上越教育大学研究紀要　第40巻第２号　令和３年３月
Bull. Joetsu Univ. Educ., Vol. 40(2), Mar. 2021

STEAM教材としての錯視立体
―Troikaによる作品「Squaring the Circle」を例として―

斎　籐　敏　夫*・上　田　未　来**
（令和２年８月27日受付；令和２年11月26日受理）

要　　旨

平成28年に閣議決定された第５期科学技術基本計画では，「超スマート社会」の実現に向けた一連の取組「Society 5.0」を強力に推進させる計画が打ち立てられた。また，文部科学省がまとめた報告書「Society 5.0に向けた人材育成～社会が変わる，学びが変わる～」においては，思考の基盤となるSTEAM教育をすべての高校生に学ばせる必要性が強調されている。

本稿は，高校生を対象としたSTEAM教材の一つとして錯視立体を提案するものである。まず，「中心投影」の概念についての確認からはじめ，そのことを視覚的にも理解するため，数学ソフトウェアGeoGebraを活用する。次に，STEAM教材としての錯視立体の一例として，Troikaによる作品である「Squaring the Circle」を空間図形として数学的に考察する。今回は，３Ｄプリンタによる出力も試みたので，その手順について紹介するとともに，いくつかの注意点を報告する。

KEY WORDS
optical illusion object　錯視立体，STEAM material　STEAM教材

1　はじめに

平成28年１月22日に閣議決定された第５期科学技術基本計画において，「超スマート社会」を「必要なもの・サービスを，必要な人に，必要な時に，必要なだけ提供し，社会の様々なニーズにきめ細かに対応でき，あらゆる人が質の高いサービスを受けられ，年齢，性別，地域，言語といった様々な違いを乗り越え，活き活きと快適に暮らすことのできる社会」としたうえで，世界に先駆けた「超スマート社会」の実現に向けた一連の取組「Society 5.0」を強力に推進させる計画が打ち立てられた。内閣府[1]によると，Society 5.0とは，「サイバー空間（仮想空間）とフィジカル空間（現実空間）を高度に融合させたシステムにより，経済発展と社会的課題の解決を両立する，人間中心の社会（Society）」のことであり，「狩猟社会（Society 1.0），農耕社会（Society 2.0），工業社会（Society 3.0），情報社会（Society 4.0）に続く，新たな社会を指すもので，第５期科学技術基本計画において我が国が目指すべき未来社会の姿として初めて提唱」されたものである。

これを受けて文部科学省がまとめた報告書「Society 5.0に向けた人材育成～社会が変わる，学びが変わる～」[2]では，どのような時代の変化を迎えるとしても「共通して求められる力として，①文章や情報を正確に読み解き，対話する力，②科学的に思考・吟味し活用する力，③価値を見つけ生み出す感性と力，好奇心・探求力が必要であると整理した。」と述べられている。そのうえで，今後取り組むべき教育政策の方向性について，小・中学校時代においては，「Society 5.0を迎え，社会の構造が劇的に変化し，必要とされる知識も急激に変化し続けることが予想される中，義務教育に求められるのは，常に流行の最先端の知識を追いかけることではなく，むしろ，学びの基盤を固めることであると考えられる。」と指摘している。一方，高等学校時代においては，「生徒一人一人が，Society 5.0における自らの将来の姿を考え，そしてその姿を実現するために必要な学びが能動的にできる場へと転換することが求められている。」とし，「思考の基盤となるSTEAM教育を，すべての生徒に学ばせる必要がある。」と説いている。

このような背景のもと，本稿では，高校生を対象としたSTEAM教材の一つとして錯視立体を提案する。ここでは，錯視立体という用語をやや広義に捉えて，「ある特定の位置から見た場合に限り，その他の一般の位置から見た場合とはまったく異なる図形として認識され得る立体」を意味するものとする。錯視立体については，杉原厚吉氏（明治大学）による作品が世界的にも有名で，テレビ番組などのメディアで取り上げられたものも多く，年齢を問わず楽しめる題材となっている。また，第３章で考察する，Troikaによる「Squaring the Circle」[4]もやはり数学的な美しさを体感できる作品である。

*自然・生活教育学系　　**上越教育大学（修士課程）

本稿の目的は，錯視立体を見て楽しむだけでなく，数学的な考察を経て，その裏に潜む“からくり”を理解し，さらにはそのアイデアを応用することにより，生徒が主体となって新しい作品を生み出そうとする機会へと導く教材を提供することにある。

