上越数学教育研究，第30号，上越教育大学数学教室，2015年，pp.1-12.

関数の対象としての成立を視野に入れた教科書の試案

布川　和彦
上越教育大学

１．はじめに

中学生にとって関数の学習が難しいだけでなく、そもそも関数とは何かがわからないのではないかとの可能性が指摘されてきた(上田, 2009; 山岸, 2009)が、現在においても類似の報告は依然としてなされている(例えば盛田, 2014; 山口, 2014)。例えば盛田 (2014)は中学校３年生に、関数に関わる用語がどの程度理解できるかを４段階で回答させている。その結果、切片や傾きについては 73%の生徒がよくわかる、だいたいわかると回答したのに対し、関数についてはよくわかると回答した生徒が 9%、だいたいわかると回答した生徒が 14%であった。また変数についても両者を併せて 20%との結果だとしている。

こうした現状の１つの原因として、関数が数や図形のように思考の対象、探求の対象、学習の対象として生徒には成立していないことが考えられ、さらに、その成立を難しくしている原因の１つに、教科書での関数の語り方、あるいはそれにもとづく私たち教師の関数の語り方があると考えられる (布川, 2014a)。つまり、関数に関する記述や説明が、関数が数学的対象として生徒に感じられるように、語られていないのではないか、ということである。

こうした問題に対する１つの対応は、関数を数学的対象として生徒が感じやすくするよう、教科書や教師の語り方を修正していくことである。定義の際に「関数とは何か」が把握しやすい語り方に変えるとともに、関数についての学習における教科書や教師の語り方についても、そこでの活動が定義された関数というものと、どのように関わっているかが明確な語り方にすることが、必要となる。それにより、活動を通して「関数がどのようなものか」の感じが高まることが期待される。

そうした方針に基づき、中学校の関数領域の教科書試案を作成しているが、本稿ではその基本的な修正の方針を、先行研究と関連づけながら述べることにしたい。

なお、布川(2014a)でも触れたが、次のような指摘から、関数自体を教えることをやめ、関数的な考え方に焦点を絞ることを提唱する立場もある(板垣, 2000)：「実体のない『関数』を、われわれの教材観のなかで仮想現実化し、式、表、グラフを『関数』の表し方と呼んで、式や表やグラフを関数に従属する３点セットに観る『まとめ方』を流行らせた」(p. 2)。 この指摘では、関数という対象自体を扱うことを、中学校では行わないことを提案しているようにみえる。しかし本稿では、基本的には現行のように関数を学習するという前提に立ちながら、関数を対象として捉えることをできるだけ支援する、という点から考えていくこととする。

また本稿では、対象の成立の中でも「統合された全体」としての entity (Sfard, 1992)、あるいは１つの客観的対象とみなすと判断される something (Dörfler, 2002)の成立を考え、生徒の持つ存在論的な信念(Sfard, 1992)は問わないこととする。

２．試案作成の方針

中学校の数学で現れる他の数学的対象との比較などによるこれまでの検討から、生徒に関数を対象として感じてもらいやすくするために、以下の点について具体的な検討が必要と考えられる。

（１）関数の定義の際の語り方

現行の中学校の教科書では、次のように関数を定義している：「ともなって変わる２つの変数 x, y があって、x の値を決めると、それに対応する y の値がただ１つ決まるとき、y は x の関数であるという」。この定義については、他の概念の定義と異なり、「～となるＡを関数という」という語り方になっておらず、そのため、関数が何かということを直接説明する形になっていない (布川, 2014a)。

こうした語り方は「関数とは何か」という生徒の疑問に、「関数とは～となるＡである」と直接的に答えることを難しくする。そこで、関数の定義を「～となるＡを関数という」という形の語り方へと修正を試みる。

（２）関数についての語り方の一貫性

関数が何かを示唆する記述があっても、それらが一貫しない場合には、結果的に関数とは何かのイメージが確定しにくいと考えられる (布川, 2014a)。したがって、関数に関わるさまざまな活動も、関数に関連する知識を学習する機会としてだけでなく、関数とは何かを確認したり、その理解を深める機会となるように、活動の指示についての語り方も、定義との一貫性を持たせるようにする。

関数をある諸性質を持つ対象としてとらえることがその理解にとって重要であり (Slavit, 1997)、またあるものについてその性質を探求することが数学的な対象が成立する上で重要である (Dörfler, 2002) ことを考えると、関数に関わる活動においても、それが関数の性質を探求するものであることが、生徒にわかりやすい語り方にしておくことが必要になる。

（３）関数の諸性質の関連付け

van Hiele の思考の水準論によれば、数学的な対象としての図形が成立する前提として、諸性質の間を関係づけた関係網の構築がある (布川, 1992, 1993)。布川 (2011) は、関数についてこうした議論との類推から、以下のような１つの可能性を示している：数量関係を考察している現象について、その現象で見出されたきまりの間を関連づけることで、それらのきまりが１つの数量関係の現れとしてとらえられ、その結果として数学的対象としての関数が成立する。

