

中学校数学における変数の定義の特徴 —過去の教科書での定義および数学での定義による相対化—

布川和彦*

(令和元年8月27日受付；令和元年12月3日受理)

要 旨

本稿は、中学校での指導の工夫にも関わらず中学生の変数の理解が十分でないことから、変数という概念の定義の仕方が中学生に理解しやすいものであるかとの問題意識に立ち、中学校の教科書における変数の定義を検討したものである。そのために、過去の中学校教科書における定義および中学校以外の初学者に対する変数の定義をとりあげ、現行の教科書における定義とは異なる定義を見出すことにより、現行の教科書の定義を選択肢の一つとして相対化し、それにより現行の教科書における定義の特徴を明確にすることを試みた。なお過去の教科書としては、教科書会社により定義の仕方が異なっていた系統学習の時期と現代化の時期のものを対象とした。検討の結果、現行の教科書ではある種の文字として変数を定義していること、定義では「[値を]とる」という動詞が用いられていること、定義では変域に言及がされていないことなどが特徴として示された。これらの特徴から変数の指導に対するいくつかの示唆も得られた。

KEY WORDS

mathematics education 数学教育 variables 変数
definition 定義 discourse ディスコース

1. はじめに

変数は中学校1年の関数単元で導入され、次のように定義される：「いろいろな値をとる文字を変数といいます」。変数の理解は関数の定義を支え、関数の学習の基礎となるだけでなく、中学校2年で連立方程式と1次関数を関連させる学習で、方程式中の文字を変数として見直す際にも必要となる（榎本，2013）。しかし中学生が変数を十分理解していないとの指摘がしばしばなされてきた。例えば、盛田（2014）は自校の中学校3年生に、関数単元に現れる用語がわかるかを尋ねているが、「変数」という用語がよくわかるとの回答が7%，大体わかるが13%であったのに対し、あまりわからないのは48%，ほとんどわからないのは32%であった。「関数」でもわかると大体わかるを合わせて23%であり、これよりも低い理解度となっている。小岩（2016）は $3a$ と $a-3$ の大小比較を行う際の中学生の思考から4つの水準を特定し、「文字がとりうる値全体を凝縮してまとめて表していること」の理解に至っている生徒は中学3年生でも30%程度であり、多くの生徒が「文字や文字式から値全体を想定できない」水準にあると指摘している。真野（2011）が「変数性の背後にある無限集合」（p. 81）の意識化の重要性を指摘したり、Malisani & Spagnolo（2009）が文脈により生ずる値の範囲を意識することが重要としたりしているが、上の結果はその意識化が生徒には困難であることを示唆している。わが国では、文字を変数としてとらえるための指導の工夫が以前から行われてきている（例えば、過外ほか，1993）にも関わらず、こうした生徒の状況が引き続き見られている。

さらに関口（2003）は決まった数を表す文字が数値の変化という考えと「概念的融合」を起こすことにより「『変数』という文字が生み出され、『いろいろな数』を指すという新たな性質が備わる」（p. 249）ことに困難があるとして、高さが x cmの三角形の問題に対して、三角形は存在しているから高さは変わらないと発言した生徒の例を示している。Ely & Adams（2012）は変数としての文字の利用への移行にとって、共変する2量の関係を文字により表現する活動が重要であるとしているが、関口（2003）の事例は、その活動自体に困難があることを示唆する。

この困難の原因の一つとして関口（2003）は教科書の記述をあげる：「教科書の問題には、『変化』を強調せずに、単に、具体的数を文字で置き換えただけの記述が目立ち、変数としての文字の見方の妨げになっている部分が見られた」（p. 249）。教科書の記述は生徒の理解に影響を与える（Herbel-Eisenmann, 2007; Morgan, 1996; 布川, 2014, 2016）ので、変数に関わる教科書の分析も見られる。variableという用語は日本の未知数や変数など多様な意味を含む（Schoenfeld & Arcavi, 1988）が、教科書や時代により未知数と変数のどちらに重点があるかが異なる（Dogbey

*学校教育学系

& Kersaint, 2012; Nie et al., 2009) ことや、教師用書において変数の指導や教師の変数の理解に役立つ記述が十分でない (Dogbey, 2016; Ulusoy, 2013) ことが指摘されてきた。わが国の教科書については、国宗 (1994) が1社の教科書における変数や変域の扱われ方の変遷を分析している。その結果、昭和33年版は変数の用語に触れないが41年版では変数の定義が「今日使われているものと同様に行われている」こと、50年版では定義が「集合を前面に出した表現になっている」が、62年版では変域が集合として記述されなくなることを示している。また平成5年版については6社の教科書を比較し、6社とも「いろいろな値をとる[ことができる]文字」として変数を定義し、定義が「ほぼ統一されてきている」と述べている。

定義の仕方について、書き手は「いくつかの構造や内容の中から (意識的とは限らないが) 選択をしている」とするMorgan (1996, p. 3) の指摘を想起すると、この統一された定義もある選択の結果と考えられる。だとすれば、他の選択肢との比較により、変数の定義を相対化することで、今日用いられている変数の定義の特性が明確になることが期待される。

他の選択肢として考えられるものに、過去の教科書における定義がある。上述のように国宗 (1994) は昭和41年版では変数の定義が「今日使われているものと同様に行われている」としているが、当時用いられていた6社の教科書を見てみると、後述するように実際には昭和52年の教科書においてもまだ定義の多様性が見られる。そこでこの昭和52年の教科書を含むいわゆる数学教育現代化の時期と、その前の昭和41年の教科書を含む系統学習の時期の中学校の教科書における変数の定義を調べてみることは、今日の変数の定義を相対化するための1つの方法となりうる。

別の選択肢として、中学校の標準的な教科書以外において変数がどのように定義されているかを調べることが考えられる。中学生以外の数学の学習者に対して、変数がどのように定義されているかを調べることで、中学校数学における変数の定義を相対化できる。

そこで本稿では、中学校数学における変数の定義を、他の定義の仕方との関係で相対化することでその特徴を見いだすことを目的とするが、そのために、変数の定義が統一されていなかった系統学習期と現代化期の教科書における変数の定義と、中学校数学以外での変数の定義を検討する。それらの結果をもとに今日の中学校数学の教科書で用いられている変数の定義の特徴を探り、そうした特徴をもとに指導への示唆を考える。