2　錯視立体の数理

はじめに，錯視立体を作成するために必要となる「中心投影」の概念について簡単に復習する。xyz座標空間において，xy平面上にない１点Ｉ(x_1, y_1, z_1)を固定する。点Ｉは視点の位置を示すものを想定しているので，これを視点Ｉとよぶことにする。視点Ｉとは異なる点Ａに対して，直線IAとxy平面が平行でないとき，両者の交点をA_0とする。この点A_0を点Ａのxy平面への中心投影という。また，混乱が生じない限り，このような対応を与える写像fも中心投影とよぶ。直線IA上の任意の点Ｐ（≠Ｉ）に対して，点Ｐのxy平面への中心投影$f(\mathrm{P})$はA_0であることに注意する。この事実は後の考察で重要となる。

同様にして，空間におかれた立体Xのxy平面への中心投影を次のように定めることができる。簡単のため，視点Ｉからxy平面の方向を見たとき，立体Xは視点Ｉよりも前方にあるとする。より正確には，たとえば$z_1>0$である場合は，$X \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z<z_1\}$であると仮定する。このとき，立体$X$上の各点を写像$f$によって写した点全体の集合，すなわち，$\{f(\mathrm{P}) \mid \mathrm{P} \in X\}$を立体$X$の$xy$平面への中心投影という。

たとえば，図１のように視点Ｉを頂点とする円錐をCとし，円錐Cを適当な曲面[1)]Fで切ったときの切り口となる空間曲線をWとする。このとき，Wの中心投影$f(W)$は円周となる。そしてこのことは，次のように解釈することができる。視点Ｉから単眼で空間曲線Wを見たとする。単眼で見ると距離感が掴みにくいため，Wはxy平面上への中心投影$f(W)$として認識されると考えることができる[2)]。上述の注意により，円錐CをFとは異なる曲面F'で切ることにより得られる空間曲線W'は，空間曲線としてはWと異なるものであるが，中心投影については$f(W')=f(W)$であることが分かる。つまり，視点Ｉから単眼でそれぞれの空間曲線W，W'を見たとき，それらはともに同じ大きさの円周として見えることになる。逆に，単眼では円周に見えるような空間曲線は，このようにして量産できることも分かる。

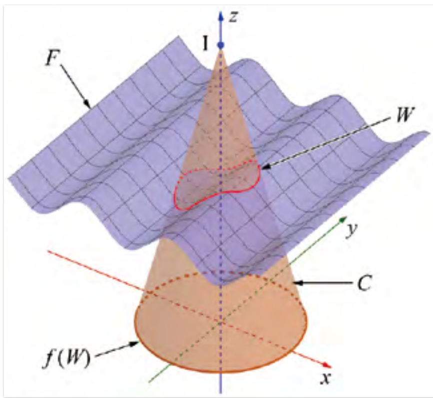

図１

これらの理解を深めるために，単眼で見たときに図２のように見える立体Xを，まずはGeoGebraを用いて描いてみる。ここでは視点Ｉを（20，60，60）に固定し，xy平面に関して視点Ｉと異なる側に立体Xを作成することにする。はじめに，図２にある頂点$\mathrm{A}_0, \cdots, \mathrm{G}_0$と視点Ｉを入力し[3)]，視点Ｉから各頂点を通る半直線をそれぞれ描く。次に，$\mathrm{I}-\mathrm{A}_0-\mathrm{A}$という順序になるような点Ａを半直線$\mathrm{IA}_0$上の適当な位置にとる。上で注意したように，点Ａの$xy$平面への中心射影は点$\mathrm{A}_0$である。同様にして，点Ｂと点Ｃをそれぞれ半直線$\mathrm{IB}_0$上と半直線$\mathrm{IC}_0$上にとる。このとき，たとえば線分ABは，視点Ｉから単眼で見たとき，線分$\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$とぴったり重なって見える。ここで，空間内の平面は同一直線上にない３点により定まることに注意すれば，図２における面$\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0\mathrm{C}_0\mathrm{D}_0$は，３点Ａ，Ｂ，Ｃを通る平面に含まれることが分かる。このことにより，点Ｄは半直線ID_0と平面ＡＢＣとの交点として定まることになる（図３左）。これらの作業を繰り返すことにより，残りの２つの面$\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0\mathrm{F}_0\mathrm{E}_0$，$\mathrm{B}_0\mathrm{C}_0\mathrm{G}_0\mathrm{F}_0$に対応する面ＡＢＦＥ，ＢＣＧＦも空間内に取ることができる。さらに，見えない面も作りたいのであれば，空間における３つの平面ＡＤＥ，ＣＤＧ，ＥＦＧの交点Ｈを求めておけば，立体Xがひとつ完成する（図３中）。点Ａの位置をずらすことにより，図２のように見える立体Xは無限にあることが視覚的に理解できる。さらに，各面の辺の長さや角の大きさを測定するツールを利用すれば，実際に立体を作ることも可能である（図３右）。