中学校の関数の学習では、日常的な現象を多様に考察し、いろいろなきまりを見出してから関数を導入するというよりも、むしろ関数という概念を導入して、その諸性質や表現方法を学習するという流れとなっている。そこで、学習する諸性質の間を関連づけることで、それらの諸性質が１つの対象についての性質であるという感覚を高めることとなり、逆に関数という対象が成立する可能性を高めることになると考えられる。

（４）関数に対する操作

数学的概念の二重性 (duality) の議論によれば、操作や過程として捉えられていたものが一定の構造を持つ対象となるには、その過程が内面化、圧縮化、モノ化 (reification) の流れを経るとされる。さらに、モノ化した概念は別の操作の対象となるともされるが、逆にそうした操作の対象となることでモノ化が促される可能性もあるとされる。ただし、操作を施すにはモノ化されていなければ難しいとも考えられ、ひとつのジレンマがあると言える (Sfard, 1995, p. 35)。

微積分などでは関数を表す式に対して操作を施す。また関数の和を考えたり、合成関数を考える場合も、関数の式をもとに、多項式の和を求めたり、変数部分へ他の関数の式を代入するといった操作を行うであろう。しか

し、こうした操作を関数学習の初歩にある中学生に行わせることはできない。そこで、コンピュータの作図ツールを利用し、関数の式に対する操作とは異なる形で、関数に「触れる」ことを経験できるように試みる。

以下では、これら４つの点を教科書試案ではどのように具体化したかについて述べていく。なお、より詳細な記述については、以下のウェブページにある試案をご覧頂きたい。
http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/00_Learning_Functions.html

３．関数の定義の際の語り方

上で述べたように、現行の教科書における関数の定義に見られる語り方では「関数とは何か」という生徒の疑問に直接的に答えにくいので、関数の定義を「～となる A を関数という」という形の語り方へと修正できないかを考えてみる。

関数が何かをより明確にし、他の概念と同様、「～となる A を関数という」という語り方により定義するためには、A に当たる部分を選択する必要がある。１つの立場は、数学における関数の定義に従うものであり、それによれば、A に当たる部分はある種の「写像」と言うことになろう (例えば、松坂, 1968)。しかし、この場合は関数の定義以前に写像を定義しておく必要が出てくる。

Cooney ら (2010)は、米国で使われていたいくつかの教科書における関数の定義を比較している。それを見ると、順序対の集合や直積集合の部分集合といった現代的なもの以外の定義では、入力と出力の間の「関係」、変数 x の各値に y の値を割り当てる「規則」、２つの集合の間の「写像」あるいは「対応」が上の A として用いられている。

これは、いわゆる現代化の時期の中学校の教科書で採用されていた定義と似たものと言える。現代化の時期の教科書では、関数は以下のように定義されていた ：「２つの集合 A, B があって、A のどの要素 x に対しても、B の要素 y をただ 1 つだけ対応させることができるとき、この対応のきまりを A から B への関数という」(加藤ほか, 1976, １年 p. 107)。また同時期の他の教科書では「対応」を関数であると定義したり、関数とは「一意対応にほかならない」と特徴づけるといったことがなされていた (布川, 2014a)。

この時期の教科書では、中学校 1 年の早い時期に集合について学習をし、その中で、集合の各要素に別の集合の要素を「対応」させるという活動を、かなり豊富に行っている。これを受けて、関数を初めて学習する 1 年の単元において、最初に「紙の枚数 x とそれに対応する代金 y」を考え、それを数の組 (x, y) で表したり、そのときの「x と y の対応のきまりを表す式」を求めたりしている。つまり「対応」や「対応のきまり」についても、多くの活動を行った上で、先に見た定義が導入されていた [1]。

現行の教科書の定義でも、「x の値を決めると、それに対応する y の値がただ 1 つ決まる」と、「対応」の用語が現れてはいる。しかし現代化の時期に「対応のきまり」として考えていた内容は、現行の教科書では、「x と y の間の関係」「数量の間の関係」に相当すると考えられ、「対応」の用語を用いては表されていない。したがって、「対応」あるいは「対応のきまり」として関数を定義することは、現行の教科書の構成からは無理が生ずると考えられる。

現行の教科書では単元の最初に「x と y の間の関係」「数量の間の関係」に着目していることを利用して、「変数 x, y の間の関係」として関数を定義することも、考えられる。ただし、この場合、単なる２量の関係ではなく、変数間の関係とはどのようなことかを定義する必要がある (布川, 2014a)。また関係として定義する場合、変化の側面が現れにくい

ことに加え、１次関数の利用でしばしば見られる人が移動する問題のように、区間により関係が異なる場合について、関数と捉えにくくなる可能性もある (布川, 2014b)。

そこで、現行の教科書の構成での学習を考慮し、現行の定義を「〜となるＡを関数という」という形に近づけることを試みる。現行の教科書で行われている定義では、２つの変数の間に一定の関係があるときに「y は x の関数である」というのであった。これを「y は『x の関数』である」と解釈をするならば、ある種の条件を満たす変数 y が関数だということになる。つまり、現行の教科書での定義を「〜となるＡを関数という」という語り方に近づけるならば、次のような定義を得ることになる：「ともなって変わる２つの変数 x, y があって、x の値を決めると、それに対応する y の値がただ１つ決まるとき、変数 y を x の関数という」。