2. 系統学習期と現代化期の教科書における変数の定義

前節でも述べたように、昭和40年代を中心とした系統学習の時期の教科書では、変数の定義は「今日使われているものと同様に行われている」(国宗, 1994) とされながらも、定義の際の表現などには多様性が見られ、また定義が行われる単位についても、現行とは異なり、教科書により違いが見られる。そしてこうした傾向は数学教育現代化の時期にも続いている。

具体的には、系統学習の時期にあたる昭和36年、40年、43年検定の教科書における変数の定義をまとめると表1のように、現代化の時期にあたる昭和46年、49年、52年検定の教科書における定義をまとめると表2のようになる。なお変化の有無を見やすくするため、短い語句の挿入、削除や数値の変更など軽微な相違のみの場合は1つのセルにまとめ、その相違点を付記した。逆に、定義の表現に変化が見られるものは異なるセルに入れた。

以下では教科書会社をイニシャルで表す：啓林館Kr, 東京書籍T, 大阪書籍O, 大日本図書D, 教育出版Ky, 学校図書G。またその後には検定年度を付して教科書を特定する。例えばKr36は啓林館の昭和36年検定の教科書を、T43は東京書籍の昭和43年検定の教科書を表す。

表1, 表2の定義を見ると、今日の定義とは異なる定義がなされている教科書も多く見られる。冒頭で示したように今日の定義ではある種の「文字」が変数であるとされているが、Kr36, Kr40, Kr43, Ky52の定義ではある種の数や数量を変数と定義しており、「文字」という用語を含んでいない。また変数である文字を特徴づける際に、今日の定義では「いろいろな値をとる」と説明されており、動詞「とる」が用いられているが、O36のように「示す」やKy40のように「表す」という動詞を用いた定義が見られる。さらに今日の教科書では窓を開けるとか水槽に水を入れるとかの具体的場面が提示され、その場面の中のある量を表現する文字として変数が導入されるが、現代化期の教科書の中にはそうした場面を提示せず、数からなる集合だけを考えた上で変数を導入しているものが見られる。そこで、これらの観点に基づいて表1, 表2の定義を分類してみると表3のようになる。

なおG36, G40ではそれぞれ「値が変わることができる文字」「値が変化することができる文字」のことを変数としているが、これはKy46, Ky49の「文字で表されている要素が変わりうる」と同様に、文字がその変化しうる値を「表す」と考えて、表3のように分類している。またG43は変数を導入するまでに、1枚3円の紙 x 枚の値段 y 円という例題もあげているが、他方で正の整数 x に対してその2倍にあたる偶数 y を対応させる例や、正の数 $1, 2, 3,$

4, 5]に奇数{1, 3, 5, 7, 9}を小さい方から対応させる例をあげていることから、量と関係のない数も用いて変数を定義していると考え、表3のように分類した。

本節の以下の部分では、表1から表3に示された定義、およびその変数の定義に関連すると考えられる教科書の記述に基づいて、系統学習期と現代化期の中学校教科書における変数の定義に見られる特徴について考察を加えていく。

表1：系統学習期の教科書における変数の定義（下線は引用者による）

	昭和36年	昭和40年	昭和43年
啓林館	[時間と距離，長方形の辺の長さと同積の場面を扱った後] 正比例の関係を表す式， $y=ax$ で， x や y はいろいろに変わる数を表しており，これに対して a は一定の数を表している。いろいろな値をとる数を変数といい，一定の数を定数という。(2年「量の変化とグラフ」)		
	[K36は「これに対して」が「 a は一定の数」の前ではなく、「一定の数を定数という」の前にある。]		
東京書籍	2つの量 x, y があって， y が x に比例するとき，これらの関係は，つぎの式で表される。 $y=kx$ (k は比例定数) この式の x や y のように，いろいろな値をとるものを変数といい， k のように，一定の数を表すものを定数という。(2年「座標とグラフ」)	2つの量 x, y が比例しているとき，その関係は次の式で表される。 $y=ax$ (a は比例定数) …(1) この式で， x, y はいろいろな値をとるが， a は一定の数を表す。このようとき， x, y を変数， a を定数という。(2年「いろいろな比例」)	[x 時間後の残りの道のり y kmについて式，表，グラフを提示し， $0 \leq x \leq 5$ ， $50 \geq y \geq 0$ を確認した後] この x, y のように，ある範囲のいろいろな値をとる文字を変数といい，これに対して，一定の値をとる文字や数を定数という。(2年「1次関数とグラフ」)
大阪書籍	[直径と同積，時間と距離の式を考えた後] このとき x と y とは，長さ・時間など変化する量のいろいろな値を，代表的に表している。この x, y のように，いろいろな値をとって変化する数を，代表的に示す文字を変数という。(中2「比例の関係」)	[直径と同積，横の長さと同積，時間と距離の式を考えた後] このとき， x と y は，長さ・時間など変化する量のいろいろな値を，代表的に表している。この x, y のように，いろいろな値を一般的に代表する文字を変数という。変数をとりあつかうときには，その文字がいろいろな値をとるものとするから，いろいろな値をとって変化する数を示す文字が変数であるといってもよい。(中2「一次関数とグラフ」)	
		[O43は「時間」が「面積」となっている]	
大日本図書	[x 秒後の水の量 y Lについて式を示し，表を作らせた後] 式(1)の x や y のように，いろいろな値をとることのできる文字を変数といい，0.3や5のように，きまった数を定数という。(2年「式の値の変化とグラフ」) [D40とD43では「0.3や5」の後に「または円周率 π 」が，「きまった数」の後に「またはきまった数を表す文字」が追加されている。]		
教育出版	変化する二つの量 x, y があって， y が x に比例するときは， $y=ax$ または $y/x=a$ の式が成り立つ。この x や y のように，いろいろの値をとると考えられる文字を変数という。(2年「式とグラフ」)	[毎秒2mの速さで歩く人が x 秒後に y mのところにいる場面で式や表を示した後] $y=2x$ や $y=-3x$ で， x と y とは変化するいろいろな数を代表している。このように，いろいろな値をとって変化する数を表す文字を変数という。(2年「いろいろな比例関係」)	[毎秒2mの速さで歩く人が x 秒後に y mのところにいる場面で式や表を示した後] $y=2x$ や $y=-3x$ で， x がいろいろな値をとるとき，それに対応して y もいろいろな値をとる。このように，いろいろな値をとる文字を変数という。(2年「一次関数と比例関係」)
学校図書	[1ml10gの針金の表と式を作り] 上の x や y のように，値が変わることができる文字を変数といい， k のように，きまった値をもつ文字や数を定数という。(2年「変化とグラフ」)	[1mあたり3gの針金 x mの重さが y gの場面で表と式を考えさせた後] x の値は(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)の中で変わるとする。[中略] この例の x や y のように，値が変化することができる文字のことを変数という。(2年「変数と座標」)	[x の値の範囲を{1, 2, 3}としてなどと考えた後] 例1や問題1にある x, y のように，決められた範囲の中でどのような値でもとることができる文字のことを変数という。(2年「変数と座標」)