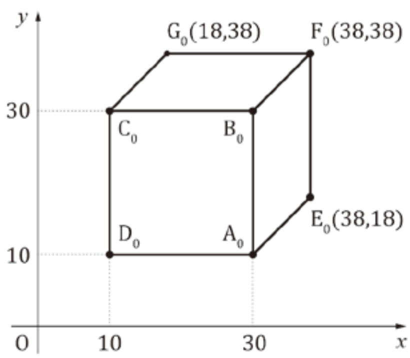

図２

一般に，xy平面に描かれた任意の図に対して，そのように見える立体Xが常に存在するとは限らない。そのような立体Xが存在する可能性を判定するため，たとえば杉原（2012）[3]では，（いくつかの仮定の下で）線形計画問題へ帰着させる方法が詳しく解説されているが，高校数学の範囲を超える内容を含んでいる。

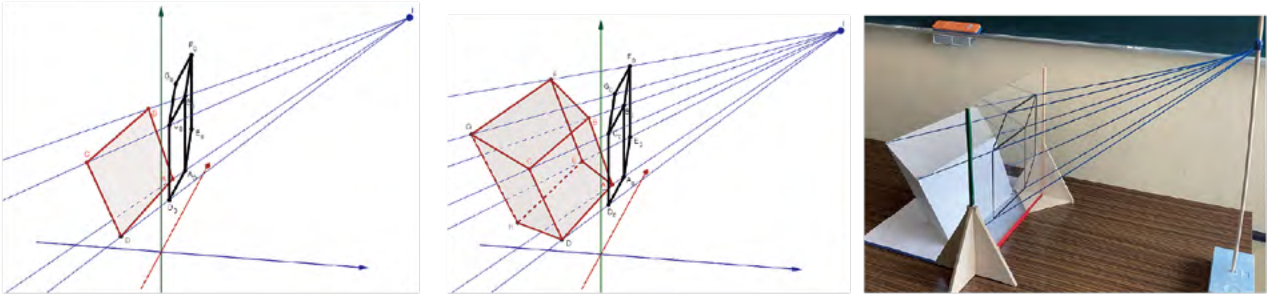

図 3

3　STEAM教材としての錯視立体

本章では，Troikaという芸術家グループによる作品の中から「Squaring the Circle」（図 4 ）という錯視立体（以降，これを立体Xとよぶ）を取り上げる。この作品は，xyz座標空間内の原点付近におかれた立体Xが，z軸の負方向から見ると円周に見えるが，反対側であるz軸の正方向から見ると正方形に見える，というものである（図 5 ）。数学的考察の一例として，この立体Xを表す空間曲線Wの媒介変数表示を求める。

図 4　Troika, ‘Squaring the Circle’, 2013, bent steel tubes, black flocked surface, 77.5×139×139 cm Installation View, Kohn Gallery, Los Angeles, 2015.

z軸の負方向から見るときの視点をI_1（$0, 0, -d$），z軸の正方向から見るときの視点をI_2（$0, 0, d$）とする。また，視点I_1から見える円周Cを表す方程式を$x^2+y^2=r^2$，$z=0$とし，視点I_2から見える正方形Sを表す方程式を$|x|+|y|=r$，$z=0$とおく。ここで，dとrは正の実数とする。視点I_1を頂点とし，円周Cを含む円錐面を$\hat{C}$とする。また，視点I_2を頂点とし，正方形Sを含む四角錐の側面を$\hat{S}$とする。正確には，それぞれ次のように定義されるものである。

$$\hat{C}=\{半直線 I_1P \mid P\in C\},\quad \hat{S}=\{半直線 I_2P \mid P\in S\}$$

このとき，空間曲線Wは$\hat{C}$と$\hat{S}$の共通部分として得られる。

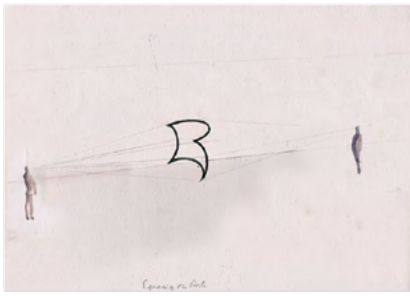

図 5　Troika, ‘Squaring the Circle’ drawing, 2013, watercolour on paper, 21 cm×29.7 cm.