竹内(1970)によれば、関数概念には対応としての関数の見方と変数としての関数の見方の両方が含まれているとする見解が、以前からなされていた(p. 27)。つまり、「変数としての関数の見方」は、１つの可能性として以前から採用されていたことになる。また、阿部ほか (1978)では関数の３つの定義を提示しているが、そのうちの一つは「[定義２] 二つの変数 x、y があって、x の値をきめると、それに対応して y の値が一つきまるとき、y を x の関数という」(p. 65)というものであり、やはり、「y を x の関数という」という捉え方が以前からなされていたことを示している。

また歴史的にもそうした捉え方を見ることができる。岡本と長岡 (2014)がオイラーの定義として引いているものでは「x に依存する、あるいは x から決まる量は x の関数と呼ばれる」となっている。また、彼らが「連続関数の範囲内であるが、ほぼ現代の関数の定義であるといってよい」(p. 39)とするロバチェフスキーの定義でも「x の関数と呼ばれるのが、それぞれの x に対して定まり、x とともに少しずつ変化するような数のこと」となっている。つまり、関数をある種の条件を満たす変数あるいは変量として定義することが、なされてきたと言える。Sfard (2008)は、上のオイラーの定義により、関数が目で見える表現とは独立に存在する抽象的な実体として現れたとしている (p. 176)。

さらに、他領域で関数が利用されるときにそうした意味で使われることも多い。例えば尾山と安田 (2013)では以下のような使われ方をしている：「ある財に対する需要の価格弾力性が価格 p の関数として $e_d(p)$で与えられている」(p. 161)。ここで e は弾力性(elasticity)の頭文字であり、$e_d(p)$は価格弾力性という変数を表していると考えられる。つまり、他の変数 p で決まる変数が関数としてとらえられている。

以上より、今回の教科書試案では、以下のように関数を定義することとした：「『変数 x の値を決めると変数 y の値が１つ決まる』と考えているとき、『y は x の関数 (function) である』といいます。つまりここでは、別の変数 x により決まる変数 y を関数と呼びます」。

この定義の前半について、１点補足をしたい。それは、２つの量の間の共変的な捉え方と関数的な捉え方に関わる問題である。関数を考える場合には、２つの量がともなって変わるという共変的な捉え方と、一方の変数の各値に対して他方の変数が１つ決まるとする関数的な捉え方の双方が重要であり、それらが組み合わさった形で関数を捉えることが必要と考えられる (布川, 2010)。

ここで小学校４年でともなって変わる量を学習することや、６年の比例の学習でも x が２倍、３倍、・・・になると y も２倍、３倍、・・・になることに基づいて定義することを考慮すると、共変的な捉え方を前提とするのが自然と考えられる。その上で、とも

なって変わる量のうち一方の変数の値が決まると他方も決まると見ることにすると、この依存関係がある「ので」２量はともなって変わると考えることができる。つまり、ともなって変わる２つの量に対する１つの捉え方として関数的な捉え方を導入することとし、上述の定義を行う前に次の説明を行った：「２つの量がともなって変わっているとき、その場面を考える上で次のようなことが大切になってきます。1. 一方の量が変わるとき、もう一方の量は全体としてどのような変わり方をするだろうか。2. 一方の量がある値のときに、もう一方の値はいくつになるだろうか。」「実は、２番目のことがわかると、１番目のことも調べることができます。つまりともなって変わる２つの量を x, y で表すとき、x を決めると y がどう決まるのかがわかると、x が変わるとき y が全体的にどのような変わり方をするかも調べることができるのです」。

こうした導入は、次のような　現代化の時期のある教科書の単元の扉に見ることができる：「ともなって変わる２つの量の変化のようすを明らかにするためには、一方の値と他方の値とが、どのように対応しているかを調べることが基本となる」(正田ほか, 1977, １年 p. 103)。

関数的な捉え方をすることで、共変的な捉え方がある意味で一般化される。独立変数が変化しても従属変数が変化しないという場合についても、全ての（またはある範囲の）独立変数に対して従属変数は一定の値をとる場合として、統一的に扱うことが可能となる。いわば、０を導入することで、ものがない場合も他の個数の場合と同様に扱うことができるのと似ている。

数学的な対象の構成について Dörfler (2002) は次のように指摘し、その決定が視点の変更に結びついたものだとしている：「学習者は『これ』を、それ自身１つの対象として考えるべきかを、決心しなければならない」(p. 342)。そして教師は「この決定ができるだけ、理にかなっていてもっともらしいと見えるようにする」(p. 346)べきだとしている。共変的な捉え方を関数的な捉え方で定義し直すと明言することは、ともなって変わる２つの量をある仕方で１つの対象と考えるべきとの決定を促すものと言える。その上で、ともなって変わる２つの量の変化のようすは、関数という視点で考えていくとより明確にできると感じられる経験を、私たち教師が提供することで、その決定が理にかなっていると見えるようにしていく必要があると考えられる。

