. pp.2-12.
- 7) 大澤弘典 (1996). 「現実場面に基づく問題解決 -グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第 9 号. pp.16-20.
- 8) 大澤弘典 (1998). 中学校における数学的モデリングの指導についての研究-生徒によるグラフ電卓の利用を視点として-. 上越教育大学大学院修士論文.
- 9) Pollak H. O. (1980). 「数学と他の学科との相互作用」. 数学教育国際委員会 (ICMI) 編. 数学教育新動向研究会訳「世界の数学教育その新しい動向-」. 共立出版.

pp.299-320.

- 10) 佐伯昭彦, 氏家亮子 (1998). 「数学的モデリングを重視した総合カリキュラム-身近な物理現象を数学的にモデル化する授業-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 80 巻. 第 9 号. pp.10-18.
- 11) 佐伯昭彦, 氏家亮子, 槻橋正見 (1999). 「実現象データを解釈する数学的モデリング能力の段階について」. 第 32 回数学教育論文発表会論文集. pp.495-500.
- 12) 佐伯昭彦, 氏家亮子 (2003). 「数学的モデリング過程における学習者の実データ解析方法-「お湯の冷め方」実験での数学的モデルの解釈・評価・より良いモデル化-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 85 巻. 第 3 号. pp.12-21.
- 13) Saeki A., Ujiie A. and Kuroki N. (2004). "Students' Analysis of the Cooling Rate of Hot Water in a Mathematical Modelling Process". ICMI (the International Commission on Mathematical Instruction) Study 14. Pre-Conference Volume. pp.235-240.
- 14) 鹿野敏一 (1997). 「コーヒーはどんなふうに冷めていく? -温度の下がり方を関数で探究/データ収集機と数学的モデリング-」. 佐伯昭彦他編著「テクノロジーを活用した新しい数学教育-実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善-」. 明治図書. pp.100-107.
- 15) Stephens M., 柳本哲 (2001). 総合学習に生きる数学教育. 明治図書. P.28.
- 16) 柳本哲 (1996). 「中学校における数学的モデリングについて-給水タンクを事例として-」. 日本数学教育学会誌. 数学教育. 第 78 巻. 第 5 号. pp.2-9.

巻末資料 5 : 教材のワークシート (pp.263-265) 参照