(1) 変数の定義に見られる現行の定義との違い

上でも述べたように，今日の教科書では「いろいろな値をとる」文字として変数を定義するが，表3に示されるように，表1，表2の時期の教科書ではそれ以外の語り方により変数を定義する教科書も多く見られる。例えば，何かを「表す」文字として変数を定義するものが相当数見られる。D46, D49は集合の「どの要素をも表すことのできる文字」として，Ky40は「変化する数を表す文字」として，O36は「変化する数を，代表的に示す文字」として変数を定義している。O40, O43は「いろいろな値を一般的に代表する」として文字を定義しているが，それに続く文では「いろいろな値をとって変化する数を示す文字」が変数であると言ってもよいとの補足をしており，やはり何かを「示す」ものとして変数である文字を特徴づけている。Ky46とKy49は「文字で表されている要素が変わりうる」として文字を特徴づけているが，この場合も変わりうる要素を文字が表していると捉えられる。G36, G40は値が変化することができる文字が変数だと定義しているが，Ky46と同様に変わりうる値を文字が表していると解釈すれば，やはり変化しうる何かを文字が表しているとして変数を特徴づけていることになる。

O36, Ky40の定義やO40, O43の補足説明に現れる「変化する数」は，O36, O40, O43の記述に見られる「変化する量のいろいろな値」を指すものと考えられる。これについては，昭和28年に日本書院から出されていた高等学校向

けの教科書における定義に見られる、変量と変数の区別を参照すると理解しやすい：「物の長さや経過する時間などのように、変わることのできる量が変量で、その大きさを表す文字が変数である」²⁾。高瀬（2015）が変数という用語の成立について次のように述べていることを想起すれば、変数の定義の前に変量を想定することも不自然ではない：「『変数』というのはロピタルやオイラーの時代の変化量と同じもので、変化量という言葉ならコーシーにもリーマンにも見られるが、[高木貞治の]『解析概論』では一貫して『変数』とされ、変化量という言葉は使われない。19世紀の後半のある時期から『量』を捨てて『数』を採ろうとする動きが強まり、その結果、『変化量』は全面的に『変

表2：現代化期の教科書における変数の定義（下線は引用者による）

	昭和46年	昭和49年	昭和52年
啓林館	[x が集合の要素を代表するものとし、 $\{2x x \in \mathbb{N}\}$ などを考えた後] これまで使ってきた文字 x は、いろいろな値をとるものと考えている。このような文字 x を変数といい、そのとる値の集合を、その変数の変域という。(1年「文字を使った式」) [Kr49は文頭が「ここで使った文字 x は」に、「このような文字 x を」が「このような文字を」となっている]		[1桁の自然数 x で $2x+3=17$ と $2x+3<17$ を満たすものを考え、 x のとりうる値の集合を確認した後] 上の文字 x のように、いろいろな値をとる文字を変数といい、①のように、変数のとる値の集合を、その変数の変域という。(1年「文字の式」)
東京書籍	[x gの物を下げたときのばねの長さ y cmの関係を $y=0.2x+20$ と示し、 x, y のとりうる値の範囲を集合の形で確認した後] この x, y のように、ある集合に属するいろいろな値をとる文字を変数といい、これに対して、一定の値を表す文字や数を定数という。(1年「関数」) [T46では「ある集合」が「ある数の集合」となっている ¹⁾]		[注水した時間 x 分間と水の量 y Lの式 $y=20x$ と、 x, y のとりうる値の範囲を集合の形で確認した後] 上の x や y のように、ある集合に属するいろいろな値をとる文字を変数という。(1年「関数」)
大阪書籍	[箱に菓子を x 個入れたときの代金を考える場面を示し] 箱には、菓子は5個までしかはいらぬから、 x は、1, 2, 3, 4, 5の5個の数のどれかである。 $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ この x のように、いろいろな値をとる文字を変数といい、そのとる値の集合を、その変数の変域という。(1年「方程式」)		[O52では「 $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 」がない]
大日本図書	[$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ から $4x < 17$ を満たす数の集合 B を考えて] ある集合 A のどの要素をも表すことのできる文字として、たとえば、 x を使うとき、 x を変数といい、集合 A を、 x の変域という。(1年「方程式・不等式」)		[基石を1辺 a 個の正方形の辺上に並べ、全体の個数の式 $4a-4$ を確認して] a の値は2以上の自然数の集合の要素であればどんな数でもよい。この a のように、いろいろな値をとることのできる文字を変数といい、変数のとる値の集合を、その変数の変域という。(1年「文字と式」)
教育出版	[卵 x 個のときの代金 y 円を考え $y=15x$ を示してから] この式で、 x は1, 2, 3, …といろいろな値をとることができ、 y も x の値によって、15, 30, 45, …といろいろな値をとる。上の x と y のように、文字で表されている要素が変わりうると考えるとき、その文字を変数という。[中略] 変数に対して、変わらない数や、変わらない数を表わす文字を定数という。(1年「対応と関数」) [Ky46では「要素」が「数の値」となっている ¹⁾]		[卵 x 個の代金 y 円について対応の規則 $y=25x$ を確認して] この式の x は1, 2, 3, 4, …といろいろな値をとることができ、 y は x の値によって25, 50, 75, 100, …といろいろな値をとる。上の卵の個数や代金のよう、変わりうると考えられる数量を変数といい、ふつう x, y, z などの文字で表す。(1年「関数」)
学校図書	[1枚3円の紙 x 枚を買うときの代金 y 円という場面 ¹⁾ で式や x の範囲を確認した後] それぞれきめられた範囲の中で、どのような値でもとることができる文字を変数といい、その範囲をその変数の変域という。(1年「関数」) [G46では兄の小遣い y 円が弟の小遣い x 円より300円多いという場面になっている。]		[整数を6で割った余りを x とし] x は0, 1, 2, 3, 4, 5の6個の数のうちのどれかである。この x のように、いろいろな値をとる文字を変数といい、割る数6のように、値が決まっている数を定数という。1年「文字と式」p. 73)