４．関数についての語り方の一貫性

Freudenthal (1983)は表やグラフを「独立変数と従属変数の間の結びつきを記述する直接的なパターン」あるいは装置(device)だとしている (p. 498)。したがって、関数を表やグラフに表すときは、それが関数の定義で用いた変数間の結びつきを表現していると、生徒が理解できるように留意する必要がある。

また、対象の意味が、対象が生じてきた問題群に結びつけられた実践により決まる (Godino & Batanero, 1998) とすれば、ともなって変わる２量を含む場面について、どのような探究をするのかが、関数の意味に大きく関わることになる。例えば、前節の最後に引用した現代化の時期のある教科書からの引用は実は次のように続いている：「そのためには対応のようすを表にする、対応のようすをグラフに表す、対応のきまりを式に表す、などの方法によって、対応のようすを示すようにする」(正田ほか, 1977, １年 p. 103)。ここでは、表とグラフは対応のようすを表すものであり、式は対応のきまりを表すものであるがこれも「対応のようすを示す」ために行うものであることが明確にされている。そして前節で引用した部分と合わせて考えるならば、これらの表現方法により「対応のようすを示す」のは、「どのように対応しているかを調

べ」、「ともなって変わる２つの量の変化のようすを明らかにするため」である。また、ここで対応や対応のきまりに焦点が当てられていることは、前節で見た現代化の時期の教科書における定義と整合している。

以上のことを考慮すると、関数を表、グラフ、式で表すなどして関数に関わり活動をするとき、あるいは関数という考え方を用いてある種の問題に関わり活動するときには、それらの活動の指示や活動についての説明の仕方が、前節で採用した関数の定義に整合するものであることが求められる。つまり、教科書の関数に関わる語り方が、採用した定義と整合するようにする。それにより、活動の指示や説明に生徒が接することが、関数の意味を補強すると期待される。

例えば、関数のグラフを考えてみる。現行の教科書では関数の式をもとに表を作り、そこから x, y の値の組を作り、それを座標(x, y)と見なして座標のある図の中にかき入れるという流れをとることが多い。このときグラフと関数の定義との関わりは直接は見えにくい。

そこで教科書試案においては両者をより直接的に結びつけることを試みる。「１次関数の表現」という節において「xの値を１つ決めるとそれに対応して y の値が決まるようすを、座標を利用して、次のように表現する」として、図１を示しながら、「座標が(3, 7)である点が、『x=3 に決めると、それに対応して y=7 と決まる』という対応を表している」ことを明示的に説明した。つまり、まず「点の座標を用いて x の値を１つ決めるとそれに対応した y の値がいくつに決まるかを表現することができ」ることを確認することで、グラフが定義で用いた変数間の結びつきを直接表現するものであることが、見えやすいようにした。

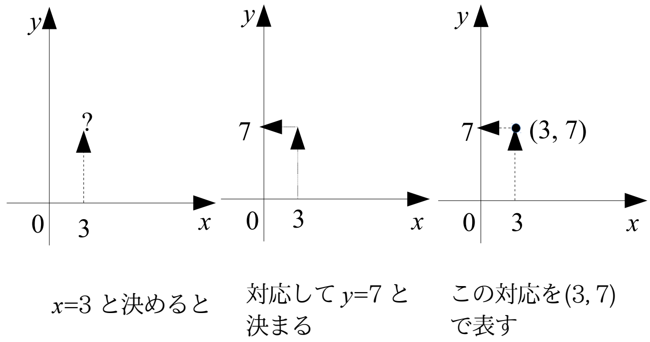

図１

その上で、直線や曲線は「無数の点の代わりにかかれたもの」であると位置づけた。つまり、本来であれば、全ての x の値について「x の値を１つ決めるとそれに対応した y の値が決まるようす」を多くの点で表現すべきであるが、全ての x の値についてそうすることができないので、その代用として直線や曲線を用いることを明確にすることで、直線や曲線が定義で用いた変数間の結びつきの表現であることが見失われにくいようにした。これはグラフについて、その走査 (scan)過程を明確にすること(Sfard, 2008, p. 154)でもある。

式、グラフ、表については、それらがどのような意味で関数の表現であるかを考える場も設けた。変数 y が変数 x の関数であるということは「変数 x の値を決めると変数 y の値が１つ決まる」と考えることであるから、何かが「関数の表現」であるということは、「変数 x の値を決めると変数 y の値が１つ決まる」様子を表している、あるいはその決まる様子がそこから読み取れることを意味する。

上のグラフの導入は、この様子を表すことからグラフが生ずることを考えている。その後では「グラフから情報を受け取る」として、逆にグラフが与えられたときに、そこから「変数 x の値を決めると変数 y の値が１つ決まる」様子がわかることを確認している。１次関数の学習では、グラフについて確認した後に、同様のことを表についても扱い、離散的であるとの制約の下で表が関数の表現に