空間曲線W上の任意の点Pは円錐面$\hat{C}$上にあるので，実数t，θを用いて

$$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{rt}{d}\cos\theta,\ \frac{rt}{d}\sin\theta,\ t-d\right) \tag{1}$$

と表される。また，正方形Sの隣り合う頂点A$(r, 0, 0)$，B$(0, r, 0)$に対して，点Pが平面I_2AB上の点であるならば，実数u，vを用いて$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OI_2}+\overrightarrow{I_2P}=\overrightarrow{OI_2}+(u\overrightarrow{I_2A}+v\overrightarrow{I_2B})$と表されることから

$$\overrightarrow{OP}=(ur,\ vr,\ d(1-u-v)) \tag{2}$$

を得る。(1)と(2)の成分を比較することにより，$x\geq 0$，$y\geq 0$を満たす領域における空間曲線W上の任意の点Pは

$$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}r,\ \frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}r,\ \frac{1-\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}d\right) \tag{3}$$

（ただし，$0 \leq \theta \leq \pi/2$）と表されることが分かる。この曲線と，この曲線をz軸のまわりにそれぞれ$\pi/2-$回転，$\pi-$回転，$3\pi/2-$回転させたものとの和集合が，立体Xに対応する空間曲線Wである。$r=5$，$d=20$とし，この空間曲線W（すなわち立体X）をGeoGebraで描画したものが図６である。

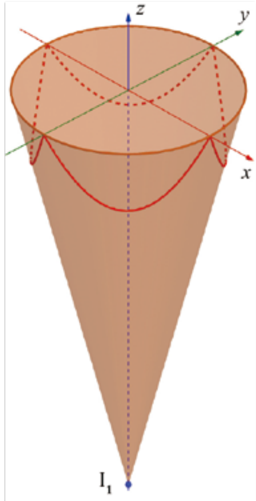

図６

議論の一部で逆三角関数を用いても良いのであれば，(3)で表された曲線の平面曲線としての表示を求めることもできる。たとえば，平面I_2ABにおいて半直線I_2Aを基準線とする極座標表示は次のようにして得られる。２つのベクトル$\overrightarrow{I_2A}$と$\overrightarrow{I_2P}$のなす角を$\varphi(\theta)$とすると

$$\cos\varphi(\theta) = \frac{\overrightarrow{I_2A}\cdot\overrightarrow{I_2P}}{|\overrightarrow{I_2A}||\overrightarrow{I_2P}|}$$

すなわち，

$$\varphi(\theta) = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{I_2A}\cdot\overrightarrow{I_2P}}{|\overrightarrow{I_2A}||\overrightarrow{I_2P}|}\right)$$

である。よって，$(|\overrightarrow{I_2P}|, \varphi(\theta))$（$0 \leq \theta \leq \pi/2$）が求める極座標表示となる。これを直交座標表示に変換してGeoGebraで描画したものが図７である。

4　３Ｄプリンタによる出力

立体を３Ｄプリントするためには３Ｄデータが必要である。一般的な家庭用３ＤプリンタではSTLとよばれる形式の３Ｄデータがあればよい。GeoGebra[4]には，３ＤデータをSTL形式で出力する機能が備わっている。本章では，この機能を利用して，図６の立体Xを３Ｄプリントする手順について確認するとともに，若干の注意点を述べる。

まず，この機能は画面上で表示されているすべてのものを３Ｄデータに変換することに注意する。つまり，画面上には３Ｄプリントしたい立体のみ[5]を，そしてその全体像が見えている状態にしておく必要がある。次に，ファイルメニューの「・・・形式でダウンロード」から「３次元印刷ファイル(.stl)」を選択すると図８のような設定画面が開く。上段の「幅・長さ・高さ」では立体の出力サイズを設定し，中段の「縮尺」ではGeoGebra上での１目盛の長さを設定する。これらの数値は連動しており，たとえば「縮尺」のみを変更するだけで自動的に出力サイズも計算される。下段の「厚さ」は，今回の場合は曲線の太さに相当する。今回は縮尺を1 unit(s) = 1 cmとし，厚さを3.6 mmに設定した[6]。