表3：変数の定義の仕方

	ある種の数や量	数や量を「表す」文字	数を「代表する」	値を「とる」文字
量の値である数	いろいろに変わる数 Kr36, Kr40, Kr43, 変わりうると考えられる 数量 Ky52	変化する数を代表的に示す O36, 変化する数を表すKy40 表されている数の値が変わり うると考えられるKy46 表されている要素が変わり うると考えられるKy49 値が変わる文字G36, G40	いろいろな値を代表する O40, O43	いろいろな値をとる T36, T40, T43, T46, T49, T52, O46, O49, O52, D36, D40, D43, D52, Ky36, Ky43, G46, G49
量と関係のない数		集合のどの要素をも表す D46, D49		いろいろな値をとる Kr46, Kr49, Kr52, G52, G43

数』に座をゆずることになった」(p. 123)。実際、昭和52年の指導要領に対応する指導書では、次のような記述も見られた：「変数は、第1学年の段階では、具体的な事象における変化の考察の場面で、変量としてとらえることが自然であろう」(p. 68)。

上述の定義で文字が表すとされた「変化する数」自体を変数だとするのがKr36, Kr40, Kr43での定義である。「変わりうると考えられる数量を変数」とするKy52の定義も、ここに含めることができよう。ただしKr36, Kr40, Kr43では変数を定義する直前の文では「 x や y はいろいろに変わる数を表しており」とも述べ、「表す」という動詞も用いられている。つまり、ある種の文字が変数というよりも、変化する数である変数を文字で表すという語り方になっている。

「代表する」という動詞が変数を定義する文で用いられているのはO40, O43だけであるが、Ky40, Kr46, Kr49では定義に先立つ説明で「代表する」という語り方を用いている。Ky40は $y=2x$ の表を提示した後に「 x と y とは変化するいろいろな数を代表している」と説明してから定義を行っている。またKr46とKr49は変数を定義するために $\{x|x>7, x\in\mathbb{N}\}$, $\{x|x$ は自然数 $\}$ という表記をそれぞれ導入し、それについて「 x が集合の要素を代表するものと考えて」「集合の要素を文字 x で代表させ」と説明している。

(2) 定義の文脈に関する現行の定義との違い

変数を定義する際に、それと関連づけて述べられている事項についても、現行の教科書との違いが見られる。

第一に系統学習期や現代化期の教科書では、変数を定義する文で変域も定義していたり、定義の直後に変域も定義したりしている。G46, G49の定義の文「それぞれきめられた範囲の中で、どのような値でもとることができる文字を変数といい、その範囲をその変数の変域という」では変数の定義と一緒に変域も定義されるが、変数の定義の中にも「きめられた範囲の中で」と変域に言及している。変域に言及した変数の定義はT43, T46, T49, T52, D46, D49, G43, G46, G49に見られる。また定義の中では言及していなくても変数を定義する直前に、O46, O49の $x\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$ やD52の「2以上の自然数の集合」のように変数のとる値が属する集合を示したり、G40の「 x の値は(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)の中で変わるとする」やG52の「 x は0, 1, 2, 3, 4, 5の6個の数のうちのどれかである」のように x の値の範囲を明確にしたりし、それを受けて変数の定義を行うことで、定義に現れる文字のとる値の範囲を示唆するような語り方も見られる。

変数を定義する文の後半で変域も定義することは、Kr46, Kr49, Kr52, O46, O49, O52, D46, D49, D52, G46, G49に見られる。同じ文の中で定義しなくても、変数を定義した直後の文で変域を定義する例もT46, T49, T52, G52に見られる。系統学習期の指導要領では変域という用語を指導するようには指定されていなかったので用語は出てこないが、G40のように変数を定義した文に続けて、次のように変数がとる値の範囲に注意を向けている教科書もある：「変数がとる値の範囲をはっきり知ることがたいせつである。たとえば、上の例で、 x の値の範囲は、(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)である」。

変数を定義する際に現れる変域としては長さや重さ、時間などの連続量の値として、ある範囲のすべての数が想定されている教科書の他に、O46, O49, O52, G43, G46, G49のように個数という離散量の値として、ある範囲の自然数を考える場合も見られる。あるいはG40のように連続量を扱いながらある範囲の自然数だけを考える教科書、D52, Ky46, Ky49, Ky52のように個数の値となるある数以上の自然数を考える教科書、Kr46, Kr49, Kr52, D46, D49, G52のように量を伴わずに式に代入するいくつかの自然数を考える教科書なども見られる。

以上のように現代化期には変域を変数と併せて導入することが多く、また現代化期を中心として、最初は自然数だけからなる離散的な変域を考え、教科書によっては数個程度の自然数だけを変域とする場合のあったことがわかる。

第二に x, y を含む式を示した後に変数を導入する場合が見られる。例えばO40, O43では直径 x cmの円周の長さ y cmに対して $y=\pi x$ という式を提示したり、縦が a cmで横が x cmの長方形の面積 y cm²に対して $y=ax$ という式を提示したりした後に、「[これらの]式で、 x にいろいろな値を代入すると、それに応じて、 y の値が求められる。このとき、 x と y は、長さ・時間など変化する量のいろいろな値を、代表的に表している」と説明し、その上で「この x, y のように」として変数の定義を行っている。このように変数を定義する以前に、 x に応じて y が決まるような場面と、 x と y を含む式を提示した場合、 x にいろいろな値を代入する行為が示唆されやすいと考えられる。同様にKr36, Kr40, Kr43, T36, T40, T43, T46, T49, T52, Ky52, O36, D36, D40, D43, Ky36, Ky40, Ky43, Ky46, Ky49, Ky52, G36, G40, G46, G49では変数を定義する直前で x と y を含む式を提示している。またD52は基石全体の個数を表す式 $4a-4$ を提示した後、 a に値を代入することを学習し、その後に変数の定義がなされている。Kr52では等式 $2x+3=17$, 不等式 $2x+3<11$ を提示し、これを満たす x の値を考えさせた後に変数の定義を行っているが、ここでも同様に x にいろいろな値を代入することが想定されていると考えられる。Kr46, Kr49も同様の展開となつて