なっていること、また表にある値に見られるパターンがそれ以外でも成り立っているとの前提を置く必要のあることを確認している。

式についてはグラフを導入する前に次のように確認をした：「y=2x+1 という式は、それぞれの x の値に対応する y の値をいつでも教えてくれ、それにより、x の関数 y のようすを知ることができます。したがって、 y=2x+1 という式はいま考えている関数を十分に表しており、関数の表現であるといえます」。表現について語る際に定義との一貫性に注意を払い、それぞれがどのような意味で「関数の表現」となっているのかを確認することで、関数がどのようなものかを再確認する機会にもなりうると考えられる。

式が関わる語り方については、次のような点にも配慮を行った。例えば 1 次関数の場合、「y が x の関数で、y=3x+10 のように、y が x の 1 次式で表されるとき、y は x の 1 次関数であるという」と定義がされた直後から「1 次関数 y=2x+3 で」といった語り方が行われる。これは関数とその表現の同一視 (Font ら, 2010)と言える。表現と表現されるモノを同一視することは、初学者に対して式で表現されるモノがあるのかを曖昧にする危険性があると考えられる。他方で、同一視をした表現を避けることは、記述を煩瑣なものとすることから、全く使用しないことには無理がある。

そこで、こうした語り方をすることを次のように、明示的に断っておくこととした：「y が x の 1 次関数で y が y=ax+b という式で表されるとき、このことを簡単に『1 次関数 y=ax+b』と表すこともあります」。また必要に応じ、次の確認を行うこととした：「『1 次関数 y=2x+1』という言い方は、次の 2 つのことを意味しているのでした。＊変数 y は変数 x の関数である。つまり、x の値を決めると、それに対応して y の値がただ 1 つ決まる。＊ x の関数である y の決まり方は、y=2x+1 という式により表現することができる。いいかえると、変数 x と x の関数 y の間にはいつでも y=2x+1 という関係が成り立っている」。

なお、この最後の部分に出てきたように、教科書試案では、可能な箇所においては「x の関数 y」という語り方を意図的に採り入れた。これも、今回の試案では関数の定義を「別の変数 x により決まる変数 y を関数と呼ぶ」という立場に立って行ったことによるもので、できるだけ定義に沿った語り方をすることで、関数とは何かが曖昧にならないための方策である。

関数について学んでいるという語り方にするためには、個々の学習内容についても、できるだけ関数の性質を調べているという語り方にする必要がある。現行の教科書では、変化の割合が一定であり、その値が y=ax+b の a に等しいことを学習した後、a はグラフの傾きとして、b はグラフを y 軸方向に平行移動する大きさとして意味づけられることが多い。これらは重要な事項であるが、グラフの特性について語る形になっている。試案ではまず最初に、関数自体の特徴として語ることを試み、「1 次関数の特徴」という節を設定した上で、「1 次関数 y=ax+b の変化の割合が一定であることから、1 次関数はいつも同じペースで変化することがわかります」、「1 次関数が比例 y=ax からどの程度ずれているか」を表すとまとめた。また a の符号は関数の増減についての特徴を、a の絶対値の大きさは関数の変化の程度についての特徴を教えてくれるという語り方にした。

式からグラフをかくこと、あるいはグラフや表から式を求めることについても、1 次関数の特徴に目を向け、それに関わる情報を与えられた表象から取り出すという語り方にすることで、グラフや式を求めるときも、考えている対象は関数であることを見失わないように配慮した。

５．関数の諸性質の関連付け

Slavit (1997) は、関数の諸性質を認識することが、性質のもとにあるはずの数学的実体として、関数の構造的な捉え方を促すとしている。学習する諸性質の間を関連づけること、特に諸性質を定義から導かれるものとして理解することは、定義が１つの対象を表現しており、その対象の特徴としてそれらの諸性質が生まれているとの感覚を高めると考えられる。つまり、諸性質の背後に関数という対象が成立する可能性を高めることになると考えられる。

例えば、１次関数の学習では、その定義が導入された後、変化の割合を学習する。現行の教科書では、１次関数の式からまず表を作り、その表で x が１増えたときの y の増加量、x が２増えたときの y の増加量などを調べ、x の増加量をもとにしたときの y の増加量の割合が一定になることに注意を向けている。１次関数は y が x の１次式で表されることで定義されるが、式は表を作る際だけに用いられる場合もあり、その場合、変化の割合が一定になるという性質と、１次関数は y が x の１次式で表されるという定義の間のつながりは見えにくいものとなっている。

そこで教科書試案では x が１増えたときの y の増加量、x が 0.5 増えたときの y の増加量、x が 0.1 増えたときの y の増加量を調べて、x の増加量をもとにしたときの y の増加量の割合が一定になることを予想した後、「この予想が正しいのか、今度は式に戻って考えてみましょう」として、次のような活動を取り入れた。

まずいくつかの数値について以下のような計算を行う。

$$\frac{(3\times 5.1+2)-(3\times 5+2)}{5.1-5}=\frac{3\times(5.1-5)}{5.1-5}=3$$

その上で次の式を確認し、「１次関数 $y=ax+b$ の変化の割合は、いつでも x の係数 a に等しくなること」をまとめる。

$$\begin{aligned}\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}&=\frac{(a\times x_2+b)-(a\times x_1+b)}{x_2-x_1}\\&=\frac{a\times(x_2-x_1)}{x_2-x_1}\\&=a\end{aligned}$$