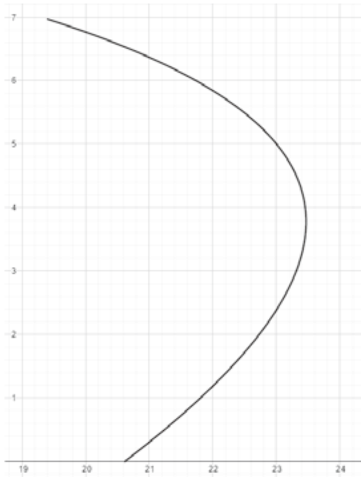

図７

出力したSTLファイルは，最近のWindowsやMacであれば標準搭載されているプレビューアプリなどで開くことができる。たとえば，さきほど作成したSTLファイルをWindows 10の「Print 3D」で開くと，４頂点（5，0，0），（0，5，0），（−5，0，0），（0，−5，0）における“継ぎ目”が目立っていることが分かる[7]（図９上）。これを解消するために，エレガントな解決策とは言えないのであるが，各頂点を中心とし，半径が1.8 mmである球面を追加してみる。半径は先に設定した曲線の太さ（厚さ）の半分である（図９下）。

あとは，３Ｄプリンタそれぞれに最適化された付属ソフトでスライス処理，そして必要があればサポート材の設定等を行えば[8]，３Ｄプリントに必要となる３Ｄデータが完成する。

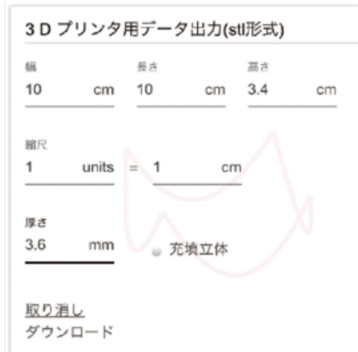

図８

熱溶解積層（FDM）方式の家庭用３Ｄプリンタを使用して，実際に立体Xを３Ｄプリントしてみたところ，標準的な解像度でプリント時間は１時間半程度であった[9]。FDM方式によるプリントでは積層跡が残ってしまうため，今回は次のような処置を施した。

まず，凹凸が目立つ部分をヤスリで研磨することにより，表面の滑らかさを改善した。しかし，ヤスリがけによる白い擦れ跡が目立つため，今回はレジン液[10]を使用したコーティング作業を行った。レジン液を薄く塗る際，一度で造形物全体に塗ると，レジン液が垂れた状態で固まってしまうため，部分的に塗る作業とＵＶライトによる硬化をこまめに繰り返すとよい。全体をコーティングした後，レジン用コート剤[11]を塗り，乾燥させることでマットに仕上げた。このようにして，完成したものが図10である。

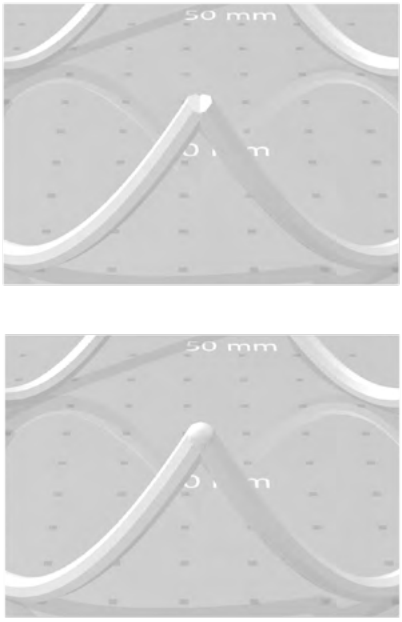

図９

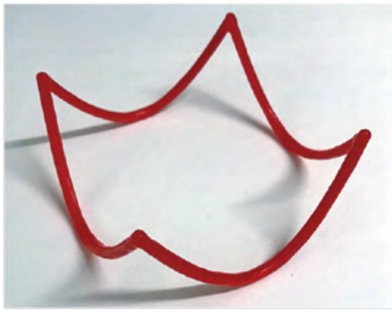
図10

5　応用例

本章では，第３章における数学的考察の発展として，正方形の代わりに正n角形（$n \geq 3$）を扱う。２つの視点I_1とI_2，視点I_1から見える円周C，および円錐面$\hat{C}$は第３章と同じものとし，視点I_2から見える正n角形Rの頂点は（$r\cos(2k\pi/n)$，$r\sin(2k\pi/n)$，0）（$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$）であるとする。また，視点I_2を頂点とし，正n角形Rを含む正n角錐の側面$\{$半直線$\mathrm{I}_2\mathrm{P} \mid \mathrm{P} \in R\}$を$\hat{R}$で表し，$\hat{C}$と$\hat{R}$の共通部分となる空間曲線を$W$とする。