いる。なおO46, O49, O52, G52では変数の定義の前には式は出てこないが、定義の直後には $30x + 60 < 200$ や $30x + 60 = 150$ といった式を考えさせている。

変数を定義した後に式を提示する教科書もいくつか見られるが、ほとんどの教科書では文字を含む式を変数の定義の前に提示している。そしてそれらの式中の文字に言及しながら変数を定義している。

第三に定数の定義がある。系統学習期の教科書では、変数を定義する文の後半で定数も併せて定義しているものが多く見られる。また同じ文で定義されていない場合でも、変数を定義した直後に定数も定義している。現代化期の教科書で変数を文字式や方程式の単元で導入する教科書のうちG52以外は、定数は関数の単元になってから定義されているが、関数の単元で変数を定義する教科書とG52では変数の定義の直後に定数も定義されている。現行の教科書では変数と定数は同じ関数の単元の中で定義はされるものの、2つの定義が必ずしも隣接していない場合が多いことを考えると、表1, 表2の時期の教科書では、変数は定数と対比的に捉えられる傾向が強かったことがうかがえる。

定数の定義においては「表す」「示す」という動詞を用いる教科書が多くなっている。変数の定義や補足説明で「表す」「示す」を用いていた教科書では定数の定義でも同じ動詞を用いているが、T36, T40, T46, T49, T52, O46, O49, O52, D40, D43, D52, Ky43では変数の定義では「とる」を用いていたのに対し定数の定義では「表す」の動詞を用いている。T43, Ky36のように「一定の値をとる」「定まった値をとる」として定数を定義することも可能であるが、それらの教科書では定数の定義の際には「とる」ではなく「表す」を選択している。

Kr36, Kr40, Kr43では変数を「いろいろに変わる数」として定義していたが、これに対し定数を「一定の数」として定義しており、語り方の対応がとれている。同様にKy52の「変わりうると考えられる数量」と「値が変わらないと考えられる数量」も対応がとれている。これに対し、Kr46, K49, Kr52, D36, G52は変数をいろいろな値をとることができる「文字」として定義したのに対し、定数の方は「きまった数」「値がきまっている数」とある種の「数」として定義している。同様にG40は変数を「値が変化することができる文字」と定義したのに対し、定数は「変数の値が変わっても、変わらない一定の数」としている。さらに「数」だけではないが、T46, T49の「一定の値を表す文字や数」や、Ky46, Ky49の「変わらない数や、変わらない数を表す文字」のように、「数」と「文字」の両方を含む定数の定義が、T43, O36, O40, O43, O46, O49, O52, D40, D43, D46, D49, D52, G36, G46, G49にも見られる。Ky36「定まった値をとると考えられる文字」、Ky40「定まった値を表す文字」、Ky43「定まった数を表す文字」、G43「場合によって範囲がただ1つの数に定められる文字」と「文字」だけで定数を定義する教科書もあるが、多くの教科書では定数の定義において「数」に言及していることになる。

3. 数学における変数の定義

第1節で述べたように、過去の中学校教科書における変数の定義とは別に、標準的な中学校教科書以外において変数がどのように定義されているか検討してみることが考えられる。本節では数学者が初学者に対して変数をどのように定義しているか、そのいくつかの例を検討し、今日の中学校教科書における定義を相対化するためのさらなる知見を得ることを試みる。

日本数学会による数学辞典では変数は次のように定義されている：「一般に、ある集合Xの元を代入することが許されている文字 x を変数(variable)といい、Xをその変域(domain)という」(日本数学会, 2007, p. 191)。ここでは第2節(2)で過去の教科書について見出した特徴の一つと同様に、変数を定義した文の後半において変域も一緒に定義をしている。さらに変数の定義においても変域とされる集合Xに言及し、代入できる範囲を明確にして定義しており、値のとりことのできる範囲を明記したT43, T46, T49, T52, D46, D49, G43, G46, G49と同様の特徴を示している。変数の定義に用いられる「動詞」という点で見てみると、上の定義では「Xの元を代入することが許されている文字」として、文字に元を「代入する」という動詞により定義が行われている。「代入する」という動詞は表1や表2で示した定義の中には見られない。しかもこの「代入する」という動詞の主語を考えてみると、「代入する」のは文字の利用者であると推測される。第2節(1)で表1, 表2の変数の定義を検討した際に見られた「(値をとる)」「(要素や変化する数を)表す」「(いろいろな値を)代表する」といった動詞については、その主語が文字であろうと推測されるので、定義に用いられる動詞について、その行為者が文字の利用者であるという特徴は、過去の中学校教科書には見られなかった特徴であると言える。

Morgan (1996) は、テキストの言葉遣いは数学の性質をどう捉えているかを反映しており、「どのような種類の対象がテキストの参加者であるか」「どのような種類の対象が数学的プロセスの行為者であるか」(p. 4)に注意を向けるべきとする。この観点から考えてみるならば、数学辞典での変数の定義は文字の利用者を「代入する」というプロセスの行為者として想定し、変数の利用を含む数学的営みに関わる参加者としてこの文字の利用者を想定しているよ

うに見える。これに対し表1, 表2の定義では, 変域の内のいろいろな値を「とる」や「表す」といったプロセスの行為者として文字の利用者は想定されておらず, 文字の利用者が見えづらい語り方となっている。こうした変数を用いる行為者を明示しないという特徴は, Morgan (1996) によれば, より客観的な語り方を志向するものと考えられる。

変数の定義において利用者が行為をし, 参加者であるような語り方をしたものは, 他でも見られる。上の高瀬 (2015) の引用にも現れる高木貞治による「解析概論」では変数を次のように定義している:「[区間 $[a, b]$ が与えられたとき] もしも我々が x にこの区間に属する任意の数値を与えようとするならば, x をこの区間における変数という」(高木, 1980, p. 17)。この定義でも「任意の数値を与えようとする」行為者に言及しており, それを「我々」であるとしている。また田原 (1977) は多項式環を構成する際の変数である代数的変数と変量と関わりのある関数的変数を区別した上で, 関数的変数を次のように定義する:「 X をある集合とするとき, X の任意の元を代入することができる文字 x を関数的変数と呼ぶ。そして, 集合 X をその変数 x の変域と呼び, 変域 X の任意の元は x の値と呼ばれる。このように, 関数的変数というのはライプニッツの定義した変動する量, 変量としての意味が極めて強い」(田原, 1977, p. 48)。ここでも「代入する」という動詞が用いられている。