これにより、１次関数の定義で用いられる１次式が、変化の割合が一定という性質を生み出していること、また一定になる値が１次の項の係数と一致することにも、必然的なつながりがあることを理解できることになる。つまり、１次関数の性質が１次関数であることから生じていることに、目を向けた語り方となっている。

実はこうした扱い方は、現代化の時期の教科書には見られたものである。ある教科書では、「x の増加量は 7−4、y の増加量は(2×7＋3)−(2×4＋3)=2×(7−4) となり、 y の増加量は x の増加量の２倍になっている」として、変化の割合が２になることを１次式と関連づけている。また、別の教科書では比例について変化の割合を考える活動をはさみ、その際に次の計算を行っている。

$$\frac{3\times 3.8-3\times 2.5}{3.8-2.5}=\frac{3\times\cancel{(3.8-2.5)}}{\cancel{3.8-2.5}}=3$$

これらも、１次式と性質を関連づけようとしたものと考えられる。

グラフが直線になることは比例や１次関数の１つの特徴と言える。しかし、それが１次関数の１つの性質と捉えられるためには、１次関数であることとグラフが直線になることが関連づけられる必要がある。つまり、１次式で表されることから、グラフが直線になることが導き出される必要があろう。

そこで今回の教科書試案では、「この式の特徴から、そのグラフが直線になることを考えてみましょう」として、次のような活動を取り入れた。ただし、説明は比較的煩瑣となるため、本文ではなく、節末の補足に留めることとした。

まず、 $y=2x+1$ という式をもとに、３つの x

の値に対応する関数 y の値を求め、それぞれの x に対応して y がきまるようすを点で表す。図２左では３点 O(0, 1)、A(1, 3)、B(2, 5)がとられている。

この３点をもとに図２右のような△OAC と△OBD を考える。ここで、O, A, B が一直線上にあるように見えるが、これは単に重なっているように見えるだけで、「まだ点 O、A、B が同じ直線の上にあるのかはわかりません」と断った上で、「同じ直線にあることを示すために、∠AOC（＝∠AOD）と∠BOD の大きさが等しくなるか」を考えさせる。１次関数を中学２年で学習するとすれば、まだ相似は学習していないので、６年生で学習する拡大図・縮図の知識を用いることとした。拡大図のかき方の知識を用い、点 C と D を重ねると、△OBD は△OAC を２倍に拡大した三角形と見ることができる。すると、拡大図では「対応する角の大きさも等しくなっています」という知識を用いることで、∠AOC=∠BOD を示すことができる [2)]。

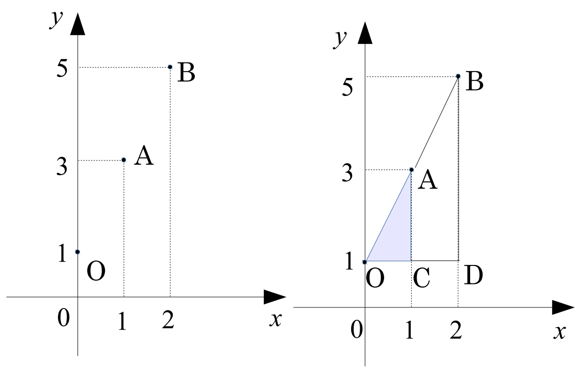

図２

同様に考えて、１次関数 $y=ax+b$ についても、$|a|>1$ の場合は$|a|$倍に拡大した三角形、$|a|<1$ の場合には$|a|$倍に縮小した三角形が得られることを確認し、１次関数の場合には、「その x と y の対応を表現する点」は、「いつでも点 O と点 A を結ぶ直線の上にあること」がわかるとしてまとめた。

上で述べたように、式から変化の割合が一定であることを示しているので、その結果を利用して、上図で OD=a であれば、DB=2a になるとすることもできよう。大切なのは、図形の性質の場合のように性質の間の関係を考え、定義から他の性質が派生するとの理解を可能とすることであり、それにより、“１つの何か”の諸性質を調べているとの感じを持ちやすくすることである。

６．関数に対する操作

布川 (2010)は、２つの変数の「共変のアイデアが…目と手の間の連携を通して経験される」(Falcade et al., 2007, p. 331)ことを期待し、一方の変数 x を学習者が動かすと、他方の変数 y が一定の関係を持って動くような、作図ツールを利用した活動を提案している。こうしたコンピュータの利用は、生徒が自分で変数 x を操作したときに、それにともなって変数 y が変化することを観察できるとともに、各 x に対して y の値がきまることも観察できるような経験を可能にする。同時に、式をもとに各 x に対する y の値を計算する場合と異なり、構造的な捉え方への移行に必要とされる圧縮化 (Sfard, 1992)が生じやすいと考えられる。したがって、本稿のように「別の変数 x により決まる変数 y を関数」とする定義に基づくとき、関数とは何かを感得することに有用と考えられる。