空間曲線W上の任意の点Pは円錐面$\hat{C}$上にあるので，やはり実数t，θを用いて(1)と表される。また，正n角形Rの隣り合う頂点A（r，0，0），B（$r\cos(2\pi/n)$，$r\sin(2\pi/n)$，0）に対して，点Pが平面I_2AB上の点であるならば，実数u，vを用いて

$$\overline{\mathrm{OP}} = \left(ur + vr\cos\frac{2\pi}{n},\ vr\sin\frac{2\pi}{n},\ d(1-u-v)\right) \tag{4}$$

と表される。(1)と(4)の成分を比較することにより，

$$\overline{\mathrm{OP}} = \left(\frac{2\cos\theta}{1+\tan\frac{\pi}{n}\cdot\sin\theta+\cos\theta}r,\ \frac{2\sin\theta}{1+\tan\frac{\pi}{n}\cdot\sin\theta+\cos\theta}r,\ \frac{1-\tan\frac{\pi}{n}\cdot\sin\theta-\cos\theta}{1+\tan\frac{\pi}{n}\cdot\sin\theta+\cos\theta}d\right) \tag{5}$$

（ただし，$0 \leq \theta \leq 2\pi/n$）を得る。この曲線と，この曲線を$z$軸のまわりに$2k\pi/n$回転（$k=1,\ \cdots,\ n-1$）させたものとの和集合が，本章で求める空間曲線$W$である。$n=6$，$r=5$，$d=20$とし，この空間曲線$W$をGeoGebraで描画したものが図11である。

ここで，「nを限りなく大きくするとき，空間曲線Wはどのような図形に近づくか」という問題を考える。(5)における$\overline{\mathrm{OP}}$のz成分を$z(\theta)$とおく。$z(0)=z(2\pi/n)=0$である。また，

$$z'(\theta) = \frac{-2\left(\tan\frac{\pi}{n}\cdot\cos\theta-\sin\theta\right)}{\left(1+\tan\frac{\pi}{n}\cdot\sin\theta+\cos\theta\right)^2}d$$

であることから，$0 \leq \theta \leq 2\pi/n$において$z(\theta) \leq 0$であり，$z(\theta)$の最小値$m(\theta)$は$\theta=\pi/n$のとき，

$$m(\theta) = \frac{\cos\frac{\pi}{n}-1}{\cos\frac{\pi}{n}+1}d$$

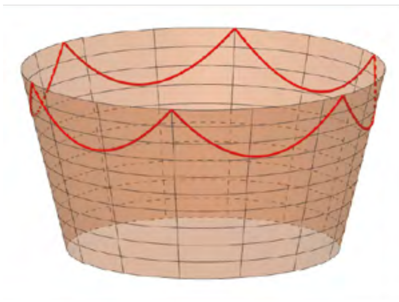
図11

となる。よって，$n \to \infty$ のとき，$m(\theta) \to 0$ となり，$z(0) = z(2\pi/n) = 0$ であったことに注意すれば，空間曲線 W は平面図形[12)]に限りなく近づくことが分かる。図12は，このことをGeoGebraによるアニメーションで確認したものである。