もちろん「定義域の要素を代表して表す文字」(一松, 1979, p. 432), 「われわれの考察の対象となるものを代表的に表す文字」(松坂, 1968, p. 4) など, 文字が主語と考えられる動詞「表す」により変数を定義するものや「関数あるいは写像の定義域の元が『変数』である」(関沢, 2005, p. 17) のように行為や動詞を含まない定義も見られる。しかし「代入する」という動詞を用いた変数の定義が存在することは, 変数の定義を検討するための視点として, 変数に関わる数学的プロセスの行為者が考えられることを明確にしてくれ, その行為者として文字だけでなく文字の利用者を想定することができる可能性も示唆してくれる。

なお表1, 表2の定義では行為者を主語にした動詞が用いられていないが, 定義をする前の活動においてそうした動詞が用いられている教科書はある。例えば, T43では50 km離れた地点へ毎時10 kmの速さで向かう場面を考え, x 時間後の残りの道のり y kmを $y=50-10x$ と表した際, 「ここで, x にいろいろな値をあたえると, それに対する y の値がきまる」としている。このときの動詞「あたえる」は上述の「代入する」と同様の意味であり, 行為者は文字の利用者であると考えられる。このように変数を定義する直前の場面で「あたえる」「代入する」といった動詞が使われることは, O36, O40, O43, D46, D49, D52に見られ, 逆に変数を定義した直後の課題で与えられた集合の要素を「 x に順に代入していく」ことがKr52に見られる。またKy46, Ky49, Ky52では x を「1, 2, 3, …と変えていったとき」と「変える」という動詞が用いられているが, 「変わる」「変化する」のが文字の値であるのに対し, 「変える」の行為者はやはり文字の利用者であろう。

利用者の行為という観点で改めて表1, 表2の定義を見てみると, 数値を与えるとか代入するという行為ではないが, 一部の定義には変数の利用者の存在が垣間見える語り方がある。Ky36の「いろいろな値をとると考えられる文字」, Kr46とKr49の「いろいろな値をとるものと考えている」, Ky46とKy49の「変わりうると考えるとき」, Ky52の「変わりうると考えられる」には「考えられる」や「考えている」, 「考える」という表現が含まれており, そのように「考える」利用者を想定した語り方になっている。また定義の文自体ではないが, O40とO43では定義後の補足に「変数を取りあつかうときには, その文字がいろいろな値をとるものと考えている」との表現があり, やはりそのように「考える」利用者の存在を想定した語り方になっている。D46とD49では「どの要素をも表すことができる文字として, たとえば文字 x を使う」と, ある意図を持って文字を使う利用者が想定されている。プロセスの行為者として利用者を想定する表現は, 数学における人間の役割が, 起こっていることを見るだけでなく, 行為をする主体である (Morgan, 1996) ととらえやすい語り方と言える。

4. 他の教科書での定義から見た現行教科書における定義

(1) 他の教科書との対比で見られる現行教科書における変数の定義の特徴

第2節(1)で示したように, 過去には「変化する数」(Kr36)や「変わりうると考えられる数量」(Ky52)を変数とする定義も見られたが, これに対し現行の教科書はある種の文字を変数としている。その文字については, これも第2節(1)で見たように, 何かを「表す」「示す」「代表する」ものとして規定する変数の定義も見られたが, 現行の教科書はいろいろな値を「とる」ものとして変数である文字を特徴づけている。そして「表す」により変数の特徴づけしていないために, 「変化する数を表す文字」(Ky40)のように「変化する数」を想定しているのかは明確でない語り方になっている。

この「いろいろな値をとる」という定義の仕方は, 第3節で示したように, 文字に値を「代入する」あるいは「与

えようとする」として変数を定義する仕方に比べて、行為者として学習者や利用者を想定しにくい定義になっている。また「とると考える」や、どの要素をも表すことができる文字として「使う」といった形でも、行為者としての文字の利用者に触れることもしていない。確かに現行の教科書でも文字式の学習では、いろいろな値をとりうる正方形の個数を文字で「表す」とか個数を表すために文字を「使う」として語ってはいるものの、変数の定義の際には文字の利用者が現れない語り方になっており、第3節で見たように、学習者は少なくとも文字の基本的な利用に関わっては、数学的プロセスの行為者や参加者であるというよりも、変数である文字がいろいろな値をとるという目の前で起こっていることを見るというニュアンスの語り方になっていると言えよう。

第2節(2)で検討した変数を定義する前後の活動について現行の教科書における定義を見てみると、文字がとる「いろいろな値」について、ある「きめられた範囲の中で」(G46)値をとるとか「ある集合に属する」(T46)いろいろな値をとるといったように、変域にあたる集合により制約をかけるという語り方にはなっていない。つまり、いろいろな値を「どこから」とるのかを明示しない定義となっている。また変数を定義する文の後半で変域もいっしょに定義することもしていない。変数より先に関数を定義する2社の教科書では、T46のように、変数を定義した直後に変域も定義している。しかし他の教科書では変数の定義に続いて関数を定義しており、変域はその後しばらくしてから取り上げられる。これらの教科書については、変数を定義するためには変域の概念を必ずしも必要とはしないと見えるような語り方になっている。また過去には、変数を定義する際に用いられる場面において、個数といった離散量を扱った教科書も見られたが、現行の教科書では基本的に、窓の開閉や水槽に水を入れるといった連続量を扱っている。そのため、数個の離散量の場合を示す場合に比べると、 x のとる値を具体的に指し示すことはしにくいと考えられる。

第2節(2)で検討した式の提示という点については、過去の教科書では x , y の文字を含む式や $2x+3$ といった x を含む式が変数を定義する直前に示されていた。これに対し現行の教科書では、こうした式を提示していない。上述のように変数の定義において「代入する」といった動詞は用いられていないが、式が提示されていないことで、式中の文字に値を代入するという行為も明示的には生じにくいとも考えられる。