そこで、単元の最初に図３のような作図ツールを利用したワークシートを配置した。

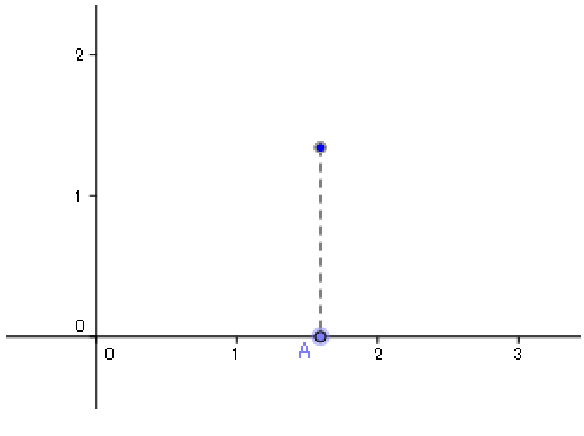

図３

x 軸上の点 A は x 軸に沿って生徒が自由に動かすことができるようになっており、それにともなって上方にある y の値を示す点が動くようになっている。y が x により決まることを意識しやすくするために、２つの点を点線で結んでいる。x を動かすとこの点線も伸び縮みすることになり、y の値を強調する形になる。

また、この対応して決まることの全体的なイメージが持てるように、グラフを表示することもできるようにしている。図４はグラフを表示させた状態である。

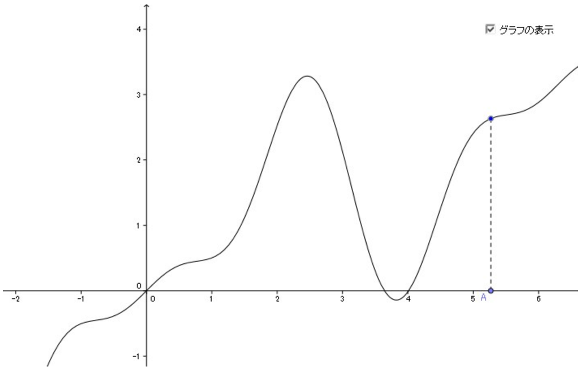

図４

なお、上のワークシートでは点 A を生徒自身が自由に動かすことができることから、数値を代入する操作をより連続的に施すことができる。教科書では変数を「いろいろな値をとる文字」として導入しているが、点 A を自分で動かすことは、「いろいろな値をとる」ことの意味を理解し、変数という数学的対象を把握することにも有用と考えられる。

第１節で触れた盛田 (2014) の調査では、変数がよくわかる／だいたいわかると回答した生徒も 20%存在し、関数より低い結果となっている。本稿ではある条件を満たす変数 y を関数として定義したので、変数がどのようなものか、また一方の変数により他方の変数が決まるとはどのようなことかを理解することは、関数を対象化する上で重要となる。

さらに自ら点を動かすことは、グラフの動的な扱いにもつながる。上田 (2009) は中学校２年の１次関数の学習を、３種類の動き方をする魚のアニメーションとグラフとを組み合わせた提示により始めた。それにより、他の２種類の動きとの比較で、生徒は比例的な動きを「直線なら速さは一定」と特徴づけ、その見方を利用して、自ら１次関数の式やグラフを構成していた。その学習過程の考察を通して、上田 (2009) は「初学者のうちは動的な見方でグラフを考察しながら全体の変化の特徴を構成させせることが重要」と述べている。対応により決まるという過程の圧縮化と、動的な扱いによる共変的関係の視覚化により、両者の組み合わさった捉え方(布川, 2010)も促されることが期待される。

ここでのワークシート上の操作は、関数の構造的な捉え方で話題にされる操作、すなわち、合成関数を作る、関数どうしの四則計算を行う、関数に微分や積分を施すといった操作ではない。しかし、２変数の間の対応の関係と共変の関係を自分の手で制御してみること、y が x の関数になっている現象に自ら参加してみること、いわば関数に直接「触れてみる」ことになっている。その意味で、関数に対する操作と位置づけることとした。

y=ax+b の a や b をスライダーにより連続的に変えると、式やグラフが連動して変わるワークシートも取り入れているが、これらも関数に「触れる」、関数を「動かす」という意味では、関数に対する操作と言えよう。

ただし、今回のワークシートでは、変数 y を表す点が平面上を動く形になり、実数値の変数であることと整合しない。それにより、グラフの形状自体を変数の変化の仕方と誤解する可能性もある。今後、それに関する修正が必要となると考えられる。

７．おわりに

大谷ほか (2014)は、関数について本稿と同様の立場をとった上で、x の関数 y の変化の仕方に注意を向けること、またその前提とし

て x の関数 y を考察の対象として生徒が感じることを促すために、x の関数 y を「忍者」として擬人化している。これは、x の関数 y の変化のようすに焦点を当てる一つの方途と考えられる。

x が一定のペースで増加するときに変数 y がどのように変化するかを考察することが、関数についてのディスコースにおける重要な実践であるとするならば、その変化に焦点を当てやすくする語り方は、主導的なディスコースや期待されるディスコースを教師と生徒の間で共有すること(Sfard, 2008, p. 283)に資すると考えられる。また、関数に関わる語り方に一貫性を持たせることで、このディスコースで扱われる対象についての焦点が合いやすくなり、関数が要するにどのようなものなのか、に関わるメッセージが明確になる。これにより、単にグラフや式、表についてなじませるだけなく、「関数についての明確な会話に生徒たちを引き込」み(Nachlieli & Tabach, 2012)、生徒をこのディスコースの参加者として誘うことになると考えられる。