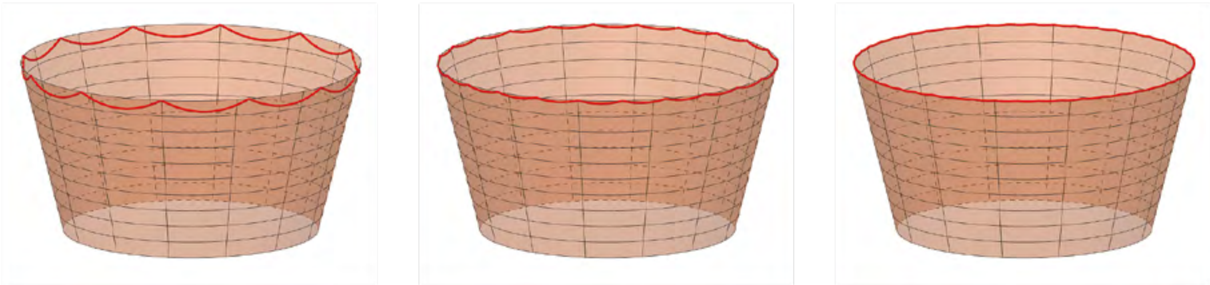

図12　左：n＝12　中：n＝24　右：n＝48

6　おわりに

本稿では，主としてTroikaによる作品で使われた円周と正方形の組について考察した。実際の学校現場では，本稿の内容をもとに，STEAM教材としての難易度を生徒の実態に合わせて適宜調整することが求められるであろう。たとえば，第５章でみたように，彼らの発想はその他の組み合わせにも適用可能であることが分かる。そこで，円周の代わりとして，やはり多角形を考えることにすれば，二つの多角錐の側面の共通部分，すなわち，二平面の交わりについて考察することになる。この場合，立体 X を表わす W は空間内の折れ線（線分の和集合）となり，今回のような複雑な曲線にはならない。よって，工夫次第では３Ｄプリンタを利用せずとも立体を作ることが可能であると考える。

本稿で紹介したSTEAM教材としての「錯視立体」が，数学を学ぶことに対する価値の発見，数学をアートや技術に発展させる好奇心・探究力へとアプローチするきっかけの一つとなることを期待する。

謝辞：本稿を執筆するにあたり，Troikaには作品「Squaring the Circle」の使用や写真の掲載，さらには３Ｄプリンタによる複製を快諾して頂いた。ここに深く感謝の意を表する。

注

1）もちろん平面で切っても良い。平面は曲面の特別な場合という立場である。
2）正確には，視点Ｉからの距離を均一にするためには，点Ｉを中心とした球面上への中心投影を考える必要がある。
3）頂点 A_0，…，G_0 の z 座標はすべて０である。
4）Version: 6.0.588.0-offline (02 June 2020)
5）座標軸なども非表示にする必要がある。
6）出力される立体のサイズは10cm×10cm×3.4cmとなった。
7）実際に３Ｄプリントしてみたが，やはり造形物にも継ぎ目が目立っていた。
8）ほぼすべてのソフトに自動設計機能が備わっているはずなので，このことに関する深い知識は必要としない。
9）使用した３Ｄプリンタでは，高解像度の場合の推定プリント時間は４時間17分と表示される。
10）品名：UV-LEDレジン ハード，色：無色透明，成分：アクリル系光硬化樹脂，用途：造形用コーティング剤
11）品名：レジン用コート剤 マット，成分：有機溶剤，合成樹脂，二酸化ケイ素，用途：造形用レジンコート剤
12）極限として得られる図形は，xy 平面において原点を中心とする半径 r の円周である。

引用及び参考文献

[1] 内閣府（2016）Society 5.0 https://www8.cao.go.jp/cstp/society5_0/index.html
[2] 文部科学省（2018）「Society 5.0に向けた人材育成 ～社会が変わる，学びが変わる～」.
[3] 杉原厚吉（2012）だまし絵と線形代数，共立出版.
[4] Troika, Squaring the Circle, https://troika.uk.com/project/

Optical Illusion Objects from a STEAM Perspective:
The Case of Troika's Perspective Sculpture "Squaring the Circle"

Toshio SAITO* ・ Miku UEDA**

ABSTRACT

On January 22, 2016, a cabinet decision endorsed the Fifth Science and Technology Basic Plan, in which a series of initiatives called "Society 5.0" was proposed to realize a "super smart society" in the future. In connection, Japan's Ministry of Education, Culture, Sports, Science & Technology declared that all high school students must receive STEAM education to build a thinking foundation to fit in this prospective society.

This article examines optical illusion objects in the context of STEAM materials for high school students. Section 2 of this paper briefly reviews the concept of perspective projection. To facilitate students' understanding of this concept, we use GeoGebra, an interactive mathematics software. Section 3 focuses on geometrizing Troika's perspective sculpture "Squaring the Circle." We obtained permission from Troika to 3-D-print a smaller version of this work. Section 4 provides some tips in 3-D-printing the sculpture. The penultimate section demonstrates an application of this idea to polygonizing the circle.

* Natural and Living Sciences Education　** Joetsu University of Education (Master's Program)