定数については第2節(2)で見たように、過去には「表す」という動詞により定義する場合が多く、またある種の文字であることに加えてある種の数もそこに加えている場合も多く見られた。現行の教科書でも3社はKy46のように「一定の数やそれを表す文字」と、4社はKr36のように「一定の数」「決まった数」として定義している。ただし変数についてはいずれの教科書も「いろいろな値をとる文字」として定義しているのだから、前者の教科書の場合、定数の定義では文字に加えて数も含まれるという点に加え、動詞がそれぞれ「とる」と「表す」となって一致しないことになる。後者の教科書では変数を「いろいろに変わる数」(Kr36)としては定義していないので、変数と定数を「変わる数」と「一定の数」として対比させた形では定義できていないことになる。

(2) 現行教科書の特徴に基づく示唆

現行教科書における変数の定義には、前項で述べた語り方の特徴が見られた。そこで、他の語り方ではなく、この語り方を選択し、採用していることをふまえて、変数の扱い方を考える必要がある。

まず変数を「いろいろな値をとる」文字として定義していることから、ある種の文字を変数としていることになる。それまでに「正方形の個数」や「シールの枚数」の値を文字で「表す」ことを学習し、そうした文字を含む文字式の計算、文字を含む等式である方程式についても学習してきているが、変数の定義に際して、「変化する数」を「表す」のとは異なる仕方で、その文字自体が変数と呼ばれるようになる。それまでの文字についての学習との関連性を生徒に対して明確にする必要性が示唆される。また現行の教科書では変数がある種の「文字」であるのに対し、定数は「一定の数やそれを表す文字」や「一定の数」「決まった数」と定義されている。このとき、文字と数とはどのような関係にあると想定されているのかも検討し、生徒から見て整合性が保たれるような語り方を示唆する必要性も示唆される。

他方で定義に見られる「とる」という動詞や「いろいろな値をとる」という表現の意味が、それまでの生徒の経験を前提とした場合に、生徒にとって明確であるのかを検討する必要性も示唆される。「とる」は日常でも用いる動詞であるが、日常生活で生徒が接する「とる」のどのような用法と、変数の定義に現れる「とる」とは近い意味を持つのか吟味されるべきであろう。また数学のそれまでの学習の中で「文字が値をとる」という語り方に慣れているのかも問題となる。現行の教科書のうち1社では、文字式の導入部で「正方形の個数は、1, 2, 3, 4, …といろいろな値をとる」という記述が1回だけ現れるが、他の教科書では変数の定義までに「値をとる」という語り方が見られない。

例えばKy46では変数を定義する直前で具体的な場面を用いて考えている際に、「 x は1, 2, 3, …といろいろな値を

とる」と「とる」を用いた語り方をしている。またG46では方程式を解く際の条件を「 x が $\{-5, -3, -1\}$ の範囲の値をとるとき」と「とる」という語り方で与えている。変数の定義に出会う前にこうした語り方に慣れておくことは、前述の特徴を持った定義を理解する助けになる可能性があるだろう。

さらに「とる」という表現について現行の教科書では、文字の利用者が行為者としては想定されていない語り方になっていたが、これを利用者が「とる」という、利用者を行為者とする語り方に変える可能性も示唆される。そうした観点で現行の教科書を見たとき、ある教科書で変数が導入される直前の場面で「 x の値を適当にとって対応する y の値を求めなさい」として表を作らせている。このとき x の値を適当に「とる」のは文字の利用者であろう。また多くの教科書ではグラフをかく際に「 x の値を -5 から 5 まで 0.5 おきにとり」といった指示が出てくるが、この時の「とる」の行為者も文字の利用者と考えられる。同様に変数の定義で「とる」を用いる際にも行為者が文字の利用者であるような語り方ができないか、定数の定義と類似の語り方にできないか、またもしもできないとすればその理由が何かを考えてみるという可能性も示唆される。

もう一つの特徴として定義の中に変域にあたる集合への言及がなく、また多くの教科書では変域の導入が変数の定義と隣接していないことがあった。他方、過去のいくつかの教科書における定義や第3節で見た定義では変域が定義に含まれていたことを考慮すると、現行の教科書で変数を定義するに当たって、変域に相当する集合を生徒に意識してもらうような指導の工夫をすべきであることが示唆される。例えば、現行のいくつかの教科書では変数を導入するに先立ち x と y の表を生徒に作らせているが、表を作る際に文字 x の値としてとることのできる値の範囲を明示的に取り上げることで、変数を定義するにあたり変域に相当する集合を生徒に意識してもらうことが考えられる。さらにその際、 x が窓を開けた長さ x cmを表す文字であったとしても、窓のいろいろな状態を考えて表を作るだけでなく、上述の教科書のように「 x の値を適当にとって」考えるという語り方をすることで、場面の変量を記述するための文字だけでなく、場面を離れてもいろいろな値をとることのできる文字（布川，2019）を想定することを促すことが期待される。現行の定義ではその直前に文字 x 、 y を含む式を提示しておらず、O43のように式中の「 x にいろいろな値を代入する」ことができないとすれば、表を作る活動や具体的場面を扱った活動において、場面のいろいろな状態を考えるだけでなく、 x の値自体についていろいろな値を考えたり、文字にいろいろな値を代入したりするという経験を意図的に採り入れる必要性が示唆される。

5. おわりに

本稿では変数の学習の出発点となる中学校1年における変数の定義に焦点を当て、その定義の仕方を検討することを試みてきた。その検討の視点を得るために現行の教科書の定義を相対化することを考え、現行の定義を相対的なものとするために系統学習と現代化の時期の中学校教科書における定義や中学校教科書以外での初学者向けの定義を検討した。その作業により、現行の教科書とは異なった仕方に変数を定義する語り方が見出され、そうした語り方の特徴を視点とし、それらの定義と対比することで、現行の教科書における変数の定義の特徴を明確にすることができた。

変数の定義として現行の教科書による定義が唯一のものであったり主流を占めるものであったりするならば、そうした語り方に慣れてもらうことも、中等学校数学のディスコースへの参加としての学習にとっては必要なことであろう。しかし、他の語り方の可能性があるのであれば、生徒の理解しやすさとの関わりから適切な語り方を意図的に選択していくことが求められる。