謝辞：本研究は科学研究費助成事業・基盤研究(B)(課題番号： 24300267, 研究代表：大谷実）および基盤研究(C)(課題番号：25350190）の助成を受けている。１次関数の授業について議論をして頂いた大谷実、日野圭子、漢野有美子の各氏にお礼申し上げます。本稿の意見は筆者によるものであり、必ずしもプロジェクト全体の見解を反映するものではない。

註および引用・参考文献

1) 「対応のきまり」で関数を定義した教科書では、２年の学習において対応のきまりを記号 f で表すこととし、x の対応する値を $f(x)$ で表し、これが y と等しいので $y=f(x)$ としている。これは、対応のきまりを対象化する試みと考えられる。

2) 直線上にない点があると、変化の割合が一定にならないことを示すこともできよう。

阿部浩一・出石隆・大野清四郎・古藤怜・中野昇. (編). (1978). 新・中学校数学指導講座４：関数. 金子書房.

Cooney, T. J., Beckmann, S., & Lloyd, G. M. (2010). *Developing essential understanding of functions for teaching mathematics in grades 9-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dörfler, W. (2002). Formation of mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning*, *4* (4), 337-350.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 317-333.

Font, V., Godino, J. D., Planas, N., & Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and synecdoche in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics*, *30* (1), 15-19.

Freudenthal, H. (1983). Functions. In H. Freudenthal, *Didactical phenomenology of mathematical structures* (pp. 491-578). Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

一松信ほか. (2012). 中学校数学１～３. 学校図書.

板垣芳雄. (2000). 「関数概念」あるいは「関数の考え方」を教えるということについて：教育課程論・試論. 日本数学教育学会第 33 回数学教育論文発表会論文集, 1-6.

加藤国雄ほか. (1976). 中学校数学１～３. 学校図書.

河口商次ほか. (1971). 新版標準中学数学１. 教育出版.

松坂和夫. (1968). 集合・位相入門. 岩波書店.

盛田直子. (2014). 式・表・グラフを連携させた１次関数の指導について. 第 63 回北陸四県数学教育研究(金沢)大会発表資料.

Nachlieli, T. & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom: The case of function. *International Journal of Educational Research*, *51/52*, 10-27.

布川和彦. (1992). 図形の認識から見た van Hiele の水準論. 筑波大学教育学系論集, *16* (2), 139-152.

布川和彦. (1993). van Hiele 理論に対する新たな意味づけ：インフォーマルな知識と発達の最近接領域を手がかりとして. 教育方法学研究, *19*, 37-46.

布川和彦. (2010). 数量関係の学習と背後の現象や共変性の意識化. 上越数学教育研究, *25*, 1-10.

布川和彦. (2011). 関数的内容の学習におけるきまりの関連づけと対象の構成. 上越数学教育研究, *26*, 1-12.

布川和彦. (2012). 関数的内容の学習におけるきまりの関連づけと対象の構成(2). 上越数学教育研究, *27*, 1-12.

布川和彦. (2013). 「数学：パターンの科学」の捉え方と学校数学の関係の検討. 上越教育大学研究紀要, *32*, 169-180.

布川和彦. (2014a). 中学校数学における関数の対象としての構成：教科書の考察を中心に. 上越教育大学研究紀要, *33*, 85-96.

布川和彦. (2014b). 中学校数学における関数の対象としての構成(2)： 教科書の利用場面に焦点を当てて. 上越数学教育研究, *29*, 1-12.

岡本久, 長岡亮介. (2014). 関数とは何か：近代数学史からのアプローチ. 近代科学社.

大谷実, 布川和彦, 日野圭子, 漢野有美子. (2014). ディスコースを視点とした数学的対象の構成：一次関数のデザイン実験の試み. 日本数学教育学会第 47 回秋期研究大会発表集録, 347-350.

尾山大輔, 安田洋祐. (編著). (2013). 経済学で出る数学. 日本評論社.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59-84). Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*, 15-39.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

正田建次郎ほか. (1977). 新訂数学１～３. 新興出版社啓林館.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 259-281.

竹内芳男. (1970). 関数・変数・変量. 日本数学教育学会第 5 回数学教育研究論文発表会要項, 25-30.

上田貴之. (2009). 関数の学習におけるグラフを利用したアプローチについて：中学２年「一次関数」の単元における影響についての一考察. 上越数学教育研究, *24*, 41-52.

山岸卓矢. (2009). 関数指導に関する研究：「二元一次方程式と一次関数」の指導を中心に. 数学教育研究 (新潟大学), *44* (1), 34-47.

山口靖博. (2014). 一意対応を意識させる関数指導の工夫：３年生「関数」の導入を通して. 第 63 回北陸四県数学教育研究(金沢)大会発表資料.