謝辞：本研究は科学研究費助成事業・基盤研究(C)（課題番号：16K00954）の助成を受けて行われたものである。

注

- 1) T46の「ある数の集合に属する」に対しT49が「ある集合に属する」と「数」を含まない語り方になったのは、この時期の指導書に「変数は必ずしも数だけをとるものではない」と明記されていた（国宗，1994）ことを反映していると考えられる。Ky46では変数が表すものが「数の値」であったのに対し、Ky49では「要素」となったのも、同様の趣旨があったものと思われる。
- 2) 量は数値と単位の積で表されるとすれば、量と数値は区別されるべきである（久保，2009）。その点では表1より前の時期ではあるがG34に見られる「『測定日』、『気温』、『速さ』、『時間』などは変数である」という表現は適切ではないことになる。またT36では「第1学年で学んだように、2つの量 x 、 y があって」としてこの x 、 y が変数だと定義するが、その第1学

年では x cm, y cmなどとしており, 実際には量の値を表していると考えられる。なお「2つの量 x , y 」という語り方は現行の算数の教科書にもそのまま見られる。

引用文献

- Dogbey, J. (2016). Using variables in school mathematics: Do school mathematics curriculum provide support for teachers? *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*, 1175-1196.
- Dogbey, J. & Kersaint, G. (2012). Treatment of variables in popular middle-grades mathematics textbooks in the USA: Trends from 1957 through 2009. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 2*(1), 1-30.
- Ely, R. & Adams, A. E. (2012). Unknown, placeholder, or variable: What is x ? *Mathematics Education Research Journal, 24*(1), 19-38.
- 榎本哲士. (2013). 学校数学における文字式の理解を捉える枠組みの構築: 関数的アプローチを視点として. 数学教育学論究(臨時増刊), 95, 25-32.
- Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the “voice” of a mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(4), 344-369.
- 一松信(代表). (1979). 新数学事典. 大阪書籍.
- 過外正律ほか. (1993). 文字式での変数的見方を育てる授業: 文字観念を育てる授業のあり方. 群馬大学教育実践研究, 10, 53-79.
- 久保和良. (2009). 量と単位をめぐる問題と討論. 小山工業高等専門学校研究紀要, 41, 123-132.
- 国宗 進. (1994). 小・中学校における変数の扱いに関する研究. 静岡大学教育学部研究報告, 教科教育学篇, 25, 79-102.
- 小岩 大. (2016). 変数の理解に関する水準の検討: 3aとa-3の大小比較問題の解決の分析を通して. 日本数学教育学会誌, 98(5), 2-11.
- 近藤基吉ほか. (1958). 解析I. 日本書院.
- Malisani, E. & Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the “variable.” *Educational Studies in Mathematics, 71*(1), 19-41.
- 松坂和夫. (1968). 集合・位相入門. 岩波書店.
- Morgan, C. (1996). “The language of mathematics”: Towards a critical analysis of mathematics texts. *For the Learning of Mathematics, 16*(3), 2-10.
- 盛田直子. (2014). 式・表・グラフを連携させた1次関数の指導について. 第63回北陸四県数学教育研究(金沢)大会発表資料.
- Nie, B., Cai, J. & Moyer, J. C. (2009). How a standards-based mathematics curriculum differs from a traditional curriculum: With a focus on intended treatments of the ideas of variable. *ZDM Mathematics Education, 41*, 777-792.
- 日本数学会. (編). (2007). 岩波数学辞典(第4版). 岩波書店.
- 布川和彦. (2014). 中学校数学における関数の対象としての構成: 教科書の考察を中心に. 上越教育大学研究紀要, 33, 85-96.
- 布川和彦. (2016). 対象把握のためのディスコースと学習のパラドクス. 日本数学教育学会春期研究大会論文集, 4, 49-56.
- 布川和彦. (2019). メタレベルと対象レベルの観点から見た学校数学における文字の利用. 上越教育大学研究紀要, 38(2), 309-320.
- Schoenfeld, A. H. & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The Mathematics Teacher, 81*(6), 420-427.
- 関口靖広. (2003). 中学校数学における関数の授業の認知意味論的考察: 第1学年についての分析. 日本数学教育学会数学教育論文発表会論文集, 36, 247-252.
- 関沢正躬. (2005). 変数. 数学セミナー, 44(6), 16-19.
- 真野祐輔. (2011). 変数性に関する概念変容の数学史的背景: 擬変数の機能の考察を中心に. 数学教育研究(大阪教育大学数学教室), 40, 71-87.
- 高木貞治. (1938/1980). 解析概論. 岩波書店.
- 高瀬正仁. (2015). 微分積分学の史的展開. 講談社.
- 田原賢一. (1977). 変数とその指導について. 愛知教育大学教科教育センター研究報告, 1, 45-50.
- Ulusoy, F. (2013). An investigation of the concept of variable in Turkish elementary mathematics teachers' guidebooks. *Journal of Educational and Instructional Studies in the World, 3*(1), 139-149.

Characteristics of the Definitions of Variables in Japanese Secondary School Mathematics Textbooks

An attempt to relativize definitions in the current textbook series

Kazuhiko NUNOKAWA*

ABSTRACT

The concept of variables is important for learning secondary school mathematics, as it plays a critical role when learning functions and related topics. Although several studies have been conducted to improve the teaching and learning of variables, the concept remains difficult for secondary school students. Given that the definition of variables is a starting point in textbooks for the learning of variables, it seems natural to examine this definition to check whether it is appropriate as a starting point for students and if it is formulated so as to be easily understood by students. This examination is the purpose of this paper.

To illuminate characteristics of the definition of variables in the current textbook series, this paper attempts to relativize the definition of variables by finding alternative definitions and contrasting these with those in current use. Seventh and eighth grade mathematics textbooks published in 1960s and 1970s were analyzed to find alternative definitions of variables, because various definitions were adopted in the textbooks in that period. Some of the definitions given by mathematicians to learners other than secondary students, were also investigated to find further alternatives.

This exploration reveals the following definition characteristics: (a) Current textbooks define a variable as a kind of letter, while some past textbooks define it as a changing number or value; (b) Current textbooks define a variable in terms of "a letter taking various values," while some past textbooks define it in terms of "a letter representing various values"; (c) Current textbooks do not assume users as agents of mathematical processes like substitutions, while some mathematicians, in their definitions, assume users as agents of processes; (d) In current textbooks there is a more distant relationship between the concept of domain and variables, compared to past textbooks. These contrasts highlight the characteristics of the definition in the current textbook series and imply how this definition should be used when teaching the concept to students.

* School Education